cogito

GOTTLOB FREGE

aritmetiğin temelleri

sayı kavramı üzerine mantıksal-matematiksel bir inceleme

Çeviren: H. Bülent Gözkân

YKY

ARİTMETİĞİN TEMELLERİ

Sayı Kavramı Üzerine Mantıksal-Matematiksel Bir İnceleme

Gottlob Frege 8 Kasım 1848'de Wismar'da doğdu. 1869-1871 yılları arasında Jena Üniversitesinde, sonraki beş dönemde de Göttingen Üniversitesinde eğitim gördü. Ana dalı matematik olmakla birlikte, fizik, kimya ve felsefe öğrenimi de gördü. 1873'te Göttingen Üniversitesinde verdiği "Sanal Formların Düzlemdeki Geometrik Temsili Üzerine" başlıklı doktora teziyle matematik doktoru oldu. 1874'te doçent, 1879'da profesör, 1896'da ordinaryüs profesör oldu. 1914'te emekliye ayrıldı ve 26 Temmuz 1925'te öldü. Analitik felsefenin ve modern simgesel mantığın kurucusu sayılır.

Eserleri: *Begriffsschrift, eine der arithmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens,* (Kavram Yazısı) Halle a. S., 1879; *Die Grundlagen der Arithmetik: eine logisch-mathematische Untersuchung über den Begriff der Zahl, (Aritmetiğin Temelleri)* Breslau, 1884.

H. Bülent Gözkân (Doç.Dr.) 1957 yılında İstanbul'da doğdu. Orta öğrenimini Saint Joseph Lisesinde, lisans eğitimini ODTÜ İnşaat Mühendisliği Bölümünde tamamladı. 1992'de ODTÜ Felsefe Bölümünden *Geometride Uzlaşımsalcılık* üzerine yazdığı teziyle yüksek lisans, 2000'de Boğaziçi Üniversitesi Felsefe Bölümünden *Kant'ta Ben'in ve Aklın Kuruluşu* üzerine yazdığı teziyle doktora derecesi aldı. Halen Yeditepe Üniversitesi Felsefe Bölümünde öğretim üyesidir

GOTTLOB FREGE

Aritmetiğin Temelleri

Sayı Kavramı Üzerine Mantıksal-Matematiksel Bir İnceleme

Çeviren:
H. Bülent Gözkân

YKY
İSTANBUL

Yapı Kredi Yayınları - 2812
Cogito - 169

Aritmetiğin Temelleri / Gottlob Frege
Özgün adı: Die Grundlagen der Arithmetik
Çeviren: H. Bülent Gözkân
Redaksiyon: İlhan İnan

Kitap editörü: Şeyda Öztürk
Düzelti: Mahmure İleri

Kapak tasarımı: Nahide Dikel - Elif Rifat

Baskı: Pasifik Ofset
Cihangir Mah. Güvercin Cad. No: 3/1
Baha İş Merkezi A Blok Haramidere - Avcılar / İstanbul

Çeviriye temel alınan baskı: Felix Meiner Verlag GmbH, Hamburg 1988
(Philosophische Bibliothek; Bd. 366)
1. baskı: İstanbul, Aralık 2008
ISBN 978-975-08-1521-8

© Yapı Kredi Kültür Sanat Yayıncılık Ticaret ve Sanayi A.Ş. 2007
Sertifika No: 1206-34-003513
Bütün yayın hakları saklıdır.
Kaynak gösterilerek tanıtım için yapılacak kısa alıntılar dışında
yayıncının yazılı izni olmaksızın hiçbir yolla çoğaltılamaz.

Yapı Kredi Kültür Sanat Yayıncılık Ticaret ve Sanayi A.Ş.
Yapı Kredi Kültür Merkezi
İstiklal Caddesi No. 161 Beyoğlu 34433 İstanbul
Telefon: (0 212) 252 47 00 (pbx) Faks: (0 212) 293 07 23
http://www.yapikrediyayinlari.com
e-posta: ykykultur@ykykultur.com.tr
İnternet satış adresi: http://alisveris.yapikredi.com.tr
http://www.yapikredi.com.tr

İçindekiler

Çevirenin Sunuşu : Frege ve Aritmetiğin Temelleri • 13
Çeviri Hakkında • 73

ARİTMETİĞİN TEMELLERİ

Giriş • 77
§ 1. Yakın zamanlarda matematikte yapılan çalışmalar, kanıtlamalarda kesinlik ve kavramların tanımlarında keskinlik eğilimini ortaya koymaktadır.
§ 2. Bu eleştirel inceleme sayal sayı [*Anzahl*] kavramının kendisini de genişletmelidir. Kanıtlamanın amacı.
§ 3. Böyle bir inceleme için felsefi saikler: Sayıyla [*Zahl*] ilgili yasaların analitik mi, sentetik mi a priori mi yoksa a posteriori mi olduğuyla ilgili tartışmalar. Bu terimlerin anlamı.
§ 4. Bu kitabın görevi.

I. Bazı Yazarların Aritmetiksel Önermelerin Doğası Hakkındaki Görüşleri • 92
Sayısal İfadeler Kanıtlanabilir mi? • 92
§ 5. Kant bunu yadsımıştır, Hankel ise haklı olarak bunu bir paradoks olarak adlandırmıştır.
§ 6. Leibniz'in 2 + 2 = 4'ü kanıtlaması bir eksiklik içermektedir. Grassmann'ın a + b tanımı hatalıdır.

§ 7. Mill'in, tekil sayıların tanımlarının gözlemlenmiş olgular hakkında bildirimler olduğu ve hesaplamanın da buradan geldiği görüşü temelsizdir.
§ 8. Bu tanımlar, meşruluk kazanmak için olguların gözlemini gerektirmezler.

Aritmetiğin Yasaları Tümevarımsal Doğruluklar mıdır? • 98
§ 9. Mill'in doğa yasası. Mill, aritmetiğin doğruluklarını doğa yasaları olarak adlandırırken, bu yasaları, onların uygulanmasıyla karıştırmaktadır.
§ 10. Toplama işleminin yasalarının tümevarımsal doğruluklar olduğunu yadsımak için dayanaklar; sayıların tümü aynı cins değildir; sayının tanımı, kendiliğinden sayıların ortak özelliklerinin bir kümesini vermemektedir; olasılıkla bunu tersinin doğru olması ve tümevarımın aritmetiğe dayanması gerektiği daha akla yakındır.
§ 11. Leibniz'in "doğuştan" terimi.

Aritmetiğin Yasaları Sentetik A Priori midir, Yoksa Analitik midir? • 103
§ 12. Kant. Baumann. Lipschitz. Hankel. Bilginin zemini olarak içsel görü.
§ 13. Aritmetikle geometri arasındaki ayrım.
§ 14. Bağlı oldukları farklı alanlara göre doğrulukların karşılaştırılması.
§ 15. Leibniz ve W.S. Jevons'ın görüşleri.
§ 16. Onlara karşı, Mill'in "dilin ustaca manipülasyonu"nu küçümseyişi. Göstergeler, algılayabileceğimiz şeylere gönderme [*bedeuten*] yapmadıkları gibi bir nedenden dolayı boş olarak nitelendirilemez.
§ 17. Tümevarımın yetersizliği. Sayı yasalarının analitik yargılar olduğu savı; bu durumda onların kullanımının ne olduğu. Analitik yargıların öneminin değerlendirilmesi.

II. Bazı Yazarların Sayal Sayı Kavramı Üzerine Görüşleri • 110
§ 18. Genel sayal sayı kavramına yönelik bir incelemenin gerekliliği.
§ 19. Sayının tanımı geometrik olmamalıdır.
§ 20. Sayı tanımlanabilir mi? Hankel. Leibniz.

Sayal Sayı Dışsal Şeylerin Bir Özelliği midir? • 112
§ 21. M. Cantor ve E. Schröder'in görüşleri.
§ 22. Baumann'm Karşı Görüşleri: Dışsal şeyler kendilerini belirli birlikler (birimler) olarak bize sunmazlar. Onların sayal sayıları bizim onlara bakış tarzımıza bağlıdır.
§ 23. Mill'in, sayının, şey yığınlarının bir özelliği olduğuna ilişkin görüşü savunulamaz.
§ 24. Sayının geniş uygulama alanı. Mill. Locke. Leibniz'in cisimsel olmayan metafiziksel şekli. Eğer sayı duyusal bir şey olsaydı, duyusal olmayana atfedilemezdi.
§ 25. Mill'e göre 2 ile 3 arasındaki fiziksel fark. Berkeley'e göre sayı, gerçekten şeylerin içinde varolmamakta, ama zihin tarafından yaratılmaktadır.

Sayı Öznel Bir Şey midir? • 118
§ 26. Lipschitz'in sayıların oluşturulmasını betimlemesi pek doğru değildir ve sayı kavramının yerini tutamaz. Sayı psikolojinin bir nesnesi değil, nesnel bir şeydir.
§ 27. Schloemilch'in öne sürdüğü gibi sayı, bir sıralı dizideki bir nesnenin konumunun tasarımı değildir.

Küme Olarak Sayal Sayı • 122
§ 28. Thomae'nin ad vermesi.

III. Birlik (Birim) ve Bir Üzerine Görüşler • 124
Sayı Sözcüğü Olarak "Bir" Nesnelerin Bir Özelliğini mi Dile Getirmektedir? • 124
§ 29. "μονάς" ve "birim" terimlerinin karışıklığı. E. Schröder'in, birimi, sayı atfedilecek bir nesne olarak tanımlaması yararsızdır. "Bir" sıfatı, bir betimlemeye herhangi bir şey katmaz, bir yüklem olarak kullanılamaz.
§ 30. Leibniz'in ve Baumann'm birimi tanımlama girişimleri, kavramı tümüyle bulanıklaştırmaktadır.
§ 31. Baumann'ın, bölünmemişlik ve yalıtılmışlık ölçütü. Birlik (birim) ideası (Locke'da olduğu gibi) her bir nesne tarafından bize verilmez.
§ 32. Dil, bir anlam kaymasıyla da olsa, bölünmemiş olmakla yalıtılmış olmak arasında bir bağlantı olduğuna işaret ediyor.

§ 33. Bir birim ölçütü olarak (G. Köpp'ün düşündüğü gibi) bölünmezlik savunulamaz.

Birimler Birbirleriyle Aynı mıdır? • 128

§ 34. "Birim (birlik)" adının zemini olarak aynılık [*Gleichheit*]. E. Schröder. Hobbes. Hume. Thomae. Şeyler arasındaki farkları soyutlamak, bize onların sayılarının kavramını vermez, ne de şeyleri bir diğeriyle aynı kılar.

§ 35. Çokluktan söz edeceksek, farklılık, gerçekten de zorunludur. Descartes. E. Schröder. W.S. Jevons.

§ 36. Birimlerin farklı olduğu görüşünde karşılaşılan güçlükler. W.S. Jevons'ta farklı ayrılıklar.

§ 37. Locke, Leibniz ve Hesse tarafından sayının birim ya da bir cinsinden verilen tanımları.

§ 38. "Bir" bir özel addır, "birim" bir kavram-terimidir. Sayı birimler olarak tanımlanamaz. "Ve" ve + arasındaki ayrım.

§ 39. Birimlerin aynılığı ile ayırt edilebilirliğini bağdaştırmaktaki zorluk, "birim" sözcüğünün çokanlamlılığı ile örtülmüştür.

Ortadaki Sorunun Üstesinden Gelme Girişimleri • 135

§ 40. Birimler arasında ayırt etme aracı olarak uzay ve zaman. Hobbes. Thomae. Onlara karşı, Leibniz, Baumann, W.S. Jevons.

§ 41. Amaca ulaşılamamıştır.

§ 42. Birimler arasında ayırt etme aracı olarak bir sıralı dizideki konum. Hankel'in sunuşu.

§ 43. Schröder'in nesneleri 1 göstergesiyle resmetmesi.

§ 44. Jevons'ın farklılıkların varlığını koruyarak, farklılık özelliğinden soyutlama çabası. 0 ve 1 de diğerleri gibi sayıdır. Sorun aynen devam ediyor.

Sorunun Çözülmesi • 141

§ 45. Özet.

§ 46. Bir sayı tümcesi [*Zahlangabe*], bir kavram hakkında bir bildirim içermektedir. Bir kavrama atfedilen sayının değişebildiği halde kavramın değişmeden kaldığı hakkındaki karşı çıkış.

§ 47. Sayı tümcelerinin olgu tümceleri olduğu, kavramların nesnelliği ile açıklanmıştır.

§ 48. Bazı güçlüklerin giderilmesi.
§ 49. Spinoza'da bulunan destek.
§ 50. E. Schröder'in alıntılanan açıklaması.
§ 51. Bu açıklamanın düzeltilmesi.
§ 52. Almanca bir deyimde bulunan destek.
§ 53. Bir kavramın vasıflarıyla onun özellikleri arasındaki ayrım. Varoluş ve sayı.
§ 54. Birim, sayı hakkmdaki bir tümcenin öznesi olarak adlandırılabilir. Birimin bölünemezliği ve smırlandırılışı? Aynılığı ve ayırt edilebilirliği? [*Gleichheit und Unterscheidbarkeit*]

IV. Sayal Sayı Kavramı • 150
Her Tekil Sayı Kendi Başına Varolan (bağımsız) Bir Nesnedir. • 150
§ 55. Leibniz tarafından yapılan tekil sayı tanımlamalarını tamamlama girişimi.
§ 56. Yapılmaya çalışılan tanımlamalar kullanılamaz, çünkü burada tanım, sayının yalnızca bir öğe olduğu bir bildirimdir.
§ 57. Bir sayı tümcesi, sayılar arasındaki bir eşitlik [*Gleichung*] olarak görülmelidir.
§ 58. Sayının kendi başına varolan bir nesne olarak tasarımlanamazlığma karşı çıkış. İlkece sayı tasarımlanamaz.
§ 59. Bir nesnenin tasarımlanamaz olması, onu araştırmaktan vazgeçmek için bir neden değildir.
§ 60. Somut şeyler bile her zaman tasarımlanabilir değildir. Bir sözcüğün gönderimini, bir tümce bağlamında göz önüne almamız gerekir.
§ 61. Sayıların uzaysal olmadığı karşı çıkışı. Her nesnel nesne uzaysal değildir.

Sayal Sayı Kavramını Elde Edebilmek İçin, Bir Sayısal Eşitliğin Anlamını Saptamamız Gerekir. • 155
§ 62. Sayısal eşitlik için bir ölçüte gereksinimimiz var.
§63. Olanaklı ölçüt olarak eşleme. Aynılığın sayılara özgü bir şekilde tanımlanmasından duyulan mantıksal kuşku.
§ 64. Benzer yöntemlerden örnekler: Bir çizginin yönü, bir düzlemin yönlülüğü, bir üçgenin şekli.
§ 65. Bir tanımlama girişimi. İkinci bir kuşku: Aynılığın yasaları sağlanmış mıdır?

§ 66. Üçüncü kuşku: Aynılık ölçütü tüm durumları kuşatamıyor.
§ 67. Bir nesnenin verilme tarzını, bir kavramın tanımlayıcı vasfı olarak almak ölçüt sorununa bir çare değildir tamamlayamayız.
§ 68. Bir kavramın kaplamı olarak sayal sayı.
§ 69. Açıklama.

Tanımımızın Tamamlanması ve Onaylanması • 163
§ 70. Kavram-bağmtısı.
§ 71. Bir bağıntı yardımıyla eşleme.
§ 72. Bire-bir eşleme bağıntısı. Sayal sayı kavramı.
§ 73. Eğer F kavramının altına düşen nesnelerle, G kavramının altma düşen nesneleri bire-bir eşleyen bir bağıntı varsa, F kavramına ait olan sayal sayı, G kavramına ait olan sayal sayı ile aynıdır.
§ 74. Sıfır, "kendisiyle aynı olmayan" kavramına ait olan sayal sayıdır.
§ 75. Sıfır, altma hiçbir şeyin düşmediği kavrama ait olan sayal sayıdır. Eğer sıfır o kavrama ait olan sayal sayı ise, o kavramın altına hiçbir nesne düşmez.
§ 76. "n, doğal sayılar serisinde doğrudan m'yi izler" dilegetirişinin tanımlanması.
§ 77. 1, "0 ile aynı" kavramına ait olan sayal sayıdır.
§ 78. Bizim tanımlarımız aracılığıyla kanıtlanacak tümceler.
§ 79. Bir seride izlemenin tanımlanması.
§ 80. Aynı konu hakkındaki yorumlar. İzleme nesneldir.
§ 81. "x, y ile sonlanan φ-serisinin bir üyesidir" dilegetirişinin tanımlanması.
§ 82. Doğal sayılar serisinin en son üyesi olmadığına ilişkin kanıtlamanın ana çizgileri.
§ 83. Sonlu sayal sayıların Tanımı. Doğal sayılar serisinde hiçbir sonlu sayal sayı, kendini izlemez.

Sonsuz Sayal Sayılar • 177
§ 84. "Sonlu sayal sayı" kavramına ait olan sayal sayı, bir sonsuz sayal sayıdır.
§ 85. Cantor'un sonsuz sayal sayıları; "güç". Terminolojideki farklılık.
§ 86. Cantor'un ardışık izleme kavramı ve benim seride izleme kavramım.

V. Sonuç • 180
§ 87. Aritmetiğin yasalarının doğası.
§ 88. Kant'ın analitik yargıların değerini küçümsemesi.
§ 89. Kant'ın tümcesi: "Hissetme yetisi olmadan hiçbir nesne bize verilemez." Kant'ın matematiğe yaptığı katkı.
§ 90. Aritmetiğin yasalarının analitik doğalarının tam bir kanıtlanışı için, halen hiçbir halkası eksik olmayan bir çıkarım zincirine gerek duyuyoruz.
§ 91. Benim *Begriffsschrift*, bu eksikliği doldurabilecektir.

Öteki Sayılar • 185
§ 92. Hankel'e göre bazı sayıların olanağının sorulmasının anlamı.
§ 93. Sayı, ne bizim dışımızda uzaydadır, ne de özneldir.
§ 94. Bir kavramın çelişkiden uzak olması, o kavramın altma bir nesne düşmesinin güvencesi değildir ve bunun da ayrıca kanıtlanması gerekir.
§ 95. (c - b), öyle kolayca, çıkarma problemini çözen bir gösterge olarak görülemez.
§ 96. Matematikçiler kendi isteklerine göre şeyler yaratamazlar.
§ 97. Kavramlar, nesnelerden ayırt edilmelidir.
§ 98. Hankel'in toplamayı tanımlaması.
§ 99. Formalist kuram kusurludur.
§ 100. Çarpmanın gönderimini özel bir yolla genişleterek karmaşık sayıların bir yorumunu yapma girişimi.
§ 101. Böyle bir yorum yapılmadığı sürece kanıtlamaları ikna ediciliği yapaydır.
§ 102. Bir işlemin yapılabilme olanağına sahip olduğunu kabul etmek, onun icra edilmesiyle aynı şey değildir.
§ 103. Kossak'm karmaşık sayıları tanımlaması, bir tanımlamaya yalnızca yol gösterme niteliği taşır ve aritmetiğe yabancı öğelerin ona sokulmasını engelleyemez. Karmaşık sayıların geometrik temsili.
§ 104. Gerekli olan, yeni sayılar için bir yeniden tanıma yargısının anlamını saptamaktır.
§ 105. Aritmetiğin çekiciliği onun akılsal niteliğinden kaynaklanmaktadır.
§ 106-109. Özet.

Frege ve Aritmetiğin Temelleri

Frege, 1897'de yazmış olduğu, ama ancak ölümünden sonra yayımlanmış olan *Mantık*'ta şunları yazıyor: "Mantığa atfettiğimiz görev, konusu ne olursa olsun tüm düşünme faaliyetlerinde en yüksek genellikte neyin sağlandığını söyleyebilmesidir. Düşünmemizin ve bir şeyi doğru kabul etmenin kurallarının doğruluğun yasalarıyla belirlenmiş olduğunu varsaymak zorundayız. Kurallar, yasalarla birlikte verilmiş olmaktadır. Dolayısıyla diyebiliriz ki: Mantık, doğruluğun en genel yasalarının bilimidir."[1] Yine ölümünden sonra yayımlanmış olan başka bir yazısında: "...mantık yasaları, 'doğru' sözcüğünün içeriğinin açığa çıkmasından başka bir şey değildir. Her kim ki bu sözcüğün anlamını kavrayamaz,... mantığın görevinin ne olduğu konusunda açık bir fikre sahip olamaz."[2] Frege için mantık, doğruluğun ne olduğunun açığa çıkması ve doğruluğun yasaları aracılığıyla hakikatin örtüsünün açılmasıdır ki, aslında bu son ifade kendisinden önceki pek çok düşünüre atfen de kullanılabilir. Frege'yi kendisinden önceki düşünürlerden ayırt eden, mantığa, mantıkla doğal dilin ilişkisine olan farklı yaklaşımıdır; ve bu yaklaşım, mantıkta bir devrime karşılık gelecek ve Frege'yi modern simgesel mantığın kurucu babası yapacaktır. Frege, mantığı, doğal dilin örgüsünün içinde ve onun zemininde aramış, doğal dili bir yandan mümkün kılan, ama bir yandan da doğal dilin kendisinin üstünü ört-

1 Frege, Posthumous Writings. Çev. P. Long ve R. White, s. 129, Blackwell 1979 (Nachgelassene Schriften, [NS] s. 139); bundan sonra *PW* / *NS*.

2 *PW* s. 3/*NS* s. 3.

tüğü bu yapıyı, hem doğal dilden hareket ederek, hem de doğal dili çözümleyerek yapmıştır. Buradaki yeni soru, doğal dilin 'ne' aracılığıyla çözümleneceğidir; yani doğal dili, hem onun sınırları içinde kalarak, ama bir yandan da onu 'aşarak' inceleyebilmek nasıl mümkün olacaktır. Frege'nin modern mantığın kurucu metni olan *Begriffsschrift*'le başlayarak yapmaya çalışacağı ve bu yolla yeni bir 'hakikat' anlayışına doğru evrilecek bir felsefe anlayışının ortaya çıkmasını sağlayacak temel sorunsal budur.

John Rawls ünlü *Bir Adalet Kuramı* kitabına: "Tıpkı hakikatin düşünce sistemlerinin ilk erdemi olması gibi, adalet de toplumsal kurumların ilk erdemidir"[3] sözleriyle başlıyor. Felsefi düşünmenin de (Rawls'm sözleriyle) ilk erdem olarak yöneldiği hakikatin dayanağını veya mekânını ayırt etmek, Batı Felsefesi geleneği içinde tüm düşünce tarihinin çok genel bir görünümünü vermeye de olanak verebilir: Hakikatin dayanağının aşkın (*transcendent*) ve insan aklma 'dışsal bir mekânda' olduğu tasavvur edilen dönem, felsefi düşünmenin Platon'dan Kant'a kadar olan dönemine; hakikatin dayanağının özne ve öznenin aklı düzleminde olması Kant'ın Transandantal Felsefesiyle başlayan döneme; bu dayanağın dil düzlemi olması veya dilin sınırları içinde olması ise "dile dönüş" (*linguistic turn*) adı verilen döneme karşılık geldiği [çok genel ve kaba bir şemalaştırma olarak gözükse de] ifade edilebilir.

"Dile dönüş", kabaca, dil ortamının hakikatle düşünme arasında sadece saydam bir aracı ortam olmadığını, bizzat bu ortamın felsefe meseleleri adı verilen meselelerin ortaya çıkmasını sağlayan bir zemin olduğunu, bu zeminin bizzat kendisinin yapısı anlaşılmadan felsefe meselelerinin asli doğalarının da anlaşılamayacağını ileri süren anlayıştır. Felsefe meselelerinin anlaşılmasında dilsel çözümlemenin rolünü öne çıkaran ve dilsel çözümlemenin felsefi bir yönteme dönüşmesinde en etkili olmuş ilk kaynak metinler arasında Russell'ın "On Denoting"i ve Wittgenstein'ın "Tractatus Logico-Philosophicus"u sayılabilir. Wittgenstein, Tractatus'un önsözünde şunları söylüyor: Felsefe sorunlarının soru olarak ortaya çıkmaları, dilimizin mantığının yanlış anlaşılmasına bağlıdır" [4]

3 John Rawls, *A Theory of Justice*, Harvard University Press, 2003, s. 3.

4 Ludwig Wittgenstein, *Tractatus Logico-Philosophicus*, BFS. İst. 1985, çev. Oruç Aruoba.

İleride söz edeceğiz, Kant'ta, geleneksel felsefe ve metafizik anlayışının kökten bir eleştiriye tâbi tutularak, metafiziğin sağlam bir (transandantal) bilim olarak kurulması tasarısında dikkatlerin duyusallığm ve düşünmenin asli özelliklerinin (yani transandantal yetilerin ve onların transandantal form ve kavramlarının) belirlenmesi olarak ortaya çıkan felsefi tavır, Wittgenstein'da dil ve dilin mantığı üzerinden yapılan bir inceleme olarak karşımıza çıkmaktadır. Wittgenstein, *Defterler*'de "Çalışmam, mantığın temellerinden dünyanın doğasına doğru genişledi,"[5] *Tractatus*'ta "Mantık dünyaya nüfuz eder; dünyanın sınırları onun da sınırlarıdır"[6] diye yazarken, Kant'm Transandantal Felsefesiyle başlayan, Frege ile dilin mantıksal derin yapısının araştırılmasına evrilen yaklaşımın, kendisinde nasıl yeni bir felsefe anlayışına (Kant'm amaçladığından önemli bir sapma gösterse de) dönüştüğünü ifade etmektedir.[7]

Bu anlayışı özetle ifade edelim: Dilimizin mantıksal bir yapısı var. Ve bu yapı, dünya hakkında bir bildirimde bulunduğumuzda kendi yapısını dünyaya dayatır ve biz dünyayı ancak bu dayatma üzerinden bilebiliriz. Öyleyse, dünya hakkındaki bilgimize dair olan her şey, zorunlu olarak dilin kendi mantığından gelen öğeleri de içinde taşır. Yani dünya hakkında kendinde bir gerçekliği değil, dilin kendi mantığının dünyaya yüklediği öğelerle ortaya çıkan bir gerçekliği bilebiliriz.

Felsefe meseleleri olarak ortaya çıkanların bir kısmı, dilin kendi mantığında ve yapısında içerilmesinden dolayı dünyaya yüklenen özelliklerin, aslında gerçekliğin kendi içindeki özellikleri, durumları, halleri olduğu sanısına kapılmaktan kaynaklanmaktadır. Böylelikle sorun, zaten onlar olmadan dünyayı bilemeyeceğimiz yapıları, dünyanın veya gerçekliğin kendisine

5 Wittgenstein, *Notebooks*, 1914-1916, çev. G.E.M. Anscombe, Un. of Chicago Pr. 1979.

6 5.61.

7 "Felsefenin amacı düşüncelerin mantıksal açıklığıdır.
Felsefe bir öğreti değil, bir etkinliktir.
Felsefe yapıtı özünde açımlamalardan oluşur.
Felsefenin sonucu 'felsefi tümceler' değil, tümcelerin açık hale gelmesidir.
Felsefe, başka türlü sanki bulanık ve kaypak olan düşünceleri açık kılmalı, keskin olarak sınırlamalıdır."
Ludwig Wittgenstein, *Tractatus Logico-Philosophicus*, 4.112. BFS. İst. 1985, çev. Oruç Aruoba.

ait yapılar olarak kabul ederek araştırmaya, anlamaya ve bilmeye çalışmaktan kaynaklanmaktadır. Dolayısıyla dilin yapısının ve onun zeminindeki dilin derin mantıksal yapısına ilişkin bir inceleme, aslında felsefi mesele olarak düşünülenlerin de asli doğalarının anlaşılmasını sağlayacaktır.

Büyük ölçüde *Tractatus*'un aracılığıyla yayılma olanağı bulan ve Mantıkçı Pozitivizmin ve Analitik Felsefenin kurulma zeminini sağlayan bu anlayışta felsefe, yukarıda alıntıladığımız gibi, bir öğreti değil bir etkinlik olarak düşünülmektedir.

Wittgenstein, *Tractatus Logico-Philosophicus*'un önsözünde, "düşüncelerimin uyarılmasının büyük bir bölümünü Frege'nin büyüklüklü yapıtlarına ve dostum Bay Bertrand Russell'm çalışmalarına borçlu" olduğunu belirtirken, aslında Frege'nin ana tasarısından hareket etmekteydi.

Frege'nin kendisi, felsefe hakkında, *Tractatus* 4.112'de sözü edildiği şekliyle bir değerlendirme yapmamış olsa da, bu anlayışın kilometre taşları, onun, felsefi meseleleri dilin mantıksal yapısından bağımsız bir şekilde ele almayan ve aritmetiğin temellerinin felsefi olarak incelenmesinde önkoşul olarak gördüğü dilin mantıksal yapısını bizzat bir araştırma konusu haline getiren çalışmalarından kaynaklanmaktadır. Frege'nin, dilin mantıksal yapısmın incelenmesinde izlediği yol, kendisinden sonra, analitik felsefenin ortaya çıkmasını sağlayacak felsefi bir yönteme dönüşecektir.

Frege üzerine en kapsamlı çalışmaları yapmış olduğunu söyleyebileceğimiz Michael Dummett, Descartes'tan itibaren neyi bilebileceğimize ve bildiğimizi iddia ettiklerimizi nasıl gerekçelendirebileceğimize ilişkin öne çıkan epistemolojik perspektifin, ilk kez Frege tarafından tümüyle reddedildiğini ifade ediyor ve dilin mantıksal yapısının incelenmesini merkeze alması açısından da, Frege'nin ilk modern filozof olduğundan söz ediyor. "Bu perspektif değişikliği Frege'nin *junior*'u Russell'da yoktur henüz; Frege'den sonra bu değişikliği ortaya koyan Wittgenstein'ın, *Tractatus Logico-Philosophicus*'udur. İlgi alanının sınırlılığına karşın Frege'nin günümüz felsefesi için önemi bu yüzdendir."[8] 1931'de yayımlanmış olan *Felsefede Dönüm Noktası*

8 Michael Dummett, *Frege's Philosophy*. 'Truth and Other Enigmas' içinde . Harvard Un. Pr. 1980, s. 89.

(Die Wende Der Philosophie) başlıklı yazısında Moritz Schlick de, Frege'nin devrimci yanını pek öne çıkarmasa da, benzer bir saptama yapıyor: "Bertrand Russell ve Gottlob Frege geçtiğimiz 20-30 yıl içinde önemli açılımlar yapmışlar, ancak dönüm noktasına giden hamleyi yapan Wittgenstein (*Tractatus Logico-Philosophicus*'uyla, 1922) olmuştur."[9]

Dummett, Frege'nin mantık ve dil filozofu olarak şöhretinin 1950'lerden itibaren giderek arttığını ve genelde analitik felsefenin kurucusu olarak kabul edildiğini yazmaktadır.[10] Dummett'a göre *Aritmetiğin Temelleri*, Frege'nin başyapıtıdır; onun felsefi yazıları arasında en güçlü ve en doğurgan olanıdır[11] ve Aristoteles örneğinde olduğu gibi, dilsel sorular sorup dilsel yanıtlar veren birçok filozof olmasına karşılık, Frege, dilsel olmayan bir soru sorup, ona dilsel bir yanıt veren ilk filozoftur.[12] Daha da ileri gider Dummett ve *Aritmetiğin Temelleri* § 62'nin şimdiye kadar felsefede yazılmış olan en doğurgan (velûd) paragraf olduğunu iddia eder.[13]

Özellikle modern simgesel mantığın ve dil felsefesinin kurucusu olarak kendisinden sonraki dönemlere çok büyük bir etki yapmış olan Frege, yaşadığı dönemde çalışmaları çok küçük bir çevre dışında bilinmiyordu (Frege'nin çalışmalarının mantık ve felsefe camiasında tanınmasında Russell'm yazı ve kitaplarının önemli bir yeri vardır). Yukarıda Dummett'm yorumlarına atfen değindiğimiz gibi, Frege'yi analitik felsefenin kurucusu olarak nitelendirmek, aslında daha çok Wittgenstein üzerindeki etkisi ve *Aritmetiğin Temelleri* (bundan sonra *AT* olarak kısaltılacak) kitabıyla, *Anlam ve Gönderim Üzerine* başlıklı, anlam sorununa yaklaşımda çağ açan makalesinin, kendisinden sonra çok farklı bir felsefe anlayışı içinde değerlendirilmesi nedeniyledir. Frege, kıta felsefesinin ve özellikle Kant'ın felsefi yaklaşımının etkisinde yetişmiş bir Alman filozofudur ve bugünden geriye bakıldığında Frege'nin analitik felsefe geleneği içinde kalan

9 Moritz Schlick, *The Turning Point in Philosophy*. 'Logical Positivism' içinde, çev. D. Rynin, ed. A.J. Ayer, Free Pres Ed. 1966.s. 54.

10 Michael Dummett, *Frege: Philosophy of Mathematics*. Harvard Un. Pr. 1995, s. xi.

11 A.g.y. s. 1

12 A.g.y. s. 112

13 A.g.y. s. 111.

bir düşünür olduğunu öne sürmek son derece zordur. Bu noktada Frege'nin Kant'tan devraldığı mirasa da işaret etmek gerekir; ama öte yandan şunu da belirtmek gerekir ki, Frege'nin aritmetiğin temellerine yönelen araştırmalarının Kant'ı aşmayı amaçlayan yönleri, kendisinin amaçlamadığı bir şekilde Kant'm Transandantal felsefesine karşıt bir konumda bulunan ve (özellikle Eukleidesçi-olmayan geometriler ve Einstein'm görelilik kuramlarının verdiği ivmeyle) Kantçı *sentetik a priori*'nin reddiyesinden de beslenen bir felsefi tavır olan mantıkçı pozitivizmin ve analitik felsefenin ortaya çıkmasının da arka planındaki düşünsel zemini oluşturacaktır.

Frege ve Mantık

Alman matematikçi, mantıkçı ve filozofu Friedrich Ludwig Gottlob Frege, Avrupa'daki köktenci siyasi devrimlerin yılı olan 1848'in 8 Kasımında Pomerenya'nın küçük bir kenti Wismar'da doğdu. Frege, 1869-1871 yılları arasında Jena Üniversitesinde, sonraki beş dönemde de Göttingen Üniversitesinde okudu. Ana dalı matematik olmakla birlikte, fizik, kimya ve felsefe öğrenimi de gördü. Üzerinde büyük bir etki bırakacak olan filozof Hermann Lotze'nin derslerini izledi. 1873'te Göttingen Üniversitesi'nde verdiği *"Sanal Formların Düzlemdeki Geometrik Temsili Üzerine"* başlıklı doktora teziyle matematik doktoru oldu. 1874'te Jena'da Privatdozent (doçent) olan Frege, 1879'da profesör, 1896'da ordinaryüs profesör oldu. 1914'te emekliye ayrılan Frege, 26 Temmuz 1925'te, şimdi adı Mecklenburg-Vorpommern olan Bad Kleinen'de yaşama ve mantığa gözlerini kapadı.

Çalışmalarına bir matematikçi olarak başlayan ve matematiğin temellerine yönelen araştırmalarıyla felsefeye yeni bir anlayış getiren Frege'nin yöneliminin ardındaki saik nedir? Frege, yaşamının sonlarında kaleme aldığı bir yazısmda bunu şöyle ifade ediyor: "Matematik ile başladım. Bu bilimde daha sağlam temeller için çaba göstermek bana en acil gereksinim olarak göründü. Kısa sürede anladım ki, sayı bir yığın, bir şey dizisi veya bir yığma ait bir özellik değildir; sayma işleminin sonucunda

ulaştığımız sayı hakkında bir bildirimde bulunduğumuzda, bir kavram hakkında bildirimde bulunmuş oluruz. Dilin mantıksal yetersizliği böyle araştırmalar için ciddi bir engel oluşturuyordu. Buna *Begriffsschrift* (Kavram Yazısı) ile bir çare buldum. Böylelikle matematikten mantığa geçmiş oldum."[14]

Matematiğe daha sağlam temeller bulmak çabasının ardındaki ana fikir ise aritmetiğin kavramlarının saf mantıksal kavramlar aracılığıyla tanımlanabileceği ve aritmetiğin yasalarının sadece mantık yasalarmdan türetilebileceğiydi; başka bir deyişle, sayı kavramının, görü (*anschauung-intuition*) zemininden kopartılarak sadece mantık temelinde, sadece kavramsal olarak tanımlanabileceğini ortaya koymaktı. Görü zemininden koparmak hem a posteriori görü (Mill gibi deneyselcilerde olduğu gibi) veya a priori görü zemininden koparmak (Kant'ın sentetik a priorisi) anlamındadır. Frege'nin bu çabasının başarıya ulaşmasının anlamı ise, aritmetiği *sentetik a priori* bir bilim olarak tanımlayan Kant'm aksine, aritmetiğin yasalarının analitik olduğunun ve sayının, sadece a priori bir nesne değil, aynı zamanda mantıksal bir nesne olduğunun da ortaya konulmasıdır (Frege, geometrinin *sentetik a priori* olduğu görüşünde Kant ile aynı fikirdedir[15]). Aritmetiğin mantığa indirgenebileceği görüşü, matematiğin felsefi temelleri hakkındaki üç ana görüşten "mantıksalcılık" (logicism) olarak bilinen felsefi yaklaşıma karşılık gelir. İşte Frege'nin ana tasarısını gerçekleştirmesindeki ilk adım, *Begriffsschrift*'le mantığın yeni bir yaklaşımla ele alınmasıdır.

Begriffsschrift modern mantığa atılmış önemli bir adımdır (Kitabın tam adı *"Kavram Yazısı, Aritmetiğin Formel Diline Göre Oluşturulmuş Bir Saf Düşünce Formel Dili"*).[16] Mantık tarihi hakkında değerli çalışmaları olan Bochenski, bu kitabın, ancak klasik mantığın temellerini atan Aristoteles'in *Birinci Analitikler*'i ile karşılaştırılabileceğini, Frege'nin Aristoteles'ten bu yana gelmiş geçmiş en büyük mantıkçı olduğunu ifade etmektedir.[17]

14 Frege, *Posthumous Writings*. Çev. P. Long ve R. White, s. 253, Blackwell 1979 (*Nachgelassene Schriften*, [*NS*] s. 273).

15 *Aritmetiğin Temelleri* § 89.

16 *Begriffsschrift, eine der aritmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens.*

17 I.M. Bochenski, *A History of Formal Logic*, çev. Ivo Thomas, Chelsea Pub. Com., Un. of Notre Dame Pr. Indiana 1970. s. 268.

Frege'den önce de klasik mantığın yetersizlikleri ve simgesel ifadesi üzerinde çalışılmıştı; örneğin George Boole'un *Mantığın Matematiksel Analizi* ve *Düşüncenin Yasalar'ı* adlı kitapları,[18] bu yolda önemli bir gelişmeydi. Ama Boole, matematiksel teknikleri mantığa uygulamış, böylelikle mantığı matematiğin bir parçası olarak ortaya koymayı tasarlamıştı. Frege ise aritmetiğin temel yasalarının mantığın yasalarından başkası olmadığını, dolayısıyla aritmetiğin mantığa indirgenebileceğini düşünüyordu. Aritmetikteki çıkarımlar Aristotelesçi kıyas ilkeleriyle çözümlenebilir durumda değildi;[19] ayrıca yargının kavramsal içeriği Aristoteles mantığıyla ortaya konabilir durumda değildi. Frege, *Begriffsschrift*'te doğruluk fonksiyonlarına dayalı önermeler mantığını, niceleyiciler veya yüklemler mantığını kurmuş, matematiksel dizi kavramını ve saf biçimsel çıkarımın mümkün olduğu saf biçimsel sistem anlayışını tanımlamıştı. Frege *Begriffsschrift*'in amacından söz ettiği bir yazısında bunu şöyle ifade ediyor: "Amacım, formüllere dökülmüş soyut bir mantık ortaya koymak değil, ama sözcüklerle yapılandan çok daha kesin ve açık bir şekilde *içeriği* [it. benim] simgeler aracılığıyla dile getirmek. Aslında yapmak istediğim bir *Calculus Rationacotor* değil, Leibniz'in düşüncesine uygun bir *Lingua Characteristica* yaratmaktır."[20]

Boole'un Mantıksal Hesabı (s. 13) makalesinde Frege, "... en başından beri aklımda olan, içeriğin ifade edilmesidir; ... ama bu içeriğin doğal dille ifade edilenden daha açıkça ve hassasiyetle ortaya konması gerekir" diye yazmaktadır.

Frege'nin yukarıdaki alıntıda sözünü ettiği içerik, yargının kavramsal içeriğidir veya düşünce içeriğidir. Frege açısından 'yargı'nın ne olduğu konusunda şimdilik verilebilecek en basit yanıt, bir nesnenin, belirli bir kavramın altına düştüğünün doğru olduğunun bildirimidir. Başka bir deyişle, bir nesne ile belirli

18 George Boole, *The Mathematical Analysis of Logic* (1847), Oxford: Basic Blackwell, 1951; *An Investigation of the Laws of Thought* (1854), New York Dover 1951.

19 Örneğin, "En büyük doğal sayı yoktur" veya "her doğal sayı için ondan daha büyüğü vardır" önermeleri, klasik Aristoteles mantığıyla da, Boole cebiri ile de ifade edilip analiz edilebilir değildi.

20 Frege, *Ueber den Zweck der Begriffsschrift*, "{Begriffsschrift} und andere Aufsatze" içinde, ed. I. Angelelli, Olms, Hildesheim, 1964

bir kavram arasında 'altına düşme' ilişkisinin olduğu yönünde bir içerik, bir 'olanaklı düşünce içeriği'; bu 'olanaklı düşünce içeriği'nin doğru olduğunun bildirimi ise yargıdır (Hem Kant'm, hem de Frege'nin yargı anlayışlarını daha sonra tekrar ele alacağız). Frege, yargıda, yargı içeriği ve bu içeriğin dilegetirilişini birbirinden ayırmaktadır.[21] Frege bunu, nesnel olanı, öznel ve psikolojik olandan ayırmak için dile getirmektedir. Frege'ye göre yargı içeriği nesneldir ve mantık, yargının kavramsal içeriğiyle ve içeriğin mantıksal bağıntılarıyla, yani çıkarımlarla ilgili olmalıdır.[22]

Düşüncedeki mantıksal veya nesnel öğe, içeriğin dışlanmasıyla (veya soyutlanmasıyla) elde edilen değildir, ama psikolojik öğelerin dışlanmasıyla elde edilendir. Frege'nin önceleri Boole'a, daha sonra da Hilbert'in formalizmine itiraz ettiği nokta, içeriğin tümüyle gözardı edilmesi ve sadece forma bakılmasıdır

Frege'ye göre doğal dil veya gündelik dil psikolojik yaklaşımlarla örtülmüş olduğu için, mantıksal yasaları ve onların bağıntılarını yeterli hassasiyetle ortaya koyamaz. Bu yüzden de öznel tasarımlara [*Vorstellung*] dayanan, psikolojik kökenli tüm öğeler mantıktan ayıklanmalıdır. Frege, öznel tasarım terimini psikolojik anlamda, yani bir sözcüğü duyduğumuzda veya okuduğumuzda zihnimizde oluşan öznel imgeler veya öznel çağrışımlar anlamında kullandığını ifade ediyor. *AT* § 27'deki dipnotta (47. dipnot) 'öznel tasarım'ı şöyle tanımlıyor: "Öznel anlamda bir tasarım, psikolojik çağrışım yasalarını ilgilendiren bir şeydir; duyusal, imgesel bir yapısı vardır. Nesnel anlamda tasarım, mantığa aittir ve ilkece duyusal değildir; her ne kadar nesnel bir tasarıma gönderen [*bedeutet*] sözcüğe, genellikle öznel bir tasarım eşlik ediyor olsa da, bu onun gönderimi değildir. Öznel tasarımlar, çoğu zaman gösterilebilir ki, farklı insanlarda birbirlerinden farklıdır; nesnel tasarımlar ise tüm insanlarda aynıdır. Nesnel tasarımlar nesnelere ve kavramlara ayrılabilir. Karışıklığı önlemek için, ben 'tasarım' sözcüğünü yalnızca öznel anlamında kullandım. Kant, bu sözcüğe her iki anlamı da [*Bedeutung*] verdiği

21 Frege, *Begriffsschrift*, "From Frege to Gödel" içinde, s. 11-12. Van Heijenoort, Harvard Un. Pr. 1967

22 Hans Sluga, *Gottlob Frege*, Routledge and Kegan Paul, London 1980, s. 84.

için öğretisinin, öznel, idealist bir yan taşıdığı varsayılmış ve bu, gerçek görüşünün anlaşılmasını zorlaştırmıştır. Burada göz önünde tutulan ayrım, psikoloji ile mantık arasında yapılan ayrım kadar haklı bir ayrımdır. Bunları her zaman keskin bir şekilde birbirlerinden ayırmak gerekir." Frege'ye göre mantıksal bir dilin inşa edilmesiyle, hem dilin mantıksal formunu psikolojik olandan ayırmak mümkün olacaktır, hem de doğal dilin gramerine dayanan ve mantıksal derin yapıyı örten görünüşteki kılıfı çözebilmek ve asli öğelerine ayırabilmek mümkün olacaktır.[23]

Klasik mantığın, doğal dilin gramerini izleyerek yaptığı 'yüklem' ve 'özne' (veya 'nesne') ayrımı, örneğin, Frege'nin çözümlemesinde yerini 'yüklem' veya 'kavram' için matematiksel 'fonksiyon' anlayışına, 'nesne' için de fonksiyonun argümanı, yani fonksiyondaki değişkene değer verilmesi anlayışına bırakmaktadır: "İnanıyorum ki, özne ve yüklem kavramlarının, argüman ve fonksiyon kavramlarıyla değiştirilmesi zamanın sınavına dayanacaktır. Bir içeriği, bir argümanın fonksiyonu olarak almanın kavram oluşumuna nasıl yol açtığını görmek kolay olacaktır."[24] İşte *Begriffsschrift* notasyonunun geliştirilmesinin ardındaki amaç da gündelik dilin olağanüstü zenginliğinden kaynaklanan çokçeşitlilik ve çokanlamlılıktan uzak kalarak mantıksal içerikle ilgili araştırma yapabilmek ve bu yolla da aritmetiğin asıl doğasını, yani aritmetiğin nesnelerinin yargı içindeki gerçek konumlarını ortaya koyabilmektir. Frege, *Begriffsschrift*'in önsözünde bunu şöyle ifade ediyor: "...gerekçelendirme [*Berechtigung*] gerektiren tüm doğruları sadece mantık aracılığıyla kanıtlanabilenler ve deneyimin olguları ile desteklenenler olmak üzere ikiye ayırdık... Şimdi aritmetiğin yargılarının bu türlerden hangisine ait olduğu sorusunu ele aldığımda, aritmetikte, tüm tikelleri aşan düşünme yasalarından başka hiçbir desteğe başvurmayan çıkarımlarla ne kadar ilerleyebileceğimi görmem gerekirdi. İlk yaptığım iş, bir dizideki sıra kavramını mantıksal sonuç kavramına indirgeme, daha sonra, bundan hareketle de

23 "Mantıkçının işi, psikolojik olana ve kısmen dil ve gramerine karşı sürekli bir mücadeledir." NS. s. 7. [Karş. "Felsefe, anlığımızın dilimizin araçlarıyla büyülenmesine karşı bir mücadeledir". Wittgenstein, *Felsefi Soruşturmalar*, § 109. çev. Haluk Barışcan. Metis Yay. 2007.

24 *Begriffsschrift*, s. 7.

sayı kavramına ulaşmaktı. Görüsel olan herhangi bir şeyin farkında olmadan araya sızmasını önleyebilmek için, çıkarım zincirlerinin hiçbir boşluk içermemelerini sağlamam gerekirdi. Bu gerekliliği en sağlam şekilde yerine getirebilme çabasında, bu amaca uygun olmayan dili karşımda bir engel olarak buldum... *Begriffsschrift* fikri bu ihtiyaçtan doğdu."[25]

Frege *Begriffsschrift*'te geliştirdiği *ideografi*siyle gündelik dil arasındaki ilişkiyi mikroskop ve göz benzeşimiyle aktarıyor. Gözün kullanımı ve yaygınlık alanı elbette mikroskoptan çok daha geniştir, ama mikroskopla da gözün ulaşılamayacağı bilgilere ulaşma olanağı vardır.[26] Bu bakımdan Frege'nin ideografisinin amacı, Boole'unkinde olduğu gibi dili matematikselleştirmek değil, gündelik dilin kullanımları nedeniyle yetersiz, hatta yanıltıcı bir şekilde temsil edilen düşünce içeriklerini saydam bir şekilde ortaya koyabilmektir. Frege'ye göre "Felsefenin görevlerinden biri, kavramların ilişkilerinde gündelik dilin kullanımından kaçınılmaz olarak kaynaklanan yanılgıları ortaya çıkararak ve düşünceyi dilsel kullanım araçlarıyla zehirlenmekten kurtararak, sözcüklerin insan aklı üzerindeki egemenliğine son vermektir."[27] Frege, ömrünün sonlarında yazmış olduğu *Die Verneinung* (Değilleme) makalesinde aynı görüşü tekrar etmektedir: "...mantıkçının önemli görevlerinden biri, dilin düşünüre kurduğu tuzaklara dikkat çekmektir."[28]

Daha önce atıfta bulunduğumuz gibi, Wittgenstein da, *Tractatus Logico-Philosophicus*'un önsözünde, felsefe sorunlarının "soru olarak ortaya çıkmaları, dilimizin mantığının yanlış anlaşılmasına bağlıdır"[29] diye yazarken Frege'nin ana tasarısını izlemekteydi.

25 A.g.y. s. 5-6.

26 A.g.y. s. 6. [Bu arada, mikroskopun hem kuramsal öncüsü, hem de Zeiss şirketinin ortağı olarak üreticisi Ernst Abbé'nin Jena Üniversitesinde Teorik Fizik kürsüsünde profesör olduğunu ve Frege'nin yakın dostu olduğunu belirtelim.]

27 A.g.y. s. 7.

28 Gottlob Frege. *Collected Papers On Mathematics, Logic, And Philosophy*, s. 373-389 / Alm. s. 143-157. Basic Blackwell, Oxford 1984. s. 381/150.

29 Ludwig Wittgenstein, *Tractatus Logico-Philosophicus*, BFS. İst. 1985, çev. Oruç Aruoba.

Frege'nin bu büyük tasarısı Kant tarafından öncelenmişti; Kant'm Transandantal Felsefesi, hatalı yaklaşımların ve sahte sorunların felsefedeki egemenliği nedeniyle çıkmaz sokaklara sürüklenmiş olan metafiziği, yanlış anlamalardan temizleyerek sağlam bir zemine oturtmayı amaçlamaktaydı. Ayrıca Frege, yargı, kavram ve nesne terimlerine farklı anlamlar yüklerken, yargının kavrama öncelikli olması ve tümcede nesnenin yerini tutan sözcük ya da sözcüklerin gönderimini tek başına değil, ancak tümce bağlamında ele alınması görüşünde, nesnenin ve kavramın mekânının yargı olduğunu ve yargının kavrama öncelikli olduğunu kabul eden Kant'ı büyük ölçüde izlemektedir.

Frege, Kant'ın Transandantal Felsefesinden derinden etkilenmiş bir filozof olmakla birlikte, bir açıdan *Aritmetiğin Temelleri,* Kant'ın büyük otoritesiyle bir hesaplaşma olarak da görülebilir. Frege, *AT*'de aritmetiğin temellerinin Kant'm düşündüğünün aksine sentetik a priori değil, analitik a priori olduğunu, dolayısıyla aritmetiğin Kant'm düşündüğünün aksine a priori görüye dayanmadığını, sadece kavramsal olandan çıkabildiğini ve dolayısıyla da sadece mantığa dayandığını ortaya koyduğunu belirttikten sonra şunları yazıyor: "Yalnızca şükran dolu bir hayranlıkla bakabileceğimiz bir deha ile küçük tartışmalara kalkışmak suçlanmasıyla karşılaşmak istemem; dolayısıyla, bazı uyuşmazlık noktaları dışında pek çok konudaki görüş birliğimize dikkat çekmekle yükümlü hissediyorum kendimi. Sadece bizim meselemizle doğrudan bağlantılı olan noktalara temas etmek için kabul ediyorum ki, Kant, analitik ve sentetik yargıları birbirinden ayırmakla çok büyük bir hizmette bulunmuştur. Geometrinin doğruluklarını sentetik ve a priori olarak adlandırırken, Kant onların gerçek doğalarını ortaya koymuştur. Ve bunun tekrar edilmesi halen önemlidir, çünkü bugün bile yeterince kabul görmemektedir. Eğer Kant aritmetik konusunda yanılmışsa, benim kanıma göre bu, onun yapıtının değerinde ciddi bir eksiklik meydana getirmez. Kant için önemli olan sentetik a priori yargıların varlığıdır; bunlar sadece geometride mi vardır, yoksa aritmetikte de mi vardır meselesi daha az önemlidir."[30]

30 *AT,* § 89.

Öyleyse önce Kant'ın metafiziği sağlam bir zemine oturtmaktan ne anladığının ve yargı, kavram, nesne (*Objekt*) anlayışının ve matematiğin sentetik a priori olmasının anlamının kısaca ele alınması, Frege'nin (aynı zamanda Wittgenstein'm da) düşünsel temellerinin daha iyi anlaşılmasını sağlayacaktır.

Kant'ın Metafizik ve Nesne Anlayışı

Kant'm felsefi düşünme etkinliği içinde geçen yaşamının en önemli amaçlarından biri metafiziğin sağlam bir bilim olarak kurulmasıdır. Bu o kadar önemli bir tasarıdır ki, Kant bu tasarıyla, kendinden önceki tüm metafiziği geçersiz bırakacağı gibi, kendisinden sonra da artık nasıl metafizik yapılabileceğinin bir modelini ortaya koyduğunu, dahası bu zeminin en sağlam taşlarını döşediğini düşünmektedir. Kant'a göre geleneksel metafiziğin bitmez tükenmez tartışmalarında ana malzemeyi oluşturan idealar, formlar, tözler (ruh, evren, madde, uzay, zaman, Tanrı gibi) hatalı bir yaklaşımla, onlara bağımsız bir gerçeklik atfedilerek, yani tözleştirilmiş olarak ele alınmışlar, bu yaklaşım da metafiziği çıkmaz yollara sürüklemiş ve böylece esasa ait olanı boş laftan, gerçek ve nesnel olanı "hayali görünüş"ten [*Schein*] ayırt edecek bir ölçü ortaya konamamıştır. İşte Kant'ın "sonu gelmeyen çatışmaların olup bittiği savaş alanı"[31] adını verdiği metafiziğin asıl sorunu, Kant'a göre, insan aklının, her türlü deneyimin olanağını aşan idealar ve ilkelerle yola çıktığında, başvurabileceği bir denektaşının, bir ölçü noktasının bulunmayışıdır. Oysa aklın, bu idealar ve ilkelerle bağlantısının ne olduğu iyice araştırılıp ortaya serilmeden, metafiziğin bir adım bile atması Kant'a göre olanaksızdır.

Eski Yunan felsefesinden Kant'a gelinceye kadarki geleneksel metafizik anlayışını çok genel olarak ifade edelim: Metafizik, duyusal algıların konusu olan nesneleri, yani hissedilir dünyayı ele almaz; metafizik, algılar üzerinden elde edilen bir bilgi değildir; metafizik, duyulara ve algıya bağımlı bir bilgi olmadığı

31 Kant, I. (1998) *Critique of Pure Reason*, çev. P. Guyer ve A.W. Wood, Cambridge: Cambridge University Press, A-viii.

için zamana tâbi olanın bilgisi değildir; metafizik, zamana tâbi olmayanı, yani değişmeyeni, bâkî kalanı, düşünülür veya akledilir dünyayı nesne edinir ve onun bilgisine (*episteme*) yönelir, bu yolla değişime tâbi olanların temelindeki ilkelere de, ilkilkeleri (*arche*) görme aracılığıyla yönelmiş olur. Algıların aşılarak, zamana tâbi olmayan nesnelerin "görülme", temaşa edilme (*contemplatio*) faaliyeti "aracısız görme"dir (*intuitus*). Bu "aracısız görme" insanda varolan bir olanaktır ve eğitimle, düşünme terbiyesiyle gerçekleşebilir. Bu eğitim ve düşünme faaliyetinin Platon'daki adı diyalektiktir. Diyalektik, duyuları aşan nesnelerin, "görülebilme", ayırt edilebilme ve bunların sağlam bilgisinin (*episteme*) edinilmesini sağlayan düşünme tarzı ve yöntemidir.

Saf Aklın Eleştirisi'nin (*SAE*) 1781'de yayımlanmasıyla, geleneksel metafizik anlayışı tüm yapılarıyla çözümlenmiş, sökülmüş ve eleştirilmiştir. Kant, *SAE*'nin yayımlanmasından dokuz yıl önce Marcus Herz'e yazdığı 21 Şubat 1772 tarihli mektupta[32] düşünülür dünyanın bilgisiyle ilgili kuşkularını ifade ederek, "Şimdiye kadar metafiziğin karanlıkta kalmasının anahtarını oluşturan" çok temel bir noktayı atlamış olduğunu belirttikten sonra, kendisine şu soruyu sorduğunu yazıyor: "Şu, bizim içimizde 'temsil' [*Vorstellung*] adını verdiğimiz şeyle nesnenin bağlantısının zemini nedir?" Kant'a göre bizim içimizde, 'temsil' adını verdiğimiz şey, nesneye göre etkin ise, yani nesnenin kendisi temsil etme faaliyeti yoluyla ve onun sonucunda kurulmuşsa, bu temsillerin nesneleriyle olan uygunlukları anlaşılabilir birşey olur. Mektubun devamında, 1770'te yayımlanan *Hissedilir Dünya ile Düşünülür Dünyanın Form ve İlkeleri*[33] tarihli yazısında "duyusal temsillerin, şeyleri tezahür ettikleri haliyle [yani hissetme yetisinin a priori formları olan uzay ve zaman formlarına tâbi olarak] bize verdiğini, düşünülür temsillerin ise şeyleri oldukları haliyle verdiği" ifadesinin yer aldığını; ama

32 Kant, I. (1967) *Philosophical Correspondence*, çev. Arnulf Zweig, Chicago: The University of Chicago Press.

33 Kant, I. (1992b) "Inaugural Dissertation", *Theoretical Philosophy 1755-1770* içinde, çev. D. Walford ve R. Meerbote. Cambridge: Cambridge University Press [(1991) De Mundi Sensibilis atque Intelligibilis Forma et Principiis (Von der Form der Sinnen und Verstandeswelt und ihren Gründen), *Schriften zur Metaphysik und Logik*. Band V. içinde, Frankfurt: Suhrkamp Taschenbuch Verlag].

burada, bu düşünülür şeylerin bize ne aracılığıyla verildiği sorusunun yanıtsız kaldığını yazmaktadır. "Ama, eğer bu şeyler bizi etkileme yoluyla değilse, bunlar bize ne şekilde verilmiş olabilir?" (Kant: 1967, 72). Yani, 1770 tarihli yazıda, hissetmenin, a priori formlar olan uzay ve zaman formları aracılığıyla mümkün olduğu görüşüne ulaşmıştı ve hissetmeye verilenlerin, kendinde-şeylerin hissetme yetisinin formları aracılığıyla temsillerinin edinildiğini tıpkı *SAE*'de olduğu haliyle ifade etmiş bulunuyordu. Ancak düşünülür dünya söz konusu olduğunda, 1770 tarihli yazıda daha sonra geleneksel metafizik anlayışı olarak eleştireceği yaklaşıma henüz bağlıydı: "Hissetmeyle bağlantılı olarak düşünülenler, şeylerin tezahür ettikleri halleriyle temsilleriyken, düşünülür olanların, şeylerin kendi oldukları halleriyle temsili olduğu bellidir." (Kant: 1992b, Bölüm II, § 4, 384). Ancak şimdi, söz konusu mektupta sorulan soru, düşünülür şeylerin nasıl olup da ve ne aracılığıyla akla verilebileceğidir. İşte bu soruya verilecek yanıt, Kant'ı, kavrama yetisinin saf kavramları anlayışına, yani kategoriler öğretisine ve aklın saf kavramları, yani transandantal idealar anlayışına götürecektir. Nitekim, mektubun ilerleyen bölümünde, o olmadan metafiziğin doğasını ve sınırlarını belirleyemeyiz dediği, sadece düşünülür olanın bilgisinin kaynaklarını araştırırken, transandantal düşünceyi belirli sayıda kategori üzerinde temellendirdiğini yazacaktır (Kant: 1967, 73).

Kant'ın transandantal felsefesi açısından geleneksel metafiziğin ideaları, formları ve tözleri "aracısız görme" (*intuitus*) ile kavranabilecek aşkın (*transcendent*) şeyler değildir; bunlar ancak deneyimin olanağını sağlayan ve zemini saf akılda bulunan formlar ve idealardır. Başka bir deyişle, bunlar, geleneksel metafizikte olduğu gibi *intuitus*'un nesnesi olanlar değil, aksine deneyime zemin oluşturan ve ancak böylelikle deneyimi mümkün kılan transandantal öğeler, yani deneyimin a priori zemini olan öğelerdir. Yani transandantal olanlar, duyusal olmayan dışsal bir kaynaktan akla, "aracısız bir görme"ye verilmezler; transandantal olanlar, duyusallık aracılığıyla verilenlerin görüde temsil edilmesini ve kategoriler aracılığıyla da idrak edilerek nesne olarak tesis edilmesi yoluyla bilinebilmesini sağlarlar; bu açıdan

nesnenin bilgisi, nesnenin idrak ve tesis edilmesidir.[34] Öyleyse metafiziğin asıl yapması gereken ve aslında onun esasını oluşturan araştırma aklın bizzat kendisiyle ilgilenmesidir; metafiziğin kökünü de bu inceleme oluşturacaktır.[35] İnsan ruhunun yetilerine yönelen bir araştırma, aklın bizzat kendisiyle neleri yapabileceğini ve onun, deneyime nerede ihtiyaç hissedeceğini belirleyecektir.[36] Öyleyse aklın yetilerini ve onun bilgi ortaya koymadaki işlevlerini araştırmadan yola çıkan her çaba, metafiziğin "sağlam bir bilim olmasını"[37] olanaksız kılacaktır. Yani Kant'm metafiziği bir bilim haline getirme çabasının yolu, insan aklmın doğasına yönelik bir araştırma olacaktır. Bu araştırma sonucunda, *Transandantal Felsefe*, kendisinden sonra ortaya çıkacak felsefe ve metafizik anlayışlarının zeminini oluşturduğu gibi metafiziği yıkma çabalarının da bir şekilde hareket noktasını oluşturacaktır.

SAE'de ortaya konan bu araştırmada nesne, yargı, uzay ve zaman kavramları daha önceki felsefe anlayışlarından çok farklı anlamlar kazanırlar. Kant, *SAE*'nin ikinci basımına yazdığı önsözde, Kopernik'in kendi sisteminde Dünya ile Güneş'in yerlerini değiştirmesine benzer bir şekilde, daha önceki nesne anlayışını tersine çevirerek kendi "Kopernik devrimi"ni gerçekleştirdiğini belirtmektedir: "Şimdiye kadar bilgimizin nesnesine uyması gerektiği kabul edilmişti; ancak nesnelerle ilgili şeyleri kavramlar aracılığıyla a priori ortaya koyarak bilgimizi genişletme girişimi başarısızlığa uğramıştır. Bu durumda, nesnelerin bilgimize uyması gerektiğini kabul ederek, metafiziğin görevinde daha iyi bir sonuç alıp alamayacağımızı denememiz gerekir."[38]

Kant'ta kendinde nesne yoktur, yani hissetme ve kavramaya öncelikli nesneden söz edilemez. Bu, hem hissetme yetisi

34 Kant, transandantal öğelerin ve onlarla bağlantılı transandantal yetilerin bilgisini 'transandantal bilgi' olarak nitelendiriyor: "Transandantal bilgiyi, nesnelerin kendileriyle değil, a priori olanaklı olduğu ölçüde nesneyi bilme tarzımızla ilgili olan bilgi olarak adlandırıyorum. Böyle bir kavramlar sistemi *Transandantal Felsefe* olarak adlandırılabilir" *SAE* (1998) A-12 / B-25.

35 Kant, Metafiziğin Hayalleriyle Aydınlatılan Bir Medyumun Hayalleri başlıklı yazısında metafiziği, "insan aklının sınırlarının bilimi" olarak tanımlamaktadır.

36 Kant, I. *SAE* (1998). A-xiv.

37 A.g.y.

38 A.g.y, B xvi.

aracılığıyla edinilerek, yargıda tesis edilen nesneler için; hem de akıl nesneleri için geçerlidir. Geleneksel metafiziğin akıl nesneleri olarak düşündüğü nesneler, Kant'ta, tecrübe söz konusu olduğunda tecrübenin kurucu a priori kavramları, yani kategoriler olarak; tecrübeye aşkın olduğunda da, yani tecrübeye temas edemediğinde de aklın saf kavramları, yani transandantal idealar olarak düşünülmektedir.

Kant'a göre, duyusallığm (hissetme yetisinin) formları olan uzay ve zaman, deneyimden hissetme yoluyla edinilemezler. Uzay ve zamanın, şeylerin kendilerine ait özellikler olmayıp, ruhun hissetme yetisinin saf a priori formları olarak düşünülmesi, şeylerin, kendi oldukları halleriyle, yani kendinde-şey olarak değil, ancak zihnimizin [*Gemüt*] kendi yapısına uygun olarak deneyimleri edinilebilen şeyler oldukları anlamına gelir.

Kantçı felsefede doğrudan deneyimine hiçbir zaman sahip olamayacağımız kendinde-şeyin [*Ding an sich*] ancak temsilleri [*Vorstellung*] edinilebilir; ve bu temsiller ancak zihnin kuruluşuna uygun olarak bilgi nesnesi [*Objekt*] haline gelebilirler. Yani, kendi olduğu haliyle olan kendinde-şey'dir ve kendinde-şey nesne değildir; çünkü kendinde-şey, ancak insanın ruhunun yetilerine uygun olarak kurulacak nesnenin sadece malzemesini sağlar; nesnenin formu ise, nesnenin kuruluşunun a priori zemini olan uzay ve zaman saf görüleri ve kategorilerdir. Kant'a göre nesnenin kurulmasını sağlayan üç asıl yeti vardır: Duyusallık, hayalgücü ve düşünme. (Kant, bu transandantal yetilere deneyimsel (a posteriori) bilgilerin ve deneyimsel olmayan (mantık, matematik ve nedensellik ilkesi gibi doğa bilimlerinin kurucu ilkesi olan) a priori bilgilerin nasıl olanaklı olduğunun çözümlenmesi yoluyla ulaşmıştır.) Duyusallığm (hissetme yetisi) a priori formları olan uzay ve zaman aracılığıyla kendinde-şeyin ancak temsilleri edinilebilir. Hayalgücü, duyusallıkla düşünme yetileri arasındaki bağlantıyı kuran yetidir. Nesneyi kuran bilme [*Erkenntniss* - idrak] etkinliği, şeylerin kendilerinin bilinmesi değil, şeylerin temsilleri üzerinden yapılan bir düşünme etkinliğidir. Çünkü kendi başına herhangi bir forma sahip olduklarından söz edemeyeceğimiz kendinde-şeyler, insanın sahip olduğu a priori uzay ve zaman formlarına uygun olarak temsil

edilebilirler. Duyusallık yoluyla edinilen temsiller, hayalgücü aracılığıyla, düşünme yetisinin devreye girmesiyle birbirlerine bağlanıp, birleştirilirler. (Kant düşünme yetisini, kavrama yetisi [*Verstand*], yargıgücü [*Urteilskraft*] ve akıl [*Vernunft*] olarak ayırmaktadır. Düşünme yetisinin kavrama yetisi olarak adlandırılan yanı açısından yargı, deneyimin tekil nesnesini, başka bir deyişle uzay ve zaman koşullarına ve kategorilere tâbi olarak tekilleştirilmiş nesneyi kurmaya yönelik bir düşünce fiilidir; yargıgücü, tikeli tümel altında toplar, yani (kavrama yetisi açısından) tikeli tümelin altına getirmenin kurallarını belirler; düşünme yetisinin akıl olarak adlandırılan yanı ise yargıgücünün yargılarının birbirlerine bağlanmasının transandantal zemini olan bütünlüğü [*Totalität*] sağlamak yoluyla onlardan mantıksal sonuçlar çıkarır, yani tikelin tümelden çıkarsanması faaliyetini yapar.) Kant'a göre görü, tekil bir temsildir, kavram ise genel bir temsildir. Başka bir deyişle kavram, farklı temsillerde ortak olan temsildir. Farklı temsillerde ortak olanın bir bilinçte birleştirilmesi ise yargı fiilidir. Bu birleştirme fiili ile nesne [*Objekt*] ve nesnenin görüdeki karşılığı [*Gegenstand*] kurulmuş olmaktadır. Yani yargıya öncelikli olarak ne nesne ne de kavram vardır. Bir düşünme fiili olan yargı yoluyla, nesne, kavram ile birlikte yargıda kurulmuş olmaktadır. Kant'a göre nesnenin mekânı yargıdır ve kavram, nesnenin bir yanından kavranmasıdır. (Örneğin, tekil bir nesne, diyelim elimizde tuttuğumuz taş, "cisim", "sertlik", "ağırlık" vb. deneysel kavramlarla olduğu kadar, birlik, gerçeklik, bağıntılı olmak, varolmak gibi deneyimin kurucusu olan a priori kavramlarla da (kategorilerle) çeşitli yönlerinden kavranmış bir nesnedir.) Kant açısından yargı, bir düşünme fiilidir ve nesnel bir içeriği vardır (nesne).[39] Kant'ta yargı, yargıya öncelikli öğelerin biraraya getirilmesiyle kurulmuş değildir; çünkü kendinde-nesneden söz edemeyeceğimize ve nesnenin ancak yargı fiiliyle kurulması olanaklı olduğuna

39 Kant, 'yargı' ve 'önerme' arasındaki ayrımı, birincinin *problematik* (yani doğruluk bildirmeyen), ikincisinin ise *asertorik* (yani doğruluk bildiren) olduğu üzerinden yapmaktadır. (Bkz. *Lectures on Logic*. çev. M. Young Cambridge Un. Pr. 1992. s. 374 ve 605). Kavrama yetisi açısından yargı, nesnenin kuruluşunu sağlayan fiildir; yargıgücü ise tikeli, tümel altına getirerek, akıl faaliyetine esas olan çıkarımlara malzemeyi sağlamaktadır.

göre, ayrıca kavramın da ancak nesne yönünden bir anlamı ve işlevi olduğuna göre, yargı fiili hem kavrama, hem de nesneye önceliklidir. Ama yargının öğelerinin (yani özne ve yüklemin, başka bir deyişle nesne ve kavramın) sentetik bir birlik olarak biraraya getirilmesi ancak onlara öncelikli bir birlikle mümkündür. Bu birliğin zemini ise algılayanın kendisini idrak etmesinin (yani, tamalgının [*Apperzeption*]) transandantal birliğidir; başka bir deyişle, kendi temsil ve idrak etkinliğini idrak etmek yoluyla kendinin bilincine varan "Saf Ben"in birliğini kuran transandantal *Apperzeption* fiilidir. Yani, kendinin bilinci (Ben'in kuruluşu) yargıya mantıksal olarak önceliklidir ve yargının koşuludur.

Nesnenin, sentetik birlik veren transandantal bir yargı fiiliyle (transandantal *Apperzeption*) kurulması ve yargı fiilinin, ona öncelikli bir birlik olan "Saf Ben"in kuruluşuyla olanaklı olması fikri, Kant'tan sonraki dönemde nesnenin mekânı, öznel olan düşünme süreci ve nesnel olan düşünce içeriği ayrımı gibi sorunlar, Bolzano, Husserl gibi filozoflarda da, sonraki bölümde göreceğimiz gibi Frege'nin düşüncesinde de temel bir rol oynamıştır.

Analitik ve Sentetik Yargılar

Frege'nin, yukarıda alıntıladığımız Kant hakkındaki sözlerinde de belirtildiği gibi, Kant'ın yargılar arasında yaptığı ayrım ve özellikle sentetik a priori yargıların olanağı meselesi kendinden sonraki felsefi çalışmalar üzerinde çok etkili olmuş bir diğer husus. Kant, yargıları analitik ve sentetik yargılar olarak ayırırken matematiğin yargılarını analitik yargılar kısmına değil, sentetik yargılar kısmına yerleştiriyordu; ancak matematiğin yargıları deneysel veya deney kökenli olmadıklarından, bunlar sentetik a priori yargılardır.

Kant, genel mantık ile transandantal mantık arasında ayrım yaparken, genel mantığın kavrama yetisinin bilgilerini içeriğinden soyutladığını, kavrama yetisinin kurulumunu yaptığı nesneler arasındaki ayrımı da soyutladığını ve sadece düşünmenin

formuna baktığını belirtir.[40] Öte yandan transandantal mantık, kavrama yetisinin ve aklm yasaları ile, ama ancak bunlar nesnelerle a priori bağlantı içinde oldukları haliyle ilgilidir.[41] Yani transandantal mantık nesnenin kendisiyle değil, ama nesnenin kurulumunun a priori öğelerini araştırmaktadır; böylelikle de genel mantığın yaptığı gibi nesnesiyle bağını kopartarak sadece forma ilişkin özellikleri düşünmenin konusu yapmamakta, düşünmenin mümkün olmasını sağlayan asli öğelere, transandantal formlara ve kavramlara yönelmekte, onları açığa çıkarmaktadır.

Bu bağlamda matematikle ilgili genel soru şudur: Sadece genel mantıktan hareketle matematik yapmak olanaklı mıdır? *Prolegomena*'da, "Tüm analitik yargıların ortak ilkesinin çelişme ilkesi olduğu"[42] ifade ediliyor. Kant, *SAE*'de de genel mantık ile analitik ve sentetik yargılar arasındaki bağlantıyı şöyle ifade ediyor: "Tüm analitik bilgilerin tümel ve tümüyle yeterli ilkesi çelişme ilkesidir; ama bu ilke bir doğruluk ölçütü olarak analitik bilgilerin ötesine geçmez,... ihlal edilemez olan çelişme ilkesine aykırı bir fiilde bulunmamaya özen göstermekle birlikte, bu ilkeden sentetik bilgilerin doğruluğuna ilişkin bir katkı da beklememek gerekir."[43] Deneyimin a posteriori nesneleri kadar, matematiğinki gibi a priori nesnelerin de esasen sentetik yargılarla tesis edilebileceğini belirttikten sonra (B-14), B-75'te "Bizim doğamız öyledir ki, bizde görü sadece duyusaldır, yani sadece nesneler tarafından etki alma halini içerir... Hissetme yetisi olmadan hiçbir nesne bize verilemez ve kavrama yetisi olmadan hiçbiri düşünülemez. İçeriği olmayan düşünceler boş, kavramsız görüler kördür. Öyleyse, kavramları duyusal kılmak nasıl gerekliyse, görüleri de kavranabilir kılmak o ölçüde gereklidir. Ayrıca bu iki yeti ya da kudret, birbirlerinin işlevini üstlenemezler... Bilgi ancak onların birleşmesi sayesinde ortaya çıkar" diye ekliyor ki, bu, söz konusu görüler a priori olduğu zaman matematiksel bilgi için de geçerlidir. B-85'teki "...hiç kimse sadece

40 A.g.y. A-54 / B-78.
41 A.g.y. A-57 / B-81.
42 *Prolegomena*. Hacettepe Ün. Yay. Ankara 1983, çev: I. Kuçuradi, Y. Örnek. s. 15/25.
43 A.g.y. B-191.

[genel] mantık aracılığıyla nesneler hakkında yargıda bulunmaya cüret edemez ..." ve B-64'teki "... sadece kavramlardan sentetik bilgi çıkmaz, yalnızca analitik bilgiler çıkar" ifadeleri de, zaten, sadece genel mantığın analitik yargıları aracılığıyla matematiğin yapılamayacağını, matematiğin nesnelerinin bu yolla tesis edilemeyeceğini açıkça ortaya koymaktadır.

Geometrinin yargılarının sadece mantıkta temellenmediği, bu yargıların ancak uzaysal görünün devreye girmesiyle bilgisel içeriğe sahip olabilecekleri fikri, Kant'ın 1768 tarihli "Uzayda Yönler Arasındaki Farklılığın Nihai Dayanağı Hakkında"[44] makalesinden çıkan (sağ el-sol el uslamlamasından çıkan) sonuçtur.[45] Bu sonuçla, geometri ile ilgili tüm sağlam bilgilerin sadece kavramsal olandan çıkmadığı, bu durumda da geometrinin sadece mantıkla temellenen bir bilim değil, ama aynı zamanda görünün de devreye girmesi gerektiği bir bilim olduğu ortaya çıkıyor. Bununla birlikte, Kant açısından açıktır ki, geometri deneysel bir bilim değildir; kesin kanıtlamalı bir bilimdir, geometrinin ilişkileri zorunludur ve tam genelliğe (evrenselliğe) sahiptir.[46] Bu durumda, devreye girmesi gerekli görülen görünün, deneysel (a posteriori) bir görü de olmaması gerekir. Deney kökenli olmayan görü, a priori görüdür; ve a priori görü tek şekilde olanaklıdır: zihnin, düşünme yetisi dışında (kavram ve mantıkla ilgili olan yeti dışında), ondan farklı, kendi a priori formları olan hissetme yetisinin (duyusallığın) olmasıyla.[47] Görü, kavramdan, ona indirgenemeyecek şekilde farklı olduğu için, düşünme yetisine değil, hissetme yetisine aittir; a priori

44 I. Kant. *Concerning the Ultimate Ground of the Differentiation of Directions in Space* Theoretical Philosophy 1755-1770. Çev. D. Walford ve R. Meerbote. Cambridge Un. Pr 1992. [*Von dem ersten Grunde des Unterschiedes der Gegenden im Raume*, I. Kant. Vorkritische Schriften bis 1768. Bd II. Suhrkamp 1991]

45 Bu uslamlamanın ayrıntısı için bkz. Bülent Gözkân, *Kant'ın Eleştiri-Öncesi Döneminden Eleştiri Dönemine Geçişindeki Ahahtar Yazı: Uzayda Yönler Arasındaki Farklılığın Nihai Dayanağı Hakkında*. Felsefe Tartışmaları, 2006. s. 43-55.

46 Krş. (Kant: 1998, B 4, B 17, B 40-41).

47 Leibniz'de (ve onu izleyen Wolff'da) duyusallık ve düşünme arasında, sadece birincinin bulanık olması ve ikincinin açık ve seçik olması üzerinden bir fark vardır. Kant'ı, duyusallık ve düşünme arasında kendinden önce yapılmış olan ayrımlardan ayırt eden en önemli husus, Transandantal Felsefede sadece düşünmenin değil, duyusallığın da a priori formları olmasıdır.

görü ise, ancak, (dışsal duyu söz konusu olduğunda) uzayın, hissetme yetisinin a priori formu, yani tüm duyusallığı öncelikli olarak olanaklı kılan form olmasıyla mümkündür. Böylelikle, geometrinin sadece çelişmezlik ilkesine dayanan, yani sadece mantıkta temellenen bir bilim olmadığı,[48] görüye de dayandığı, dolayısıyla sentetik olduğu, ancak geometrinin kesin ve zorunlu bilgiler içeren bir bilim olduğu dikkate alındığında, bu görünün a posteriori değil, a priori olması gerektiği ve sonuç olarak geometrinin yargılarının sentetik a priori yargılar olması gerektiği sonucu çıkmaktadır.[49]

Kant, benzer bir akıl yürütmeyi aritmetiğe de taşır (her ne kadar elinde 'sağ el-sol el uslamlaması gibi kuvvetli bir uslamlama bulunmasa da) ve aritmetiğin de sadece mantıkta temellenmediğine, aritmetiğin nesnelerinin tesis edilebilmesinin a priori zaman görüsü temelinde olanaklı olduğuna işaret eder. Aritmetiğin yargıları da, tıpkı geometrininkiler gibi sentetik a priori yargılardır. Sonuç olarak, matematiğin nesneleri a priori olmalarına karşın akla aracısız verilen nesneler değil, hissetme yetisinin a priori formları zemininde inşa edilen nesnelerdir. Dolayısıyla Kant açısından matematiğin ilkeleri, bağımsız bir nihai dayanak değildir; matematiğin ilkeleri, aksiyomları sentetik a priori yargılardır. Ama bu ilkeler transandantal ilkeler değillerdir. Matematiğin ilkeleri, onların zeminini oluşturan transandantal ilkelere[50] bağımlı olarak onlar üzerinde yükselirler.

48 Matematiğin sadece çelişmezlik ilkesine dayanmadığı hususu için bkz. (Kant: 1998, B 14-B 17 / 143 - 145).

49 Geometrinin sadece mantıkta temellenmemesi demek, geometrik bir kanıtlamada a priori görüsel bir içeriğin de kanıtlama sürecinde öncüller arasında yer alması demektir. A priori görüsel içerik de geometri söz konusu olduğunda (aynı şey aritmetik için de geçerlidir) inşa etme anlamına gelir. Ama bu inşa öyledir ki, tekil bir inşa (diyelim bir üçgen), aslında tümelin temsilidir. Ve bu inşa sadece kavramsal değildir, a priori görüde de bir karşılığı vardır. Bu konuda daha fazlası bu sunuşun kapsamının ötesine geçiyor. Konuyla ilgili olarak bkz.: *SAE*, A-713/B-741 – A- 725/B- 753; *Prolegomena* § 6 - § 13; ve bu konuda iyi bir inceleme için Michael Friedman, *Kant and The Exact Science*. Harvard Un. Pr. 1994.

50 *SAE*'si çerçevesinde, deneyimin a posteriori nesnelerinin kurulumunda (tesis edilmesinde) olduğu gibi, matematiğin a priori nesnelerinin inşasında da son dayanak olarak transandantal ilkeler, kavrama yetisinin ilkeleridir. Bunlar: 1) Görünün aksiyomları; 2) Algının beklentileri; 3) Deneyimin analojileri; 4) Genelde deneyle ilgili düşünmenin postulatlarıdır (A-161/B-200).

Demek ki, matematiğin ilkeleri ve nesneleri sadece mantıktan çıkmadığı gibi, yalnızca genel mantık zemininde ve düzeyinde yakalanamazlar ve teşhis edilemezler; bu, ancak transandantal mantık aracılığıyla mümkündür.

Frege'de Düşünce ve Yargı

Frege, yargının kavrama öncelikli olduğu görüşüne de, nesnenin yargıdan bağımsız olmadığı görüşüne de bağlıdır. (Burada, "nesne" ile, fiziksel, deneyim kökenli (empirik), kendiliğinde nesnenin anlaşılmadığına; yargı aracılığıyla kavramla bağlantı içine giren, onun 'altına düşen' nesnenin, bu bağlantıya girebilmesi için yargı ve kavramla aynı düzlemde bulunması gerektiğine, yani nesnenin "mekânının" tıpkı yargı ve kavramda olduğu gibi zihin mekânı olduğuna daha önce Kant kısmında atıfta bulunduğumuz gibi tekrar işaret edelim. Bununla birlikte, Frege'nin, 'nesnenin kuruluşu' hakkmdaki Kantçı anlayışı tekrar etmediğine de işaret etmek gerekir. Frege'nin nesne ontolojisi, tümcede nesnenin yerine duran adm veya özel adm tümce bağlamındaki işlevinin çözümlenmesi üzerinden, yani dilden hareketle veya dilin mantıksal yapısının çözümlenmesinden hareketle yapılmaktadır). "Yargılardan ve içeriklerinden hareket ettim, kavramlardan değil... Kavramların biçimlenmesini sadece yargılardan hareketle mümkün saydım";[51] arkadaşı Marty'ye gönderdiği 29 Ağustos 1882 tarihli mektubunda da şunları yazıyor: "Kavramların biçimlenmesinin yargıya öncelikli olduğuna inanmıyorum, çünkü bu, kavramların bağımsız varlığını önvarsaymayı gerektirirdi; düşünüyorum ki, bir kavram, yargının olanaklı içeriğini kısımlara ayırarak ortaya çıkmaktadır."[52]

Frege'nin yargı, yargı içeriği, düşünce ve doğruluk hakkmdaki görüşlerini topluca değerlendirmek için yaşamının sonla-

51 Frege, *Posthumous Writings*. Çev. P. Long ve R. White, s. 16, Blackwell 1979 (*Nachgelassene Schriften, [NS]* s. 17).

52 Gottlob Frege, *Philosophical and Mathematical Correspondence*. Çev. Hans Kaal, The Un. Of Chicago Pres. 1980, s. 101. [Frege, kavramların, yargı içeriğinin kısımlara ayrılmasıyla ortaya çıktığın *Aritmetiğin Temelleri* § 64'te de söz ediyor]

rmda kaleme aldığı "Düşünceler" makalesine bakmamız gerekir.[53] Frege bu yazıda iç dünya ve dış dünya ayrımı yapmakta; iç dünyanın malzemesinin duygular, düşünme süreçleri, öznel tasarımlar [*Vorstellung*][54] olduğunu, dış dünyanın malzemesinin ise uzay ve zaman içindeki şeyler olduğunu belirtmektedir. Ancak dış dünyadaki şeylerle ilgili tasarımlar, öznel tasarımlardır; bunlar, tasarımların sahibi olana bağlı olarak değişkenlik gösterirler, yani nesnel düşünceler değillerdir. Oysa *AT*'de de işaret ettiği gibi Pythagoras teoremi, onu dile getiren hiç kimse olmasa da yine doğru olarak kalacaktır. Dolayısıyla, uzay ve zamandaki şeyler ve tek tek kişilerin öznel tasarımlarının dışında bir üçüncü âlem daha vardır. Frege buna 'düşünceler' âlemi adını vermektedir. Düşünceler, onları kavrayandan bağımsız olarak 'var'dırlar. Ancak burada 'var' sözcüğüne özellikle dikkat etmek gerekiyor. Çünkü Frege'nin ısrarla vurguladığı gibi, düşünceler ya da nesne olarak kavranılan sayılar, uzay ve zamanda yer alan fiili gerçek [*Wirklich*] olan şeyler olmamalarına karşın 'nesneldirler'.[55] Frege'ye göre yargıda bulunduğumuzda düşünceleri üretmeyiz, nesnel düşünceleri sadece kavrarız (yakalarız). Tasarımların sahibi ve taşıyıcısı olmakla birlikte nesnel düşüncelerin taşıyıcısı ve sahibi değiliz.

Frege, "Düşünceler"de, "Burada 'kavrama, yakalama' dilegetirişi, 'bilinç içeriği' dilegetirişi kadar eğretilemelidir. Dilin doğası bundan başkasına izin vermiyor. Elimde tuttuğum şeye, kesinlikle elimin içeriği olarak bakılabilir; ama o, farklı bir anlamda elimin içeriğidir ve elime, elimi meydana getiren kemiklerin, kasların ve onların bağlantılarından çok daha yabancı birşeydir" diye yazıyor.[56] Frege üzerine yapılan iyi incelemelerden birinin yazarı olan Hans Sluga, Frege'nin bu sözlerini şöyle

53 Gottlob Frege. *Collected Papers on Mathematics, Logic, and Philosophy*, s. 351-372. Basic Blackwell, Oxford 1984.

54 Daha önce ifade ettiğimiz gibi Frege, *Vorstellung* terimiyle tümüyle öznel düşünce süreçlerini kastetmektedir ve bu kullanımın Kantçı *Vorsellung* (temsil) teriminin anlamından ayırt edilmesi gerekir.

55 *AT*, § 26.

56 Gottlob Frege. *Collected Papers On Mathematics, Logic, And Philosophy*, s. 368. Basic Blackwell, Oxford 1984.

yorumluyor: "Frege'ye göre düşünceler, kuşun elde olması gibi zihinde değildir, düşünceler kemik ve kasın elde olması gibi zihinde yer almaktadır. Nesnel olan zihne yabancı ya da dışsal olan birşey değildir, ama zihnin oluşturucusudur. Onun en özellikli sahiplenimidir."[57] Benzer bir yaklaşım daha önce *AT* § 105'te "aritmetiğin kendine has nesnesi [*der eigenlichte Gegenstand*] Akıldır" biçiminde ifade edilmiştir. Frege, nesnel düşüncelerin ve onların mekânının ne olduğuna değinmiyor, sadece ne olmadıklarını ifade ediyor: Nesnel düşünce, bir insanın öznel tasarımı değildir, dolayısıyla insanların düşünme süreçlerine, psikolojik hallerine bağımlı değildir.

Frege, "Düşünceler"de, düşünce, yargı ve bildirim tümcesi ayrımlarını şöyle yapıyor:

1) Düşüncenin kavranışı (yakalanması) - düşünme;

2) Bir düşüncenin doğruluğunun tanınması - yargı;

3) Bu yargının ortaya konuşu - bildirim tümcesi.[58]

Frege, bildirim tümcesinde iki şeyin birbirinden ayırt edilmesi gerektiğini yazıyor: İçerik ve içeriğin bildirimi. İçerik düşüncedir ya da en azından düşünceyi içermektedir. Bunu, "önerme" olarak da adlandırabiliriz. Düşünceyi, onun doğru olduğunu bildirmeden dilegetirmek olanaklıdır [A.g.y. s. 355]. Yargı, düşünceden onun doğruluk-değerine geçiştir [A.g.y. s.164-165]. Bildirim (yani tümce) ise bu yargı içeriğinin dilsel temsilidir. Bu ayrım Frege'nin *Begriffsschrift*'te yaptığı yargı içeriği ve bu içeriğin dilegetirilişi arasındaki farka koşut olan bir ayrımdır.

Frege'ye göre yargı içeriğinin nesnel olduğundan ve mantığın, yargının kavramsal içeriğiyle ve içeriğin mantıksal bağıntılarıyla, yani çıkarımlarla ilgili olması gerektiğinden daha önce söz etmiştik. Çıkarımlar, önermeler (veya düşünce içerikleri) arası bağıntılarla kurulduğuna göre, bir mantıksal çıkarımda önermelerin birbirleriyle bağlantılı olmasını sağlayan şey nedir ve bu bağm kurulduğunu bilmemizi sağlayan şey anlam düzeyi midir?

Tümceler dil düzeyinde, dilsel dilegetirişler olduğu için, farklı yapıdaki tümceler aynı anlama sahip olabilir. Yani aynı-

57 Hans Sluga, *Gottlob Frege*, s.121. Routledge and Kegan Paul, London 1980.

58 Gottlob Frege. *Collected Papers On Mathematics, Logic, And Philosophy* , s. 355-356. Basic Blackwell, Oxford 1984.

lıkları farklılıklarmış gibi gösteren doğal dilin zenginliğidir. Frege *Begriffsschrift*'te "Yunanlılar, Perslileri Plataea'da yendiler" tümcesiyle, "Persliler, Plataea'da Yunanlılara yenildiler" tümcelerinin düşünce içeriklerinin aynı olduğuna ve geliştirdiği ideografinin aynı düşünce içeriğine sahip tümceler arasında bir ayrım gözetmediğini ifade etmektedir.[59] Yani mantıksal çıkarımlar, sadece görünüşteki farklılıklarla iş göremez; onun asıl farklılıklara, asıl benzerliklere ve asıl bağıntılara gereksinimi vardır. Dolayısıyla mantıksal çıkarımın asıl gereksindiği ve dikkate alınması gereken yargı içeriğidir; başka bir deyişle doğal dilin farklı dilegetirişlerinin aynı anlama geldiğini teşhis etmek demek, doğal dile ait bir dilegetirişin sadece mantıksal çıkarımda bir rolü olan içeriğini dikkate almak, geri kalanını elemek anlamına gelir. Yani mantıksal çıkarım zincirinde rol oynama, bir yargı içeriğinin sınırlarını da belirlemektedir. Mantık, dilegetirişlerle değil, yargı içeriği ile ilgili olduğu için Frege'nin ideografisi dilegetirişleri değil, yargı içeriğini simgeleştirmektedir. Bu bakımdan "önermeyi", yargının olanaklı düşünce içeriği olarak tanımlamak mümkündür. Aynı önerme, yani aynı yargı içeriği, dil içinde farklı görünümlere (diyelim "ete kemiğe bürünmelere") sahip tümcelerle ifade edilebilir. Önerme, çıkarım zincirlerinde rol oynayan içerik anlamına gelmektedir; yani tümcede yer alan, ama çıkarım zincirlerinde herhangi bir rol oynamayan öğeler asli içeriğe (düşünce içeriğine), yani önermeye ait sayılamazlar. Frege daha önce atıfta bulunduğumuz üzere bunu *Begriffsschrift*'te ifade ettiği gibi, *AT*'de kavram açısından da ifade ediyor: "Mantık açısından ve kanıtlama keskinliği gözüyle bir kavramdan istenebilecek olan tek şey, onun uygulanmasındaki sınırların keskin olması, yani her bir kavramın bu nesnenin altına düşüp düşmediğine kesin olarak karar verebilmemizi sağlamasıdır."[60] Aslında bu ifade edilenlerin, mantığın üçüncü yasası olarak bilinen "üçüncü halin olmazlığı" yasasının bir uygulaması olduğu da açık.

59 Frege, *Begriffsschrift*, *"From Frege to Gödel "* içinde, s. 12. Van Heijenoort, Harvard Un. Pr. 1967.

60 *Aritmetiğin Temelleri*, § 74

İşte Frege bu anlamda tümüyle dilsel çözümlemeye yönelmiş bir dil felsefecisi değil, örneğin sayı gibi bir mantıksal nesnenin mekânının yargıdan başkası olamayacağı anlayışıyla yargının çözümlemesine girişmiş, Kantçı anlamda bir metafizikçidir. Bu yüzden, Frege'nin hedefinin dilsel bir çözümleme olmadığı, ama mantıksal nesnelerin mekânının belirlenmesi dolayımıyla bu nesnelerin asli doğalarının açıklığa kavuşturulması girişimi olduğunun altı çizilmelidir. Dolayısıyla, Frege'nin dilin mantıksal çözümlemesine girişme amacını dilbilimsel bir çözümleme ya da bir anlam çözümlemesi değil, nesnelerin dilde kendilerini gösterme biçimi üzerinden onların asli doğasına yönelen bir inceleme olarak görmek daha doğru olacaktır.

Yukarıda, Frege'nin, *Begriffsschrift*'te (s. 5) gerekçelendirme gerektiren tüm doğrulukları kanıtlaması yalnızca saf mantıksal açıdan verilebilenler ve deneyim olgularıyla desteklenmesi gerekenler olarak iki sınıfa ayırdığından söz etmiştik. Aritmetik yargılarının bu sınıflardan hangisine ait olduğu sorusuna verilecek yanıt için, sadece, tüm tikelleri aşan düşünme yasalarının kullanıldığı çıkarımlar yardımıyla aritmetikte nereye ulaşılabileceğini görmek gerekmektedir. Bu yüzden Frege, atılması gereken ilk adımın bir dizideki sıralandırma kavramını, mantıksal sonuç kavramına, başka bir deyişle sıra bağıntısını mantıksal sonuç çıkarma bağıntısına indirgemek girişimi olduğunu, bunun yapılmasıyla da sayı kavramına ulaşılacağını yazmaktadır.[61]

Bu indirgeme girişiminde esas olan, duyusal olan her şeyin dışarıda bırakılmasıdır; Frege'yi yeni bir mantık notasyonuna, ama daha önemlisi farklı bir yargı, kavram ve nesne anlayışına yönelten, temelleri saf mantıkla güvenceye alınmış bir bilimin temellerini oluşturmaktır. "Beni, ortaya koyduğum ideografiye yönelten düşünce uğraşının başlangıç noktasında aritmetik yer almaktadır. Bu ideografiyi öncelikle bu bilime uygulamanın nedeni, aritmetiğin kavramlarının daha ayrıntılı bir çözümlemesini yapmak ve teoremlerin daha derin bir temellendirilmesini vermektir."[62]

61 *Begriffsschrift*, s. 5.
62 A.g.y. s.8.

Frege, *Begriffsschrift*'tin "Dizilerin Genel Kuramı"nı ele aldığı son bölümünde, genel olarak dizilerdeki sıralanmayı saf mantıksal olarak tanımlanmış, ulaştığı sonuçların, başka bir incelemede ele alacağı sayı kavramının aydınlatılmasına olanak vereceğini yazmaktadır.[63] İşte *Aritmetiğin Temelleri, Begriffsschrift*'tin kaldığı noktadan, sayının saf mantıksal açıdan tanımlanmasına yönelik bir girişimdir.

Aritmetiğin Temelleri: Kavram, Nesne ve Sayı

Frege, sayal sayı kavramının (Frege, "sayı" sözcüğü için *Anzahl* ve *Zahl* terimlerini kullanıyor. *Anzahl*, sayal (kardinal) sayı anlamındadır; sayal sayı, bir kümenin öğelerinin toplam sayısını veren, yani "kaç tane" sorusuna yanıt veren tamsayıdır. *Zahl* ise genel anlamda "sayı"dır. Frege'nin bu çalışmada konu aldığı *Anzahl* ve genel *Anzahl* kavramıdır), bilinen 2000 yıllık geçmişine karşın hâlâ açıklığa kavuşturulmamış olduğunu düşünürken *AT*'nin girişinde şunları yazmaktadır: "Bu durumda bilim için, kendi nesneleri arasında ilk ve en önde geleni ve görünüşte en basit olanı hakkında bu kadar karanlık içinde bulunmak utanç verici değil midir?"[64] Frege, tıpkı Kant'm *Prolegomena*'da "Buna göre, bütün metafizikçilere, 'sentetik a priori bilgiler nasıl olanaklıdır?' sorusunu yeterince yanıtlaymcaya kadar, resmen ve yasal olarak işten el çektirilmiştir"[65] diye yazması gibi, daha sonra *NS*'de, "Aritmetikçilerin bu sorulara verdiği yanıtlarda görüş birliği içinde olmalarına ve terminolojilerinin yanıtlarıyla tutarlılık göstermesine kadar gerçek bir aritmetik bilimi yoktur" diye yazacaktır.[66] Çünkü aritmetiğin yasalarının analitik ya da sentetik olduklarının belirlenmesi sayal sayının bir tanımının verilip verilememesine bağlıdır. Böylece Frege *Aritmetiğin Temelleri*'nin girişinde sorunu şöyle koyar: "Sayal sayının

63 A.g.y. s.8.

64 *Aritmetiğin Temelleri, Giriş* s. 78

65 *Prolegomena*. Hacettepe Ün. Yay. Ankara 1983, çev. I. Kuçuradi, Y. Örnek. § 5, s. 27/45.

66 Frege, *Posthumous Writings*. Çev. P. Long ve R. White, s. 257, Blackwell 1979 (*Nachgelassene Schriften*, s. 277)

(*Anzahl*) tanımlanması mı gerektiği, yoksa tanımlanmamış olarak mı kabul edileceği sorunu her şeyin üstündedir. Bu kitabın ortaya koymak istediği nokta tam da budur. Aritmetiğin yasalarının doğası hakkındaki karar, bu çalışmanın sonucuna bağlı olacaktır." Temel fikrin altını bir kez daha çizelim: Aritmetiğin temel kavramlarında ve aritmetiksel fonksiyon ve işlemlerde nihai dayanak olarak sadece aritmetiğe özgü öğeler bulunmamaktadır; bunlar tümüyle mantıksal olan kavram ve işlemlere indirgenebilirler. Böylelikle, aritmetiğin temel yasalarının aslında mantığın genel yasalarından türedikleri ve dolayısıyla bu temel yasaların analitik doğruluklar olduğu ortaya konabilir.

Daha önce Dummett'tan da alıntı yaparak belirttiğimiz gibi *Aritmetiğin Temelleri* halis bir felsefe metnidir ve Kant sonrasında mantığın ve matematiğin temellerine ilişkin yapılan araştırmalar için bir kilometre taşıdır: "Sonuç olarak, birçok matematikçinin kabul edebileceğinden daha fazla felsefi uslamlamaya yöneldiğimi fark ettim; ancak sayı kavramını çok ayrıntılı bir şekilde ele alan her inceleme her zaman felsefi olmak durumundadır. Böyle bir inceleme hem matematikçiler hem de felsefeciler için ortak bir ödevdir."[67]

Öncelikle Frege için aritmetiğin yasalarının ve sayal sayının ne olmadığının altını çizelim. Frege, *AT*'de 1) aritmetiğin yasalarının tümevarımsal olduklarına (§ 9); 2) sayal sayıların fiziksel şeylerin özellikleri olduklarına (§ 21); 3) sayal sayıların öznel zihinsel şeyler olduklarına (§ 26); 4) sayal sayıların fiziksel nesnelerin topluluğu olduklarına (§ 28); ve 5) sayal sayıların sayı göstergeleriyle özdeşleştirilmesine karşı çıkmaktadır. Böylelikle, sayal sayının tanımlanmasında psikolojizm [1), 2), 3), ve 4)] ve formalizm [5)] yadsınıyor, sayal sayının deneyci anlayışı bir kenara bırakılıyordu. Sayal sayının tanımlanmasında deneyci ve formalist nesne anlayışının ve ilkelerinin işe yaramaz oldukları gösterildiğinden dolayı, artık bu amaç doğrultusunda deneycilikten ve formalizmden farklı ilkelere gerek olmaktadır.

Frege, sayal sayının tanımlanması girişiminde *AT*'nin Giriş kısmının sonunda üç temel ilkeye bağlı kaldığını yazmaktadır:

67 *Aritmetiğin Temelleri, Giriş* s. 81

1) Psikolojik olanı mantıksal olandan, öznel olanı nesnel olandan kesin bir biçimde ayırmak;

2) Sözcüklerin gönderimini (anlamını) [*Bedeutung*][68] tek başına değil, ancak bir tümce bağlamında ele almak;

3) Kavramla nesne arasındaki ayrımı asla gözden kaçırmamak.

Birinci ilkeyi, Frege'nin *Begriffsschrift*'te yargının kavramsal içeriğinden ne anladığından söz ederken ele almıştık. İkinci ilke *"Bağlam İlkesi"* olarak bilinmektedir.[69] Deneyci, psikolojik ve formalist sayı anlayışlarının kökeninde, sayal sayının tümce bağlamından (başka bir deyişle nesnenin yargı bağlamından) koparılması yatmaktadır. Frege, sayal sayıyı tanımlamaya çalışırken, bunu sayal sayının kendi başına ne olduğunu araştırarak, yani sayal sayının soyut ontolojik mekânını araştırarak yapmamaktadır. Sayal sayının bir nesne olduğunun gösterilmesi Frege'nin ana amacıdır. Ama bunun ortaya çıkarılması, geleneksel metafizikte ya da deneycilikte olduğu gibi sayının bağlamından koparılarak tek başına ne olduğunun incelenmesiyle yapılamaz. Bu açıdan *"Bağlam İlkesi"*, Frege'nin sayının doğasına yönelik araştırmasının temel ilkelerinden biridir ve bu ilkenin dayandığı felsefi zemin de, yukarıda söz ettiğimiz gibi nesnenin ve kavramın mekânının yargı olduğuna ilişkin Kantçı yargı anlayışıdır.

Yargıdan bağımsız nesne ve kavram olmadığına göre, ontolojik bir incelemenin temel birimi yargı ve yargının dilegetirilişi olan bildirim tümcesi olacaktır. Tümce içinde nesne ve kavram arasındaki ayrımın berrak bir şekilde ortaya konması ise sayal sayının tanımının yapılabilmesini sağlayacaktır. Bu da Frege'nin üçüncü ilkesine karşılık gelmektedir.

68 Frege'nin ünlü *Sinn* ve *Bedeutung* ayrımını, sırasıyla "anlam" ve "gönderim" ile karşıladık. Aslında, dil felsefesinde çağ açan bu ünlü ayrımı, Frege, Über Sinn und Bedeutung (1892, Anlam ve Gönderim Üzerine) makalesinde yapmıştır. Hem Über Begriff und Gegenstand (1892, Kavram ve Nesne Üzerine) makalesinde, hem de Husserl'e yazdığı mektupta (24 Mayıs 1891), *Aritmetiğin Temelleri*'nde bu ayrımı henüz yapmamış olduğunu belirttiğine işaret edelim.

69 *'Bağlam İlkesi'*, Wittgenstein'ın iki dönem felsefesinde de temel konumdadır. Bu ilke, *Tractatus*'ta "Ancak tümcenin anlamı vardır; ancak tümcenin bağlamında bir adın gönderimi vardır" (3.3) olarak yinelenmiştir

Frege, *AT*'de dile getirdiği bu üç ilkeyi, *AT*'den yedi yıl sonra yayımlanmaya başlayan dört temel makalesinde ("Eylemsizlik Yasası Üzerine" *[Über das Trägheitsgesetz, 1891]*; "Fonksiyon ve Kavram" *[Funktion und Begriff, 1891]*; "Kavram ve Nesne Üzerine" *[Über Begriff und Gegenstand, 1892]*; "Anlam ve Gönderim Üzerine" *[Über Sinn und Bedeutung, 1892]*)[70] tek tek açmıştır. *AT*'de sayının nasıl tanımlandığına bakmadan önce, hem *"Bağlam İlkesi"*nin Frege'nin yeni yaklaşımındaki yeri ve işlevini daha iyi görmek, hem de üçüncü ilke uyarınca "nesne" ve "kavram"m nasıl ele alındığını görmek için Frege'nin *AT*'den sonra yayımlamakla birlikte, ana hatlarıyla aynı sorunsalı geliştirdiği bu dört temel makaledeki görüşlerine değinmek gerekir.

Frege, "Eylemsizlik Yasası Üzerine" başlıklı makalesinde kavram ve tasarım arasında *AT*'nde yaptığı kesin ayrımı yinelemektedir; kavram nesnel, tasarım ise öznel olandır. Mantık kavramla ilgilidir ve bunun için de kavramın keskin sınırlarla belirlenmiş olması gerekir. Kavramın keskin sınıra sahip olması ise *Aritmetiğin Temel Yasaları*'nda bir nesnenin o kavramın altına düşüp düşmediğinin hiçbir karışıklığa meydan vermeyecek şekilde açık olması olarak tanımlanmıştır.[71] *Eylemsizlik Yasası Üzerine*'de mantıksal kavramın bir gelişiminin olmadığını, tarihinin olmadığını ve kavramın oluşturulan bir şey değil, sadece yakalanan, kavranan bir şey olduğunu belirtmektedir. Öte yandan Ludwig Lange'nin Newton'un "mutlak uzay" kavramını metafiziksel bir saçmalık olarak değerlendirdiği yazısını eleştirirken, böyle bir kavramın anlamlı olup olmadığının tek başına sorulamayacağını ifade etmekte ve deneyimde ona karşılık gelen bir şey olmadığından dolayı bu kavramın metafiziksel bir saçmalık olarak değerlendirilmesine karşı çıkmaktadır; böylece "mutlak uzay" gibi bir kavramın anlamının sadece kuramın bütünlüğü ve diğer kavramlarla olan bağlantısı açısından değerlendirilmesi gerektiğini belirtmektedir. Bu ise

70 Gottlob Frege. *Collected Papers On Mathematics, Logic, And Philosophy*. Basic Blackwell, Oxford 1984.

71 Gottlob Frege. *Grundgesetze der Arithmetik*, cilt II, Par 56. Hildeheim, G. Olms, 1962./ *The Basic Laws of Arithmetic*. Çev. ve Sunuş M. Furth. University of California Press Berkeley and Los Angeles 1964.

kuramın, onu oluşturan kavramlara önceliği olduğuna, başka bir düzeyde de düşüncelerin ve düşüncelerin doğruluğunun kavranışı olan yargıların, kavramlara öncelikli olduğuna işaret etmektedir. Mantık açısından önemli olan ise, bir kavramın altına düşecek nesneyi tam olarak belirlemesidir. Bu da tıpkı kimyasal elementlerin ayrıştırılmasına ancak uzun bir çaba sonucunda ulaşılması gibi, mantıksal bir çözümlemeyi gerektiren bir şeydir.[72] Ama, mantıksal olarak sınırları belirlenerek tanımlanan bir kavramın bu yolla bir nesneyi var etmesinden de söz edilemez. Frege, burada formalistlerin, sayıların sadece göstergelerden ibaret olan ve tanım yoluyla belirlenen şeyler olduğu görüşüne de karşı çıkmaktadır. Tanımlanan sadece göstergelerdir (rakamlardır), ama göstergelerin kendileriyle, onların gösterdiği (veya gönderdiği) nesneleri birbirinden ayırt etmek gerekir. Mantıksal çözümlemeyle keşfedilen kavramların işlevleri, onların altına düşecek nesneleri kesin sınırlarla ayırt etmektir. Kavramla nesne arasında "altına düşme" ilişkisinin ne olduğuna bakmak için Frege'nin diğer makalelerini incelemek gerekir.

Frege, daha önce *Begriffsschrift*'te tümcenin geleneksel özne-yüklem bağlamındaki çözümlenmesi yerine önerdiği argüman-fonksiyon yaklaşımını "Fonksiyon ve Kavram"da geliştirmektedir.[73] Frege fonksiyondan tam da matematikteki "fonksiyon" kavramını anlamaktadır. f(x), diyelim x^2 -1 gibi bir fonksiyon tanımlamakta, "*x*" ise argüman olarak nitelenmektedir. Aynı fonksiyonun farklı "*x*" değerleri için farklı değerleri vardır. Frege bu değerlere, değer-alanı [*Werthverlauf (İng. value-range)*] adını vermektedir. Öte yandan bu değerler, aynı zamanda doğruluk-değerlerine de karşılık gelebilmektedir. Örneğin, x = 1 için x^2 -1'in değeri 0 dersek, bu 'doğru' doğruluk değerine, -1 dersek de 'yanlış' doğruluk değerine karşılık gelecektir. Frege bunu şöyle ifade ediyor: "Bir kavram, değeri her zaman doğruluk-değeri olan bir fonksiyondur."[74] Öyleyse her fonksi-

72 Gottlob Frege. *Collected Papers On Mathematics, Logic, And Philosophy*, s. 135-136. Basic Blackwell, Oxford 1984.

73 A.g.y. s. 137-156.

74 A.g.y. s. 146

yon ya da kavram, altına düşecek argümanları ya da nesneleri, doğru yargılar veya yanlış yargılar olarak ikiye ayırabilmektedir. Bir fonksiyonun ya da kavramın keskinliği ve verimliliği, altına düşecek nesneleri berrak bir şekilde belirleyebilmesine bağlıdır.

Bu yaklaşımın dildeki karşılığı, argümanın (*x*'in) özne/nesne olarak, fonksiyonun ise kavram olarak görülmesidir. Özneyle yüklemi birbirine bağlayan "...dır"ın iki farklı işlevini birbirinden ayırmanın önemine dikkat çeker Frege: "Ankara Türkiye'nin başkentidir" ve "Ankara başkenttir" tümcelerini alalım. İki tümcede de "...dır" farklı işlevlere sahiptir. Birincide "Türkiye'nin başkenti = Ankara" anlamında, yani bir eşitliği ifade ederken, ikincide, Ankara'nın bir özelliğini dile getirmeye yarayan bir bağlayıcı fiildir (copula). Öyle ise ikinci tümceyi "*x* başkenttir" şeklinde yazarak, "başkent" kavramının altına düşecek nesneleri sıralayabiliriz. "*x*" argümanının yerini alacak değerler için "*x* başkenttir" fonksiyonunun değer-alanını bulabiliriz. Böylece "Ankara, Paris, Roma" gibi kentler, *x*'in yerine konulduğunda doğru tümceler meydana getirirken, örneğin "İstanbul, New York" gibi kentler veya "Ayfer" gibi özel adlar yanlış tümceler meydana getirecektir. Bir fonksiyon, *x*'in belirli bir değeri için bir değere sahip olur; benzer şekilde özne olarak belirli bir adın kavramla birleşmesiyle ortaya çıkan tümce ya doğru ya da yanlış olacaktır; yani tümce bir doğruluk değerine sahiptir. Bir tümcede kavramın yerinde duran kavram-terimi genellikle yüklemsel bir işlev görürken, nesnenin yerinde duran özel ad özne görevini görür. Frege yaptığı çözümlemeyle kavram ve nesneyi, dolayısıyla tümcede onların yerinde duran kavram-terimini ve özel adı kesin olarak birbirinden ayırmıştır. Nesne kendi içinde tamamlanmış, boşluksuz bir şeyken, kavram boşluklu ve nesne ile tamamlanmayı bekleyen bir işleve sahiptir. "Ankara" özel adı kendi içinde tamamlanmıştır, ama "...'mn başkenti" kavramı, boşlukludur ve özel adla tamamlanması gerekir. Bir nesne, fonksiyon olmayan bir şeydir; nesnenin dilegetirilişi boşluklu değildir, tamamlanmış bir bütündür. Fonksiyonların değer-alanları nesnelerdir, ama fonksiyonların kendileri nesne değildir.

Frege'ye göre kavramların doğası yüklemseldir, öte yandan bir nesnenin adı, bir özel ad, dilde yüklem olarak kullanılamaz ("Kavram ve Nesne Üzerine", s. 183). Frege, bir nesnenin adı olarak özel adı oldukça geniş bir şekilde tanımlamaktadır ve bunun için aşağıdaki ölçütleri verebiliriz: i) bir özel adın belirsiz tanımlıkla başlamaması gerekir, öte yandan önünde belirli tanımlık bulunan ada, bir özel ad olarak bakılabilir; ii) bir özel ad bir tümcede yüklem olarak kullanılamaz (ancak yüklemin bir parçası bir özel addan oluşabilir); iii) özel adların eşitlik ya da aynılık bildiren bir tümcede, tamamlanmış bir tümce oluşturmak üzere eşitlik iminin ya da bağlayıcı fiilin her iki yanında da bulunması gerekir. Bir özel adın anlamını bilmek demek, bir nesneyi o adın gönderimi olarak teşhis edebilmek [*Wiedererkenbaren*] demektir.

Frege kavram ve nesne ayrımını yaparken gündelik dilden bir örnek vermekte ve bir nesneye yüklenen yüklemle, nesnenin adının birbirine karıştırılmaması gerektiğini belirtmektedir. Kendi verdiği bir örnekte "Deimos ve Phobos, Mars'ın uydularıdır" tümcesinde 'Deimos' ve 'Phobos' nesnenin (argümanın) yerinde duran özel adlar, "Mars'ın uyduları" kavramın (fonksiyonun) yerine duran kavram-terimi, "... dır" ise eşitlik bildiren fiildir. Bir özel ad hiçbir zaman bir kavram değildir, ama bir yüklemsel kavramın parçasını oluşturabilir. "x'in uyduları" kavramında, x'in yerine "gezegen" ve "Mars" sözcüklerini koyduğumuzu düşünelim: "gezegenlerin uyduları" kavramının kaplamı[75] tüm gezegen uydularıyken, "Mars'ın uyduları" kavramının kaplamı 'Deimos' ve 'Phobos'tur; başka bir deyişle 'Deimos' ve 'Phobos' nesneleri "Mars'ın uyduları" kavramının altma düşerler.[76]

Frege, Husserl'e yazdığı bir mektupta, özel adlarla kavram-terimleri arasındaki farkı, özel adların sadece tek bir nesneyle bağlantıda olduğu kavram-terimlerinin ise birden çok nesneyle

75 'Bir kavramın kaplamı' ifadesi, o kavramın altına düşen tüm nesneleri belirtmek için kullanılıyor; yani kavramların tamamlanarak doğru bir tümce olmasını sağlayan nesneler, kavramların kaplamlarıdır.

76 Krş. Peter T. Geach. *"Frege's Grundlagen"*. The Philosophical Review, LX (1951), s. 535-544.

bağlantıda olduğunu belirtmektedir.[77] Kavramlar (yani fonksiyonlar) nesne değildir; ama kavramların kaplamları (yani fonksiyonların değer alanları) nesnedir.

Burada, Frege'nin sayal sayı tanımlamasında önemli bir yer tutacak olan birinci-düzey kavramlarla, ikinci-düzey kavramlar arasındaki ilişkiden söz edelim.[78] Nesnelerin altına düştükleri kavramlar, birinci düzey kavramlardır. "Jena bir üniversite kentidir" tümcesinde, 'Jena' kentine gönderen özel adla adlandırılan nesne, 'üniversite kenti olma' kavramının (birinci-düzey) altına düşmektedir. Frege, kavramların genelde *vasıf*lardan [characteristics / *Merkmal*] oluştuğunu ifade etmektedir; burada "vasıf", bir kavramı oluşturan veya tanımlayan kavramlar anlamında kullanılmaktadır; örneğin "insan" kavramının vasıfları, memeli, iki ayaklı canlı, ussal, vb. olabilir. Öte yandan bu vasıflar, nesnelerin özellikleridir. Vasıflarla, kavramlar arasındaki bağıntılar, nesnelerin kavramların altına düşmesi gibi bir bağıntı değildir; vasıflar, ait oldukları kavramların altında kapsanırlar [*subordination / Unterordnung*]. Frege, buna örnek olarak 'siyah ipekli elbise olma' kavramını veriyor; 'siyah olma', 'ipekli olma' ve 'elbise olma', bu kavramın vasıflarıdır. Bu vasıflar, aynı zamanda bu kavramın altma düşen nesnelerin özellikleridir. Öte yandan, birinci-düzey kavramlarla, yine birinci-düzey kavramlar arasında da 'altında kapsanma' ilişkisi vardır. Örneğin "Tüm

77 Gottlob Frege, *Philosophical and Mathematical Correspondence*. Çev. H. Kaal. The Un. Of Chicago Press. 1980. s.64.
Frege, kavram-terimlerinin nesnelerle nasıl bağlantıda olduklarını aşağıdaki şemayla gösteriyor:

tümce	özel ad	kavram-terimi	
↓	↓	↓	
tümcenin anlamı (düşünce)	özel adın anlamı	kavram-teriminin anlamı	
↓	↓	↓ ç	
tümcenin gönderimi (*Bedeutung*) (doğruluk-değeri)	özel adın gönderimi (nesne)	kavram-teriminin gönderimi (kavram)	kavramın → altına düşen nesne

78 Gottlob Frege. *On the Foundations of Geometry and Formal Theories of Arithmetic* içinde Letter from G. Frege to Heinrich Liebmann, 25 Ağustos 1900 tarihli mektup, s. 3-5. Çev. Eike-Henner W. Kluge. Yale University Press, 1971.

atlar memelidir" veya "Tüm kareler dörtkenarlıdır" gibi sırasıyla sentetik ve analitik tümcelerde [bunları birinci basamak yüklemler mantığıyla, sırasıyla "∀x (Ax → Mx)" ve "∀x (Kx → Dx)" olarak yazıyoruz; tüm x'ler için, eğer x, A'nın ('At olma' kavramının) altına düşüyorsa, demek ki x, M'nin de ('Memeli olma' kavramının) altına düşüyordur], 'at olma' kavramının kaplamını oluşturan nesneler, bu kavramın altına düşmektedirler. Ama 'at olma' ile 'memeli olma' veya 'kare olma' ile 'dört kenarlı olma' kavramları arasındaki ilişkiler, nesnelerin kavramların altına düşmesi türünden bir ilişki değil, bir kavramın ('at olma'), bir diğer kavramın ('memeli olma') altında kapsanması ilişkisidir. 'Memeli olma' kavramının vasıfları, aynı zamanda 'at olma' kavramının da vasıflarıdır. Ancak, Frege'nin kendi örneğindeki "4'ün en az bir karekökü vardır" tümcesinde (ve daha sonra göreceğimiz gibi "kaç tane" sorusuna yanıt veren sayı tümcelerinde) yukarıdakilerden daha farklı bir durum söz konusudur. Bu son örnekte 'vardır' yüklemi, "4'ün karekökü olma" kavramının altına düşen 2 ve -2'ye değil, bizzat kavramın kendisine yüklenmektedir; yani o kavramın 'boş' olmadığını, altına en az bir nesne düşebilen bir kavram olduğunu ifade etmektedir. Böylelikle 'vardır' yüklemi, kavramın altına düşen nesnelerin değil, bizzat kavramın kendisinin bir özelliğini dile getirmektedir; ve tıpkı altına düşen bir nesnenin özelliğini dile getiren bir kavramın, nesneden daha üst bir düzeyde olması gibi, birinci-düzey bir kavramın özelliğini dile getiren bir kavram da, ondan daha üst bir düzeydedir, dolayısıyla da ikinci-düzey bir kavramdır. Frege, yüklemler mantığının tikel ve tümel niceleyicilerinin ikinci-düzey kavramlar olduğunu bu bağlamda belirtmektedir. Tikel veya varlıksal (*existential*) niceleyicinin, kavramların altına düşen nesnelerin olduğunu bildirerek onların bir özelliğini dile getirmeleri gibi, tümel niceleyici de, söz konusu kavramın, altına düşen tüm nesneler için geçerli olduğunu ifade ederken, o kavram *hakkında* bir özelliği dile getirmekte, yani ikinci-düzey bir kavram olmaktadır.[79] Frege, birinci-düzey kavramlarla

79 Frege, *AT*'de § 53'te bu ilişkileri şu şekilde ifade ediyor: "Bir kavram hakkında öne sürülen özelliklerle [*Eigenschaften*], kavramı meydana getiren tanımlayıcı vasıfları [*Merkmale*] kastetmiyorum elbette. Bu vasıflar, kavramların özellikleri

ikinci-düzey kavramlar arasında olan ayrımın, nesne ile kavram arasındaki ayrım kadar keskin olduğunu; bir nesnenin, ikinci-düzey bir kavramın altına hiçbir zaman düşemeyeceğini, bunun yapılacağını düşünmenin yanlış değil, anlamsız, saçma olduğunu belirtiyor.[80]

Frege, Marty'ye yazdığı 29 Ağustos 1882 tarihli mektupta, varlık bildiren yargılarda ikinci-düzey kavramların, nesnelere değil kavramlara yüklenmesi meselesinin, aslında Kant'm ontolojik Tanrı kanıtı çürütmesini ["Varlık (*Sein*) açıkça gerçek bir yüklem değildir" SAE, A 598/B 626] nasıl aşikâr hale getirdiğini yazıyor.[81]

Frege'nin anlam kuramı ve onun 'anlam' ve 'gönderim' arasında yaptığı ayrım, düşüncesinin en kalıcı etkilerinden birini oluşturuyor. 'Anlam'la 'gönderim' arasında yapılan ayrımın izlerini ise *Begriffsschrift*'ten başlayarak, *AT*'de görmek, başka bir deyişle, Frege'nin dili ele alış biçiminden böyle bir anlam kuramının doğacağını öngörmek mümkün. Bu kuramın ana hatlarına kısaca temas edelim.

Frege, "Anlam ve Gönderim Üzerine"[82] başlıklı makalesinde, bir sözcüğün anlamını, o sözcüğün gönderdiği nesne olarak kabul eden *anlamın gönderimsel kuramına* (referential theory of meaning) karşı çıkarak, bir sözcüğün anlamıyla, o sözcüğün gönderdiğini (gösterdiğini) birbirinden ayırmıştır. Söz konusu makalenin başında Frege, aynılığın (*Gleichheit*) nesneler arasında mı, yoksa nesnelerin adları veya göstergeleri arasındaki bir bağıntı mı olduğunu soruyor (Kısaca "a = a" ile "a = b" aynı bilgi içeriğine mi yoksa farklı bilgi içeriğine mi sahiptirler). "Akşam

değil, kavram altına düşen şeylerin özellikleridir. Dolayısıyla 'dik açılılık', 'dik açılı üçgen' kavramının bir özelliği değildir; ama doğru çizgiyle yapılmış dik açılı eşkenar üçgen olmadığını dile getiren tümce, 'doğru çizgiyle yapılmış dik açılı eşkenar üçgen' kavramının bir özelliğini dile getiriyor; ona sıfır sayısını atfediyor. Bu bakımdan varolma [*Existenz*] ile sayı arasında bir benzeşim vardır. Varolmanın olumlanması aslında sıfır sayısının yadsınmasından başka bir şey değildir. Varolma, kavramların bir özelliği olduğundan, Tanrı'nın varlığının ontolojik kanıtı da bir sonuca ulaşmıyor."

80 Heinrich Liebmann'a 25 Ağustos 1900 tarihli mektup, a.g.y s. 5.

81 Gottlob Frege, *Philosophical and Mathematical Correspondence*. Çev. H. Kaal. The Un. Of Chicago Press. 1980. s.102

82 *Anlam ve Gönderim Üzerine* [Über Sinn und Bedeutung, *1892*].

Yıldızı, Akşam Yıldızıdır" tümcesi, analitik bir tümcedir; "Akşam Yıldızı, Sabah Yıldızıdır" tümcesi ise birinci tümceden farklı bir bilgi değerine sahiptir ve "Akşam Yıldızı = Sabah Yıldızı" biçiminde ifade edilebilir. Buradaki aynılık veya eşitlik göstergesi, her iki adın da aynı nesneye göndermesi sebebiyle kullanılmıştır. "Akşam Yıldızı" ve "Sabah Yıldızı" özel adlarının gönderimi, bir ve aynı nesne, yani "Venüs"tür. Öte yandan bu iki dilegetirişin anlamları farklıdır, tıpkı 2^4'ün ve 4^2'nin anlamları farklı olmakla birlikte, değerleri, yani gönderimde bulundukları nesnenin aynı, yani "16" sayısı olması gibi. Frege, "anlam" [*Sinn*], gönderim [*Bedeutung*] ve öznel tasarım [*Vorstellung*] ayrımlarını şu örnekle dilegetiriyor: Teleskopla yapılan bir Ay gözleminde, "Ay" özel adının gönderimi gözlenen nesne olarak Ay'dır; gözlemcinin retinal imgesinde ortaya çıkan tümüyle özneldir, yani tasarımdır; teleskopun merceğinde ortaya çıkan gerçek imge ise ikisinin arasındadır, tasarım gibi öznel değildir, ama nesnenin kendisi de değildir, bu ise "anlam"a karşılık gelir[83], yani anlam, öznel tasarımla ilgili bir şey değildir. Tümcelerin anlamı düşünce içeriğidir, yukarıda verilen iki tümcenin düşünce içerikleri farklı olması dolayısıyla anlamları farklıdır; ama her iki tümce de doğrudur, yani gönderimleri aynıdır. Öyleyse tümceler farklı düşünceler taşımaları dolayısıyla değişik anlamlara sahip olurken, doğru tümcelerin tümü aynı doğruluk değerine, yani "doğru"ya gönderir. Demek ki, tümcelerin anlamı [*Sinn*] "düşünce", gönderimleri [*Bedeutung*] ise doğruluk değeridir; yani doğru olan her tümcenin gönderimi "doğru", yanlış olanın gönderimi ise "yanlış"tır. Böylece bu makalenin başında "a = a" ile "a = b" arasında yapılan ayrımın zemini de ortaya çıkar ki, bu ayrımın sayal sayının tanımlanmasında çok önemli bir işlevi vardır. "a = a" ve "a = b" gibi iki tümceyi birbirinden ayıran husus, aynılık bağıntısının nesnelerin kendi aralarında değil, onların adları (göstergeleri) arasında olmasıdır. Çünkü "a = b" bağıntısında, b'nin gönderdiği ile a'nın gönderdiği aynı olduğuna göre, aynılık nesnelerin kendileri arasında olsaydı, "a = a" ile "a = b" arasında bir fark olmazdı. Oysa "a = a" ve "a = b" farklı bilgi değerine sahiptir. Öyleyse "a = b" tümcesinde aynılık nes-

83 A.g.y. s. 160-161

nelerin kendi aralarında değil, onların adları veya göstergeleri arasındaki bir bağıntıdır; a ve b, bir ve aynı nesneye gönderirken anlamlarının farklı olması da buradan kaynaklanır. Aşağıda değinileceği gibi, sayal sayının tanımlanmasında ve aritmetiğin yasalarının analitik yargılar olduklarının ortaya konulmasında tümüyle analitik önermelere başvurarak, sayal sayının tanımını 'aynılık' bağıntısına dayandırmak, bu önermelerin aynı gönderime, ama farklı anlama sahip olmalarıyla yapılabileceği içindir ki, Frege sonraki çalışmalarında ünlü 'anlam' ve 'gönderim' ayrımını geliştirecektir. Frege'nin 'anlam' ve 'gönderim' ayrımını *Aritmetiğin Temelleri*'nde henüz göz önünde bulundurmadığına daha önce işaret etmiştik.

Bu noktada, Frege'nin felsefi mantığında şimdiye kadar kullanılan kavramların ve bu kavramların biraraya getirilmesinin, Frege'nin yanıtını aradığı sorunlara, çözmeye çalıştığı meselelerin aydınlatılmasına yönelik sistematik bir mantıksal kuramın ışığında, yani sistemin kendisi itibariyle, başka bir deyişle "bağlam ilkesi"nin çok kapsamlı bir uygulaması ışığında düşünülmeleri ve anlaşılmaları gerektiğini belirtelim. Frege, "Matematikteki Mantık" adlı makalesinde şunları yazıyor: "Sadece bir sistem dahilinde bir bilim tamdır. Bir sistem için bu gerekliliği görmezden gelemeyiz. Tam bir açıklık ve düzen sadece bir sistem aracılığıyla elde edilebilir. Matematikte de olduğu ve işlediği gibi, hiçbir bilim, tümüyle saydam olmadan kendi malzemesini denetim altında tutamaz; öte yandan da hiçbir bilim, bir sistemin inşasını bir kenara bıraktığında matematikte olduğu kadar bu kadar kesif bir sis altında kendi kendisini kaybedemez." Bu konuyla ilgili Hans Sluga'dan uzun bir alıntı yapalım, çünkü sistem fikri, bağlam ilkesi ve bilim anlayışını son derece berrak bir şekilde ifade ediyor: "*Begriffsschrift* mantığı yargıların kavramlara öncelikli olduğu kabulüyle inşa edilmişti. *Aritmetiğin Temelleri*'nde aritmetiksel tümcelerin çözümlenmesi 'sözcüklerin gönderimini (anlamını) [*Bedeutung*] tek başına değil, ancak bir tümce bağlamında ele almak gerektiği' ilkesinden hareketle yapılmıştı. "Eylemsizlik İlkesi Üzerine" makalesinin önemi, bu öğretilerin, bir kuramın kendi oluşturucu kavramlarına öncelikli olduğu biçimi altında tekrar edilmesinden gelmektedir. İşte

fonksiyon ve değer-alanı, kavram ve nesne, düşünce ve doğruluk-değeri, anlam ve gönderim arasında yapılmış olan ayrımlar bu değerlendirmelerin ışığı altında anlaşılmalıdır. Bu söz konusu kavramların anlam ve gerekçelendirilmeleri onların içerebilecekleri sezgisel içeriklerde değil, sağlam bir mantıksal kuramın kurulabilmesi için vazgeçilemez olmalarındandır. Frege'nin bu ayrımların geliştirildiği makaleler, mantıksal ve sistematik olarak öncelikli olanın araştırılmasına yönelik olarak anlaşılmalıdır."[84]

Şimdi yukarıda sözü edilen dört temel makaledeki görüşleri de biraraya getirerek Frege'nin sayal sayıyı tanımının ardındaki temel yaklaşıma kısaca bakalım. Aslında yukarıda ele alman dört makale de *AT*'den sonra yazılmıştır ve *AT*'de ele alınmayan kavramları, ayrımları ve çözümlemeleri içermektedir; bununla birlikte hepsi de *Begriffsschrift* ve *AT*'deki temel meselelerin geliştirilmesidir. Bundan dolayı düşüncesindeki sürekliliği geriye doğru okuma olanağı da vardır.

"Her tekil sayı kendi başına varolan bir nesnedir."[85]

Frege, *AT*'nin son paragrafında, § 109'da şimdiye kadar ortaya koymuş olduklarının "aritmetiğin doğruluklarının analitik ve a priori olduğu sonucunun kuvvetle muhtemel" olduğunu ve "böylelikle Kant'm konuyla ilgili görüşlerinde bir ilerleme gerçekleştirilmiş" olduğunu ifade ediyor. Frege'nin ulaşmış olduğunu öne sürdüğü sonuçlar, sadece aritmetiğin ve sayıların doğasına ilişkin olmakla sınırlı kalmamakta, ayrıca daha geniş kapsamlı bir şekilde, aklın, her türlü duyusal içeriği aşan ve Kantçı anlamı da içerecek şekilde görü kökenli olmayan, transandantal da olmayan, ama içeriğe de sahip bir bilgiye sahip olabileceği iddiasını taşımaktadır.

Frege'nin, aritmetiğin yasalarının analitik a priori yargılar olduğunu ve § 87'de ifade ettiği gibi aritmetiğin sadece daha da geliştirilmiş bir mantık olduğunu ve her aritmetik önermesinin,

84 Hans Sluga, *Gottlob Frege*, s. 133. Routledge and Kegan Paul, London 1980.
85 *Aritmetiğin Temelleri*, § 55.

türetilmiş de olsa bir mantık yasası olduğunu ortaya koyabilmesi için, aritmetiğin a priori görüye ilişkin hiçbir içeriğinin olmadığını, başka bir deyişle aritmetiğin nesnelerinin, sayal sayıların saf görü devrede olmadan akla doğrudan verilebildiğini ortaya koyabilmesi gerekir. Aslında Frege'nin *AT*'de daha az teknik, daha çok felsefi ve 1893'te yayımlanan *Aritmetiğin Temel Yasaları*'nda daha teknik bir dille izlediği yol tam da bunu ortaya koyabilmek içindir ("*Aritmetiğin Temelleri* kitabımda, aritmetiğin mantığın bir dalı olduğunu ve kanıtlamalarının zemini için deneyimden veya görüden destek almaya hiçbir şekilde ihtiyacı olmadığını göstermeye çalıştım. Şimdi bu mevcut kitapla, sayal sayının en yalın yasalarının sadece mantık yoluyla türetilmesiyle, bu, teyit edilecektir" [*Aritmetiğin Temel Yasaları*. § 0]).

Frege, Kantçı a priori saf görü zemininden kopmanın ilk işaretini daha önce alıntıladığımız gibi *Begriffsschrift*'in önsözünde vermişti ("Görüsel olan herhangi bir şeyin farkında olmadan araya sızmasını önleyebilmek için, çıkarım zincirlerinin hiçbir boşluk içermemelerini sağlamam gerekirdi").[86] *Begriffsschrift* § 23'te de Frege şunları yazıyor: "...saf düşüncenin, duyular yoluyla verilen ve hatta a priori bir görü yoluyla verilen tüm içerikten bağımsız olarak, sadece kendi yapısından çıkan içerikle yargıları nasıl ortaya koyabileceği görülebilir ki, bu yargılar ilk bakışta görüyle bağlantılı gibi görünebilirler." Frege *Begriffsschrift*'in bu olanağı verdiğini *AT*'de § 91'de şöyle ifade ediyor: "*Begriffsschrift*, dilegetirişlerin sadeliğini ve açık olarak anlaşılmalarını sağlamak üzere tasarlanmıştır ve az sayıda belirli kalıpla, bir hesaplama gibi işlemektedir; öyle ki, bir önermeden bir diğerine ilerlerken kesin olarak konulmuş kurallara uymayan hiçbir geçişe izin verilmemiştir. Dolayısıyla, herhangi bir öncülün fark edilmeden bir kanıtlamanın içine sızması olanaksızdır. Böylece, görüye dayalı hiçbir aksiyomu kullanmadan, ilk bakışta sentetikmiş gibi görülebilecek bir önermenin kanıtlamasını vermiş oldum... Bu kanıtlamadan da, bilgimizi genişleten önermelerin, analitik yargılar içerebileceği sonucu çıkabilir." Ve Frege, *Begriffsschrift*'in verdiğini düşündüğü olanakla *AT*'de § 89'da Kant'ın *SAE*'nde B-75'teki "Hissetme yetisi

86 Krş. dipnot 25.

olmadan hiçbir nesne bize verilemez" ifadesine karşı çıkabiliyor artık. § 105'te de şunları söyleyecektir: "Aklm asıl nesnesi, aklın kendisidir. Aritmetikte, duyular aracılığıyla dıştan yabancı bir şey olarak gelen nesnelerle değil, aracısız olarak doğrudan akla verilen ve aklın en kendine özgü sahiplenimleri olarak tüm saydamlıklarıyla görülebilecek nesnelerle ilgileniriz".

Bu noktada işaret etmek gerekir ki, Frege, Kant'm Transandantal Felsefesinden derinden etkilenmiş bir filozof olarak, aklm, akıl nesnelerini aracısız olarak görmesi meselesini, geleneksel metafizik anlayışı çerçevesinde öne sürmüş değildir. Frege bu yüzden, 'aracısız görme'yi saf mantıksal ve saf formal bir zemine taşımış ve *bağlam ilkesi*ni merkeze alarak sayı sözcüklerinin tümce bağlamı içindeki işlev ve konumunu çözümleyerek ve sadece analitik önermeden hareket ederek ve "o önermedeki kavramın içeriğini yeniden şekillendirerek"[87] mantıksal nesne olarak sayıyı yakalandığını düşünmüştür. Ancak bu nokta, en azından aritmetiğin temelleri ile ilgili olarak Kantçı transandantal mantık zemininden kopmak anlamına gelmektedir ve bu zeminden ayrılarak sadece genel mantık itibariyle bu amacın yerine getirilme çabası Russell paradoksuyla büyük bir darbe yiyecektir (Daha sonra bu konuya geri döneceğiz).

Şimdi, önce Frege'nin sayal sayıyı sadece mantıktan hareketle (yani sadece kavramsal olanla) tanımlama girişimini ve bu yolla da aritmetiğin yasalarının sadece mantıkta temellendiğini, analitik oldukları iddiasını nasıl ortaya koyduğunun ana hatlarına kısaca değinelim:

Frege, öncelikle analitik, sentetik, a priori ve a posteriori'yi nasıl anladığını açıklıyor. Frege'ye göre bir yargının içeriğine nasıl ulaştığımız sorusuyla, yargının bildiriminin nasıl gerekçelendirileceği sorusunu birbirinden ayırt etmek gerekir. A priori ile a posteriori ve sentetik ile analitik arasındaki ayrım, Frege'ye göre yargının içeriğiyle ilgili değil, yargıda bulunmanın gerekçelendirilmesiyle ilgilidir. Yani önemli olan yargıda bulunmanın ardındaki psikolojik, fizyolojik ya da fiziksel koşullar değil, o yargının doğru olarak kabul edilmesini gerekçelendiren daya-

87 Yalçın Koç. *Matematiğin Ontolojisi Bakımından Kant ile Frege Karşılaştırılması.* Felsefe Arkivi. Sayı 30. s. 49-54.

naktır. Öyleyse, bir yargı bildiriminin kanıtlanmasını sağlayan doğruluklar zincirinin başlangıç halkalarına kadar indiğimizde karşımıza çıkan sadece genel mantık yasaları ve tanımlarsa, o zaman o önermenin doğruluğunun analitik bir doğruluk olduğunu söyleyebiliriz.[88] Başka bir deyişle bir doğruluğun analitik bir doğruluk olması, *bağlam ilkesini* de dikkate alarak, o doğruluğun bütün bir yapı içinde, sadece mantık yasaları ve tanımlardan türetilebilmesine bağlıdır. Bu durumda, 'a priori olma' ile 'analitik olma' aynı şey değildir. Evet her analitik yargı a prioridir; ama her a priori yargı analitik değildir (tıpkı Kant'ta olduğu gibi, ama Kant'mkinden farklı gerekçelerle). Örneğin geometrinin aksiyomları a prioridir, ama analitik değildir; çünkü bu aksiyomları a priori görüyü dışlayarak sadece kavram zemininde genel mantık yasalarından türetmek olanaklı değildir (tıpkı Kant'ta olduğu gibi).

Analitik olmayı bu şekilde tanımladıktan sonra Frege *AT*'de elbette şu soruyu soruyor: "Acaba bu yüksek, dallanıp budaklanmış ve büyümeye hâlâ devam eden sayı biliminin büyük ağacının kökleri sadece özdeşliklerde [*Identitäten*] kök salabilir mi? Ve mantığın boş formları nasıl olur da böylesine zengin bir içeriği içinden çıkarır?"[89] İzleyeceği stratejiyle bu soruya olumlu yanıt verdiğini düşünmektedir.

Yukarıda Frege için aritmetiğin yasalarının ve sayal sayının ne olmadığını belirtmiştik. Frege, 1, 2 vb tekil sayılarla sayal sayının genel kavramını birbirinden ayırmaktadır [*AT*, § 18]. Aritmetiğin genel yasaları, tekil sayıların tanımlarından ve tekil sayıların, örneğin 'bir sayısı'ndan ve 'birle arttırma' ile nasıl elde edildiklerinden değil, sayal sayının genel kavramından ve onun tanımlanmasından çıkabilir. Çünkü 'bir sayısı' ve 'birle arttırma', sayıyı açıklayanlar değildir, kendileri açıklanmaya ve tanımlanmaya muhtaçtır; öyleyse Frege için 'bir sayısı'nı ve 'birle arttırma'yı verili kabul ederek sayal sayıyı tanımlama girişimi kabul edilebilir değildir. "...bir sayısı'nın ve 'birle arttırma'nm kendileri açıklanmadığı sürece bu açıklamaların da tamamlanmadan kalacaklarını kabul etmiştik. Böylelikle, sayısal ifadeleri

88 *AT*, § 3.
89 *AT*, § 16.

bu tanımlardan çıkarmak istiyorsak, genel önermelere gereksinmemiz olduğunu görmüştük. Böyle yasalar tam da genelliklerinden dolayı tekil sayıların tanımlarından değil, ancak sayal sayının genel kavramından çıkabilirler. Şimdi bunu daha yakından inceleyeceğiz. Bu inceleme sırasında bir sayısını ve birle arttırmayı da irdelemenin gerekli olduğunu biliyoruz; bunun sonucunda da tikel sayıların tanımlarının tamamlanmasını umuyoruz" [*AT* § 18]. Yani, sayal sayının genel kavramının 'bir sayısı' ve 'birle arttırmayı' da içermesi ve tanımlayabilmesi gerekir.

Frege, benzer şekilde, matematikçilerin, sayal sayıların kümelerden soyutlamayla elde edildiklerini düşünürken ne 'küme' ne de 'soyutlama'nın açık bir anlayışına sahip olduklarını, dolayısıyla sayal sayının bir tanımını veremediklerini düşünüyordu. Çünkü soyutlama yoluyla sadece kavramların elde edilebileceğini, sayal sayı gibi nesnelerin elde edilemeyeceğini ifade ediyordu.[90]

Yargı, nesne ve kavrama öncelikli olduğu için, nesne olarak sayal sayının yargı fiili içinde ele alınması gerekir. Dil düzeyinde ise, sayıların yerinde duran göstergelerin (rakamların ve adlarının) kullanım bağlamlarına bakmak gerekir; bu da sayı sözcüklerinin dilde nasıl kullanıldıklarının, başka bir deyişle sayal sayının dilde kendisini nasıl gösterdiğinin çözümlenmesiyle yapılabilir;[91] yani Frege, nesnelerin yerine duran adları, dolayısıyla nesneleri tümce içindeki konumlarına ve işlevlerine göre çözümlemektedir. Frege'ye göre sayı sözcüklerinin tümce bağlamında genelde iki kullanımı vardır: i) "kaç tane" sorusuna yanıt veren sayı tümceleri ve ii) "iki sayısı, asal ve çift olan yegâne sayıdır" veya "7 + 5 = 12" gibi aritmetik önermeleri. Bu kullanımlarda sayı, tümcede bir kavram olarak kullanılmamakta, ancak nesnenin yerinde duran özne teriminin kavramla olan ilişkisi gibi kullanılmaktadır. Yani, tıpkı özel adların tümcede belirli tekil nesnelerin yerinde durması gibi, sayı adları da nesne olan sayal sayıların yerinde durmaktadır veya başka bir deyişle, sayı adlarının gönderimleri [*Bedeutung*] sayal sayılardır. Böylelikle 'kavram' ve 'nesne' arasındaki keskin ayrım dikkate

90 *NS*, s. 77-8.

91 "Sözcüklerin ancak tümce bağlamında gönderimleri vardır. Şu halde bizim sorunumuz sayı sözcüğünün geçtiği tümcenin anlamını açıklamaktır." *AT*, § 62.

alındığında, 'sayı' sözcüklerinin yüklemsel kullanımları, doğal dildeki yanıltıcı görünüşe karşılık olanaklı değildir. Sayı sözcüklerinin, tıpkı "Bahçedeki ağacın dalları kırıktır" tümcesindeki "kırık" kavramının, öznenin bir özelliğini dilegetirmesi gibi, "Bahçedeki ağacın dallarının sayısı dokuzdur" tümcesinde de "dokuz" kavramının öznenin bir özelliğini dilegetirdiğinin düşünülmesi, sayının bir yüklem olarak kullanılabildiği kabulünü getirmiştir. Bunun böyle olmadığını göstermek için, Frege'nin, sayı sözcüklerinin gündelik dilde bir özelliği ya da bir kavramı dilegetiriyormuş gibi görünen kullanımlardaki yanlışlığı ortaya koyması gerekiyordu.[92] Bu girişim ise ayrıntılı bir tümce çözümlemesini, tümcenin öğelerinin berrak bir şekilde ortaya konulmasını gerektiriyordu. Frege bu çözümleme sonucunda sayı meselesinin deneyci ve psikolojik anlayışına karşı olarak gösterecektir ki, sayı ne şeylerin bir özelliğidir, ne de bir kavramdır. Frege, *AT*'de "Bir sayı tümcesinde ne hakkında bildirimde bulunuruz" [*AT*, § 45] diye sorar; ve yanıtını şöyle verir: "Sayıyı, onun asli kullanım biçimini meydana çıkaran bir yargı bağlamında ele almak, konuya biraz ışık tutacaktır. Bir ve aynı dışsal görüngüye bakarak, örneğin 'Bu bir ağaç grubudur' ve 'Burada beş ağaç var' tümcelerinin ikisini de aynı doğrulukta söyleyebilirim ya da 'Burada dört şirket biraradadır' ve 'Burada 500 adam çalışıyor' tümcelerini de; şimdi burada bir yargıdan diğerine değişen ne tekil şeylerdir, ne de bütündür veya onların biraradalığıdır, değişen yalnızca benim adlandırmamdır. Bu ise, sadece bir kavramın yerine bir diğerinin konulduğunun bir göstergesidir. Böylelikle, önceki paragrafta yanıtsız bırakılan ilk soruya verilebilecek bir yanıt akla geliyor: Bir sayı tümcesi bir kavram hakkında bir bildirim içerir" [*AT*, § 46].

92 (1) Bahçedeki ağacın dalları kırıktır.
"Bahçedeki ağacın dokuz dalı var" tümcesini (1)'deki örneğe göre yazarsak:
(2) Bahçedeki ağacın dalları dokuzdur.
(1)'deki örnekten: "eğer *d* bahçedeki ağacın dalı ise, *d* kırıktır" kolaylıkla elde ediliyor; ama (2)'deki örnekten "eğer *d* bahçedeki ağacın dalı ise, *d* dokuzdur", anlamsız bir tümce oluyor. Yani 'kırık olma' her bir nesnenin (dalın) özelliği iken, 'dokuz tane olma' her bir nesnenin (dalın) özelliği değil, "bahçedeki ağacın dalları" kavramının bir özelliğidir. Dolayısıyla bir kavramın özelliği olduğu için "dokuz tane olma" ikinci-düzey bir kavramdır.

Bununla birlikte, sayı sözcüklerinin yüklemsel olarak kullanılabileceğine dair güçlü bir karşı örnek 'bir' sayısı gibi görünmektedir. Çünkü tekil bir nesne, birçok maddi özelliği dışında 'bir olma' özelliğine de sahipmiş gibi görünmektedir. Frege, hoş bir uslamlamayla bunun da yanıltıcı olduğunu gösteriyor. Verdiği örnek şudur: "Eğer 'bir insan'ı, 'bilge insan' gibi ele almak doğru olsaydı, bu durumda 'bir'in yüklem olarak da kullanılabileceğini düşünebilirdik ve 'Solon bilgeydi' der gibi, 'Solon birdi' ya da 'Solon biriydi' diyebilirdik. Bu sonuncu dilegetirişin gerçekten kullanıldığı doğrudur, ancak kendi başına alındığında pek de anlaşılır değildir. Örneğin, eğer geçtiği bağlam içinde 'bilge'nin bütünlenmesi gerekiyorsa, 'Solon bilge biriydi' denebilir. Ancak tek başına, 'bir', bir yüklem olamaz (Bununla çelişir görünen kullanımlar görülmektedir; ancak daha yakından baktığımızda bir kavram-teriminin tamamlanmasının söz konusu olduğu ya da 'bir'in bir sayı sözcüğü olarak kullanılmadığını, yani biriciklikten değil, birlikli (birimli) olmaktan söz edildiğini görürüz.). Çoğulunu aldığımızda bu daha da açık olacaktır. 'Solon bilge bir kişiydi' ve 'Thales bilge bir kişiydi' tümcelerini birleştirerek 'Solon ve Thales bilge kişilerdi' diyebildiğimiz halde, 'Solon ve Thales birlerdi' diyemeyiz. Ama eğer 'bir', 'bilge'nin olduğu gibi hem Solon'un ve hem de Thales'in özelliği olsaydı, bunun niye olanaksız olduğunu görmek zor olurdu" [*AT*, § 29].

Sayının ne olduğunun araştırılmasının, günlük dilde sayı sözcüklerinin tümcedeki işlevleri üzerinden yapıldığından söz etmiştik. Bu kullanımların sayı tümceleri ile ilgili olanının esası saymaya dayanır. Saymak için ise bir sayma biriminin kullanılması gerekir. Şimdi sorun bu sayma biriminin ne olduğunu saptamaktır. Sayı dışsal şeylerin bir özelliği olmadığına göre, dışsal şeylere yüklenemez. Sayı ancak kavramlara yüklenebilir. Homeros'un *İlyada*'sı tek bir kitaptır, ama 24 bölümden veya çok sayıda dizeden ya da harften oluşmuştur. Eğer birine, bir fiziksel nesne olarak masanın üzerinde duran bu şeyin sayısının kaç olduğunu sorduğumuzda, doğal olarak sayısını bilmek istediğimiz şeyin kitap mı, sayfası mı, dize ya da harf sayısı mı olduğunu bize soracaktır. Dolayısıyla burada saymaya esas olan masanın üzerindeki o fiziksel şey değil, o şeyi kitap, bölüm, sayfa, dize

ya da harf kavramı altında düşünmemizdir [*AT*, § 22]; yani bir sayı tümcesi kavram hakkında bir bildirim içerir [*AT*, § 46]. Bu durumda sayma birimi kavramdır. Kavram, saymanın birimi olduğuna göre, sayma işlemi ile, şeyler arasında değil, kavramlar arasında bire-bir eşleme oluşturulmaktadır. Öyleyse nesne ve kavram bağlantısının bu açıdan çözümlenmesi gerekir.

Bağlam İlkesine göre sözcüklerin sadece tümce bağlamında gönderimleri (anlamları) vardır; o zaman sorun, sayı sözcüklerinin geçtiği tümcelerin anlamlarını tanımlamaktır. Sayı sözcükleri, tümcede, kendi başına varolan bağımsız nesnelerin yerine durur. Daha önce sözünü ettiğimiz gibi, sayı ne dışsal şeylerin bir özelliğidir, ne de öznel zihinsel şeylerdir; yani sayının fiziksel olması bakımından değil, nesnel olması bakımından 'nesne' olduğunun altının çizilmesi gerekir. Frege burada fiili gerçek [*Wirklich*] olanla nesnel olanı birbirinden ayırıyor: "Nesnel olanı, dokunulabilir, uzaysal ya da fiili gerçek olandan ayırıyorum. Yeryüzünün ekseni, Güneş Sisteminin kütle merkezi nesneldir; ancak bunlara Yeryüzünün kendisi gibi fiili gerçek diyemem." [*AT*, § 26]. Frege'ye göre nesnel olan, duyusal olandan, görüden, tasarımlardan ve içsel imgelerden bağımsız olandır; ama akıldan bağımsız değildir [*AT*, § 26]. İşte "sayı" bu nesnellik anlamında bir nesnedir ve duyusal ve psikolojik olandan tümüyle bağımsızdır. Ancak bu durumda kendi başlarına varolan bu "nesneler" nasıl olacak da bilgimizin bir nesnesi olacaklardır? Elbette Frege, sayıların kendi başına varolan nesneler olarak alınmasının, sayı sözcüklerinin tümce bağlamının dışında da bir gönderime sahipmiş gibi anlaşılmaması gerektiğinin altını çiziyor; bu vurgulamanın sebebi sayı sözcüklerinin özel ad olarak kullanılmak yerine, yüklem ya da özellik olarak kullanılmalarına engel olmak içindir [*AT*, § 60]. Öyleyse ulaşılacak tanım aracılığıyla ve sadece mantık zemininde bir sayıyı kendisinin aynısı olarak teşhis edebilmek [*Wiedererkennen*] gerekir. Başka bir deyişle, tekil bir sayıyı diğerlerinden, 0'ı 1'den, 1'i 2'den vb. ayırt ederek, onların birer nesne olarak kimliğini (özdeşliğini), duyusal ve deneysel olandan bağımsız olduğu kadar, a priori görüden de bağımsız yoldan teşhis etmek gerekir.

Şimdi, bir göstergeler dizisi ya da zinciri ile (bu göstergeler elbette kâğıt üzerindeki rastlantısal lekeler değildir, bir eklemlenmeye sahiptir; bu eklemlenmenin dayanağının ne olduğu sorusu ise bambaşka bir mesele!), farklı göstergelerden meydana gelen bir diğer dizi ya da zincirin arasında aynılık bağıntısı kurmak nasıl mümkündür? Ve aklm, görünüşteki bu farklılığın aslında bir aynılık olduğunu deneyden ve a priori görüden tümüyle bağımsız olarak teşhis etmesi nasıl mümkündür? Frege'nin yöneldiği araştırma bağlamında bu, bir göstergeler dizisinin saydığı nesnelerle, bir diğerininkini bire-bir eşleme olanağı varsa yapılabilir. Saymanın temel birimi kavram olduğuna göre, bu aynılık bağıntısı kavramlar arasında kurulabilir. Bu durumda Frege'nin tasarısının başarıya ulaşabilmesinin koşulu şudur: Eğer kullanılan tanımlar analitikse, o zaman *Bağlam İlkesi* aracılığıyla analitik tanımların sayı nesnesini teşhis edebilmemize olanak verebilmesi için, analitik tanımların bir içeriğe sahip olmaları gerekir. Ama bu içerik görü yoluyla verilemeyeceği veya (a posteriori veya a priori) görü kökenli olamayacağı için (aksi takdirde bu tanımlar sentetik olurlardı), bu içeriğin, Frege'nin hem *Begriffsschrift*'te, hem de *AT*'de göndermede bulunduğu 'saf düşünce' olması gerekir [*Begriffsschrift*, § 23].

Yazının başında atıfta bulunduğumuz ünlü 62. paragrafta Frege izleyeceği yolu şöyle tarif etmektedir:

"Sayı kavramını elde edebilmek için, bir sayısal eşitliğin [*Zahlengleichung*] anlamını saptamamız gerekir."

Eğer onun hakkında hiçbir öznel tasarımımız veya görümüz yoksa, bir sayı bize nasıl verilmiş olabilir? Sözcüklerin ancak tümce bağlamında gönderimleri [*Bedeutung*] vardır. Şu halde bizim sorunumuz, sayı sözcüğünün geçtiği tümcenin anlamını [*Sinn*] açıklamaktır. Bu, bize hâlâ geniş bir seçim olanağı veriyor. Ama sayı sözcüklerinin, kendi başına varolan nesnelerin yerine duran sözcükler olarak anlaşılması gerektiğini daha önce ortaya koymuştuk. Bu da bize, anlamlı olan tümceler sınıfını, yani bir sayıyı kendisi olarak teşhis etmemizi sağlayacak tümceleri vermek için yeterli olmaktadır. Eğer *a* simgesi bir nesneyi gösteriyorsa, bütün durumlar için *b*'nin *a* ile aynı olup olmadığına karar verilebilecek bir ölçütümüzün olması gerekir; hatta bu ölçütü

uygulayacak gücümüz her zaman olmasa bile. Konumuzla ilgili olarak, aşağıdaki önermenin anlamını tanımlamamız gerekir:

"F kavramına ait olan sayı ile G kavramına ait olan sayı aynıdır";

bunu yapabilmek, yukarıdaki tümcenin içeriğini,

"F kavramına ait olan sayal sayı"

ifadesini kullanmaktan kaçınarak başka terimlerle yeniden üretmek demektir. Bunu yaparak sayıların aynılığı hakkında genel bir ölçüte ulaşmış olacağız. Böylece belirli bir sayıya ulaşacak bir araç elde ettiğimizde ve onu aynı olarak teşhis ettiğimizde, bu sayıya onun özel adı olarak bir sayı sözcüğü atfedebiliriz" [*AT*, § 62].

Burada Mars'ın uyduları ile ilgili daha önce verilen örneği sayı tümceleri bağlamında yeniden ele alalım. "Deimos ve Phobos, Mars'ın uydularıdır" tümcesinde 'Deimos' ve 'Phobos' nesnenin (argümanın) yerinde duran özel adlar, "Mars'ın uyduları" kavramın (fonksiyonun) yerine duran kavram-terimi, "..dır" ise eşitlik bildiren fiildi. Bir özel ad hiçbir zaman bir kavram değildi, ama bir yüklemsel kavramın parçasını oluşturabilirdi: 'gezegenlerin uyduları' kavramının kaplamı tüm gezegen uydularıyken, 'Mars'ın uyduları' kavramının kaplamı 'Deimos' ve 'Phobos'tu; başka bir deyişle 'Deimos' ve 'Phobos' nesneleri 'Mars'ın uyduları' kavramının altına düşmekteydi. Ama sayı tümcelerine geldiğimizde, "*n* tane ... vardır" veya "...'nın sayısı *n*'dir" tümcelerinde boşluklu kısımları bir özel ad veya özel adlarla dolduramayız. "Mars'ın iki uydusu vardır" tümcesini "Mars'ın uydularının sayısı ikidir" şeklinde yazabiliriz. Şimdi kavram-terimi ile özel adın, dolayısıyla kavramla nesnenin arasında hiçbir ayrım olmasaydı, "Mars'ın uyduları" yerine 'Deimos' ve 'Phobos' koyabilirdik. Ama bu durumda "Deimos ve Phobos'un sayıları ikidir" gibi saçma bir tümceyle karşılaşıyoruz. Oysa "Mars'ın uydularının sayısı ikidir" tümcesinde kavram, "Mars'ın uyduları" değil, "Mars'ın uydularının sayısı"dır ve bu kavramın kaplamı artık "Deimos" ve "Phobos" değil, "iki" sayısıdır; başka bir deyişle "iki" sözcüğü bir nesnenin özel adı olarak kullanılmaktadır ve bu sözcüğün gönderimi "iki" nesnesidir. Yani, "Mars'ın uydularının sayısı" kavramının kap-

lamı "iki" nesnesidir. Böylece nesneyle kavram arasında kesin bir ayrım yapılmış olmaktadır. Bir nesneye yüklenen yüklemle, nesnenin adı farklı şeylerdir ve birbirlerine karıştırılmamaları gerekir. "*n* tane A vardır" tümcesinde özne konumundaki A, belirli A'ları adlandırmak için değil, yüklemsel olarak kullanılmıştır; yani özel ad değil, kavram-terimidir. Böylece "*n*" sayısı A'mn bir özelliğini dile getirmemekte, ama boşluklu kavram-terimini tamamlamaktadır.[93]

Yukarıda birinci-düzey-kavramlarla ikinci-düzey-kavramlarm farkına işaret etmiş ve ikinci-düzey-kavramları, birinci-düzey-kavramların bir özelliğini dile getiren, onlar *hakkında* kavramlar olduğundan söz etmiştik. Sayı, nesnelere yüklenen bir özellik değil, kavramlara atfedilen bir özelliktir. Kavram hakkında bir bildirimde bulunmak, kavramın bir özelliğini dile getirmektir. Bu da, ikinci-düzey-kavramlarla yapılabilir. Yani sayal sayının genel kavramı, aslında birinci-düzey-kavramların altma düştüğü ikinci-düzey bir kavramdır. Birinci-düzey-kavramm, ikinci-düzey-kavram altına düştüğü bu özel durumu (Frege, tüm kavramların bu özelliğe sahip olmadıklarını, örneğin 'kırmızı' kavramının, altma düşecek nesneleri ayırt ederek saymaya olanak vermeyeceğini belirtiyor [*AT*, § 54]) şu şekilde ifade ediyor: "F kavramına ait olan sayı ile G kavramına ait olan sayı aynıdır;" bu da, F kavramı ile G kavramının bire-bir eşlenebilmesi demektir. Öte yandan, F kavramının sayısal değerini bilmeden de, eğer F kavramının altına düşen nesnelerle, G kavramının altma düşen nesneleri bire-bir eşleyebiliyorsak, F kavramıyla G kavramının aynı sayıda olduğunu söyleyebiliriz. Yani 'aynı sayıda olma' bağıntısı, genel sayal sayı kavramına önceliklidir. Öyleyse genel sayal sayı kavramı, bu bağıntı aracılığıyla tanımlanabilir.

Ancak bir tümel doğruluk, tekil (belirlenmiş) bir nesneye gönderimde bulunmaz. Aritmetik önermeleri söz konusu olduğunda, bu tip önermelerin tekil gönderimleri vardır; kendi başına bir nesne olan tekil sayılara gönderimde bulunurlar örneğin. Bu durumda Frege, bir nesne olarak tekil sayılara gönderimde

93 Krş. Peter T. Geach. "*Frege's Grundlagen*". The Philosophical Review, LX (1951), s. 535-544.

bulunan önermelerin aslında genel mantık yasalarından türetilmiş ve sadece saf mantıksal bağıntılara indirgenebilen önermeler olduklarını göstermek durumundadır.

Frege, aritmetiğin dışından, geometriden verdiği bir örnekle, "paralellik" kavramının da "aynı yönde olma" kavramına indirgenebileceğini göstererek bu geçişin nasıl işlediğini daha açık kılmayı deniyor:

"*a* doğrusu, *b* doğrusuna paraleldir" tümcesi,

"*a* doğrusunun yönü ile *b* doğrusunun yönü aynıdır" tümcesinde bir aynılık bağıntısına dönüştürülebilir. "Demek ki, ilk yargının içeriğini *a* ile *b* arasında dağıtarak // göstergesini daha genel bir gösterge olan "=" le değiştirmiş oluyoruz. İçeriği öncekine göre daha farklı bir yoldan kısımlara ayırdık, bu da bize yeni bir kavram verdi" [*AT*, § 64]. 'Aynı yönde olma'nın, 'paralel olma'ya önceliği gösterilmiştir; benzer şekilde "bu kaç taneyse, o da o kadar" anlayışının, "kaç tane" anlayışına öncelikli olduğu, yani bir kavrama yüklenen sayı ile bir diğer kavrama yüklenen sayının aynı olduğunun, o kavrama yüklenen sayının kaç tane olduğuna öncelikli olduğu gösterilmiş olmaktadır. Bu noktada Frege, kavramlar arasındaki bir bağıntıdan nesneler arasındaki bir bağıntıya geçebilmek için, yani mantıksal nesne olarak tekil sayıların teşhis edilebilmesine olanak verebilmek için yukarıda sözü edilen "kavramın kaplamı" anlayışını devreye sokar.[94] Eğer *a* doğrusu *b* doğrusuna paralel ise, "*a* doğrusuna paralel olan doğru" kavramının kaplamı [*Umfang / extension*], "*b* doğrusuna paralel doğru" kavramının kaplamıyla aynıdır; öte yandan, eğer iki kavramın kaplamları aynı ise, *a*, *b*'ye paraleldir. Şu halde aşağıdaki türden açıklamaları deneyelim:

a doğrusunun yönü "*a* doğrusuna paralel" kavramının kaplamıdır.

Bunu, bizim konumuza uygulayabilmek için doğru çizgilerin ... yerine kavramları, paralelliğin ... yerine de, bir kavramın

94 Daha önce söz etmiştik, "bir kavramın kaplamı" ifadesi, o kavramın altına düşen tüm nesneleri belirtmek için kullanılıyor. Frege *'Aritmetiğin Temelleri'*nde "kavramın kaplamı" anlayışının bilindiğini varsaydığını belirtiyordu (§ 68). Daha sonra, *"Fonksiyon ve Kavram"*da bu anlayışı "değer-alanı" kavramıyla genişletmiş ve *"Aritmetiğin Temel Yasaları"*nda V. Aksiyom olarak kendi sistemine dahil etmiştir.

altma düşen nesnelerle bir diğer kavramın altma düşen nesneleri bire-bir eşleyebilme olanağını koymamız gerekir. Kısaca ifade etmek için, eğer bu bire-bir eşleyebilme olanağı varsa, F kavramıyla G kavramının *'eşsayılı'* [*gleichzahlig / equinumerous*][95] olduğundan söz edeceğim; ancak bu 'eşsayılı' sözcüğünün keyfi olarak seçilmiş bir dilegetiriş biçimi olarak anlaşılmasını, anlamının içinde geçen sözcüklere göre değil, bu belirlemeyle ortaya çıktığının kabul edilmesini bekliyorum.

Böylece benim tanımım şu oluyor:

"F kavramına ait olan sayal sayı, 'F kavramıyla eşsayılı' kavramının kaplamıdır" [*AT*, § 68].

Frege, 'eşsayılı olma' gibi bir eşdeğerlik bağıntısından, mantıksal nesne olarak sayal sayılar arasındaki aynılığa geçiyor. Böylelikle,

"F kavramı, G kavramı ile eşsayılıdır" önermesinden,

"F kavramına ait olan sayal sayı, G kavramına ait olan sayal sayı ile aynıdır" önermesine, buradan da "F kavramına ait olan sayal sayı 'F kavramıyla eşsayılı' kavramının kaplamıdır" tanımına, yani kavramlar arasındaki bir bağıntıdan, nesneler arasındaki bağıntıya (aynılığa/özdeşliğe) geçiyor. Bu geçişi sağlayacak olan ise 'kavramların kaplamları' anlayışıdır. Kavramlara yüklenen sayıların arasında bire-bir eşleme yapılabilmesi, kavramların kaplamlarının aynı sayıda olması demektir. Bu ise bire-bir eşleme fikrinin mantığın özdeşlik yasasına dayandığını gösterir.

Şimdi bu tanım, artık tekil sayıları ayrı ayrı teşhis etmeye olanak veriyor. Bundan sonraki adımda "0" sayısı, "kendisiyle aynı olmayan" kavramına ait olan sayı olarak tanımlanır. "Kendisiyle aynı olmayan" kavramının altına düşecek hiçbir nesne yoktur, öte yandan bu kavramın kaplamının, 'altma hiçbir nesne düşmeyen kavram olma' ikinci-düzey-kavramınm kaplamıyla bire-bir eşlenebilmesi, başka bir deyişle "0"m teşhis edilmesidir; bu da 0 sayısının tanımıdır. "1" sayısı ise, "0'la aynı olma"

95 Tıpkı aynı zamanda meydana gelen olayları nitelemek için kullanılan *'simultan'* veya *'gleichzeitig'* kavramları gibi, Frege de bu bağlama uygun bir sözcük olarak *gleichzahlig*'i icat ediyor. Bu kavramı, 'eşzamanlı' sözcüğüne benzer şekilde 'eşsayılı' sözcüğüyle karşıladık.

kavramıyla aynı sayılı olan kavramın kaplamı olarak tanımlanır. "2" sayısının tanımı da benzer şekilde "0 veya 1 sayısıyla aynı olma" kavramıyla aynı sayılı olan kavramın kaplamı olarak tanımlanır. Bu tanımlama biçimi tüm diğer sayılar için geçerlidir. Böylece psikolojik ya da fiziksel tanımlama girişimlerinden tümüyle bağımsız olarak sadece saf mantıksal bir kavram olan "aynılık" aracılığıyla sayal sayı kavramı tanımlanmış olur. Bu da, aritmetiğin temel yasalarının saf mantık yasaları aracılığıyla temellendirilebileceğini, dolayısıyla aritmetiğin temel yasalarının analitik ve a priori olduğunun ortaya konulması demektir.

Russell Paradoksu

Aritmetiğin Temelleri'nin ardından geçen yıllarda, Frege, bu kitapta gündeme getirdiği fikirleri, yaklaşımları ve yöntemi daha da geliştirecek ve 1891'den itibaren daha önce sözünü ettiğimiz dört temel makaleyi yayımlayacaktır. Frege bu makalelerde 'kavramın kaplamı' anlayışını, fonksiyonların 'değer-alanı' kavramıyla daha teknik ve mantıksal bir açıdan ele alacak; 'nesne' ve 'kavram' arasında yapmış olduğu keskin ayrıma yönelik eleştirilere yanıt olacak şekilde bu ayrımı daha teknik bir düzeyde inceleyecek; ve yukarıda söz ettiğimiz gibi *Begriffsschrift*'te ve *Aritmetiğin Temelleri*'nde 'yargı içeriği' olarak nitelediğini, "Anlam ve Gönderim Üzerine"de sırasıyla 'anlam' ve 'gönderim'e karşılık gelecek şekilde 'düşünce içeriği' ve 'doğruluk değeri' olarak ayırt edecektir. Ve 1893'te yayımlanan *Aritmetiğin Temel Yasaları* (birinci cildi), tüm bu yenilikleri de kapsayacak şekilde aritmetiğin temel yasalarının, aslında sadece mantık yasalarından türediğini daha teknik bir dille ve aksiyomatik olarak ortaya koyabilmek amacıyla yazılmıştır.

Frege, *Aritmetiğin Temelleri*'nde, kavramlar arasındaki bağıntıdan nesneler arasındaki bağıntıya geçebilmek için 'kavramların kaplamı' anlayışını kullanmıştı. Şimdi, *Aritmetiğin Temel Yasaları*'nda bu geçiş bir aksiyom olarak tanımlanmıştır. V. Aksiyomun biçimsel ifadesi şudur:

$$\forall\varepsilon\,(F(\varepsilon) = G(\varepsilon)) \leftrightarrow (\grave{\varepsilon}\,F(\varepsilon) = \grave{\varepsilon}\,G(\varepsilon));$$

burada 'ε F(ε)' ifadesi, F fonksiyonunun ya da kavramının değer-alanına göndermektedir.

Yani, iki fonksiyon (kavram) aynı argümanlar için aynı değere sahiptirler; yalnızca ve yalnızca, onların değer-alanları da aynı ise. Aslında son derece aşikâr bir doğruluk gibi görünen bu V. Aksiyom, *Russell Paradoksu* olarak bilinen bir paradoksa yol açmaktadır.

Russell, 16 Haziran 1902 tarihli ve Frege'nin yapıtının olağanüstülüğünden söz ederek övgüler yağdırdığı mektubunda şunları yazıyor: "...ancak aşağıdaki çelişki yüzünden bir konuda bir sıkıntıyla karşılaştım: ...diyelim ki *w*, kendi kendisine yüklemlenemeyecek olan yüklem olsun. Bu durumda *w* kendisine yüklemlenebilir mi? Verilecek her yanıt karşıtıyla sonuçlanıyor." Bunu kısaca şu şekilde ifade edelim: *w*, 'kendi kendisine yüklenemeyen kavram' olsun (bunu, 'kendi kendisinin üyesi olmayan kavram' kavramı olarak kümeler kuramı diliyle de ifade edebiliriz: 'x ∉ x'); bu durumda *w*, kendi kendisine yüklenemeyen tüm kavramları kaplamı olarak altında barındıracaktır; başka bir deyişle x kavramının *w*'nun altında yer almasının koşulu 'x ∉ x' olacaktır. Bunu genelleyerek şu ifadeyi elde ediyoruz:

∀x ((x ∉ x) ↔ (x ∈ *w*)); bu ifade tüm x'ler için geçerli olduğu için x'in yerine *w* koyduğumuzda (tümel özelleme yaptığımızda), ((*w* ∉ *w*) ↔ (*w* ∈ *w*)) gibi bir çelişkiyle karşılaşıyoruz.

Frege'nin, üstün bir dehanın ürünü olan ve olağanüstü bir mantıksal zarafet içeren yapıtının böyle bir paradoks içermesi, onu derinden sarsmış olmakla birlikte, bu paradoksu ortadan kaldıracak çalışmalara da devam etmişti; ancak tatmin edici bir çözüme ulaşamamıştı. Paradokstan kurtulmak amacıyla değişiklik yapılan V. Aksiyomun yeni versiyonunun da bir çelişkiye yol açtığı, Frege'nin ölümünden sonra Polonyalı mantıkçı Stanislaw Lesnievski tarafından kanıtlanmıştır.

Russell ve Whitehead'in 1910-1913 arasında yayımladıkları *Principia Mathematica*'nın dayandığı tipler kuramı, Frege'nin sisteminde ortaya çıkan paradoks ve benzerlerinden kurtulabilmek için nesne, küme, birinci-düzey-kavram, ikinci-düzey-kavram vb. arasında çok sıkı bir hiyerarşi kuracak şekilde ilkeler belirliyordu. Ancak Gödel'in 1931'de kanıtladığı teoremler, *Prin-*

cipia Mathematica'nın ilkelerinin, bu sistemin kendisini formüle edemediğini göstererek, Frege'nin başlangıcında yer aldığı bu büyük tasarının, üzerinde yükselmek istediği temellerindeki asli kusuru ortaya koymuştur.[96]

* * *

Frege, Russell'm paradoksu haber veren mektubu eline ulaştıktan sonra *Aritmetiğin Temel Yasaları*'nın ikinci cildine yazdığı ve "Bir bilimsel yazarın başına gelebilecek en talihsiz şey, kurduğu yapının temellerinin, çalışması bittikten sonra sallanmasıdır" diye başladığı EK II'nin en sonunda şunları ifade ediyor: "Aritmetiğin asli sorusu, hangi yolla mantıksal nesneleri, özelde sayıları kavrayabiliyoruz sorusudur. Sayıları nesne olarak teşhis ettiğimizi hangi yolla gerekçelendiriyoruz? Bu ikinci cildi yazarken bu problem düşündüğüm ölçüde çözüme kavuşmuş olmasa da, çözüme giden yolun bulunduğundan halen kuşku duymuyorum."[97]

Daha önce de işaret ettiğimiz gibi, Frege'nin ulaşmış olduğunu öne sürdüğü sonuçlar, sadece aritmetiğin ve sayıların doğasına ilişkin olmakla sınırlı değildir, ayrıca daha geniş kapsamlı bir şekilde, aklın, her türlü duyusal içeriği aşan ve Kantçı anlamı da içerecek şekilde görü kökenli olmayan, transandantal da olmayan, ama içeriğe sahip bir bilgiye sahip olabileceği iddiasını taşımaktadır. Son olarak, Frege'nin, hem şükran duygularını büyük bir saygıyla ifade ettiği, hem de çok sıkı bir hesaplaşma içine girdiği Kant karşısındaki konumunu kısaca değerlendirmeyi deneyelim.

Frege de, Kant gibi sadece formel bir tutarlılıktan matematiğin ilkelerinin ve nesnelerinin yakalandığını ve teşhis edildiğini kabul etmenin yetersiz olduğunu düşünüyordu. Ama aralarmdaki temel fark: Frege, sadece genel mantığın 'mantıksal nesne'yi yakalamaya, tanımlamaya yeterli olacağını düşünürken; Kant, transandan-

96 Ayrıca bkz. E. Nogel ve J. R. Newman Gödel Kanıtlaması. Çev. Bülent Gözkân, Boğaziçi Üniversitesi Yay., İstanbul 2008.

97 Gottlob Frege.*The Basic Laws of Arithmetic*. Çev. ve Sunuş M. Furth. University of California Press, Berkeley and Los Angeles 1964, s. 143.

tal mantık aracılığıyla bu yakalamanın ontolojik zemin üzerinde mümkün olabileceğini düşünüyordu; ve a priori görü, bu zeminin açığa çıkmasının hem aracı, hem de sonucu idi. Frege, aritmetiğin ilkelerinin kendilerinin nihai temeller olduğu ve bu temellerin de mantık olduğu kanısındaydı. Oysa daha önce işaret ettiğimiz gibi Kant'ta matematiğin sentetik a priori yargıları, onlarla aynı düzeyde olmayan ve daha temeldeki transandantal ilkelere dayanmaktadır. Kant açısından a priori görü mekânı, matematiğin transandantal zeminidir. A priori görü mekânının yakalanması matematik aracılığıyla değil, transandantal mantık aracılığıyla, yani bir transandantal bilgi olarak mümkündür. Yani matematiksel nesneler, ancak a priori saf görü mekânında ve a priori görü ile bağlantılı olarak tesis edilebilirler. Matematiğin nesnelerinin kendi aralarındaki ilişkileri kavrama yetisi, üretici hayalgücü ve akılla yapılabilir ve bu ilişkiler de genel mantığa tâbidir. Ama bu matematiksel ilişkilerin kurulmasına olanak veren zemin ile bu nesnelerin bağını koparark, onların genel mantıkla yapılan çıkarımsal ilişkilerini 'mutlaklaştırmak' (yani ancak onun üzerinde ortaya çıkabildikleri zeminle bağlantıyı dikkate almamak) Frege'nin *AT*'de izlediği yoldur. Frege'de bu 'mutlaklaştırma', mantıksal nesne olarak sayının tümce içinde, a priori görüye hiç başvurmadan teşhis edilebilme olanağı olarak karşımıza çıkmaktadır ki, Russell Paradoksu bu yaklaşımdan kaynaklanacaktır.

Frege'nin sayal sayının genel kavramının tanımlanma çabasında izlediği yol, kullandığı yeni kavramlar ve yaklaşım, içinde öylesine yeni ve daha önce hiç düşünülmemiş öğeleri barındırmaktadır ki, bu yaklaşımın aksiyomatik yapısında ortaya çıkan Russell Paradoksuna rağmen, Frege'nin yapıtı, kendisinden sonra bu yöndeki çalışmaların neredeyse hareket ve başvuru noktasını oluşturacaktır. Dolayısıyla aritmetiğin mantığa indirgenmesi girişimi başarısızlığa uğramış olsa da, geliştirdiği yaklaşım ve doğal dilden hareketle dilin mantıksal yapısının incelenmesinde izlediği yol, doğal dilin mantıksal yapısının arkaplanını açığa çıkarma girişimi, kendinden sonraki çalışmalarda derin izler bırakacak, kendisinden sonra (muhtemelen kendisinin onaylamayacağı şekilde) analitik felsefenin ortaya çıkmasını sağlayacak felsefi bir yönteme dönüşecektir.

Frege üzerine son sözü, hem onun yapıtının tanınmasına öncülük etmiş, hem de keşfettiği paradoksla bu olağanüstü çalışmadaki temel kusura işaret etmiş olan Bertrand Russell'a bırakalım. Russell, Frege ile yazışmalarını yayımlamak isteyen Van Heijenoort'a gönderdiği 23 Kasım 1962 tarihli mektubunda şunları yazıyor: "Entelektüel dürüstlük ve doğrusözlülük örneklerini düşündükçe şunu anlıyorum ki, Frege'nin kendini hakikate adamışlığıyla karşılaştırılabilecek bildiğim hiçbir örnek yok. Bütün hayatı boyunca üzerinde çalıştığı yapıt tamamlanmanın eşiğine gelmişti, yapıtlarının çoğu kendisinden çok daha az yetenekli kişilerce görmezden gelinmişti, yapıtının ikinci cildi yayımlanmak üzereydi ki, temel varsayımının hatalı olduğunu fark etmesi üzerine kişisel hayal kırıklığı duygularını hiç kimselere göstermeden entelektüel bir zevkle buna yanıt verdi. Bu neredeyse insanüstü bir davranış örneği ve eğer insanlar egemenlik kurma ve tanınma yolunda sığ çabalar harcamak yerine kendilerini yaratıcı yapıtlara ve bilgiye adarlarsa, insanın nelere kadir olabileceğinin dokunaklı bir göstergesiydi."[98]

H. Bülent Gözkân

98 "From Frege to Gödel" içinde. Van Heijenoort, Harvard Un. Pr. 1967, s. 127.

Kaynakça

- Michael Dummett, *Frege: Philosophy of Mathematics.* Harvard Un. Pr. 1995.
- Michael Dummett, *Frege: Philosophy of Language* Harvard Un. Pr., 1981
- Gottlob Frege, *Philosophical and Mathematical Correspondence.* Çev. H. Kaal. The Un. Of Chicago Press. 1980.
- Gottlob Frege, Die Grundlagen der Arittmetik. Felix Meiner Verlag, Hamburg: Meiner, 1988.
- Gottlob Frege, *The Foundation of Aritmetic. A logico-mathematical Inquiry into the Concept of Number.* Çev. J.L. Austin. Harper Torchbooks, New York 1950.
- Gottlob Frege, Les Fondements de l'Arithmétique. Çev. Claude Imbert. Edition du Seuil, Paris 1969
- Gottlob Frege, *Posthumous Writings.* Çev. P. Long ve R. White Blackwell 1979
  (*Nachgelassene Schriften*
- Gottlob Frege, *Über den Zweck der Begriffsschrift*, "{Begriffsschrift} und andere Aufsatze" içinde, ed. I. Angelelli, Olms, Hildesheim, 1964
- Gottlob Frege, *Begriffsschrift, eine der aritmetischen nachgebildete Formelsprache des reinen Denkens*, "From Frege to Gödel" içinde. Van Heijenoort, Harvard Un. Pr., 1967
- Gottlob Frege. *Collected Papers On Mathematics, Logic, And Philosophy* . Basic Blackwell, Oxford 1984
- Gottlob Frege. *Eylemsizlik Yasası Üzerine [Über das Trägheitsgesetz, 1891], Fonksiyon ve Kavram [Funktion und Begriff, 1891], Anlam ve Gönderim Üzerine [Über Sinn und Bedeutung, 1892], Kavram ve Nesne Üzerine [Über Begriff und Gegenstand,1892]. Collected Papers On Mathematics, Logic, And Philosophy.* Basic Blackwell, Oxford 1984

- Gottlob Frege. *Grundgesetze der Arithmetik.* Hildeheim, G. Olms,1962.
- Gottlob Frege. *On the Foundations of Geometry and Formal Theories of Arithmetic.* Çev. Eike-Henner W. Kluge. Yale University Pr., 1971
- Beaney, Michael, The Frege Reader. Blackwell, Oxford 1997.
- Peter T. Geach. *Frege's Grundlagen.* The Philosophical Review, LX (1951), s. 535-544
- Kant, I. (1967) *Philosophical Correspondence,* çev. Arnulf Zweig, Chicago: The University of Chicago Press.
- Kant, I.. (1992a) "Concerning the Ultimate Ground of the Differentiation of Directions in Space", *Theoretical Philosophy 1755-1770* içinde, çev. D. Walford ve R. Meerbote, Cambridge: Cambridge University Press. [(1991) Von dem ersten Grunde des Unterschiedes der Gegenden in Raume, *Vorkritische Schriften bis 1768.* Band II. içinde, Frankfurt: Suhrkamp Taschenbuch Verlag]
- Kant, I. (1992b) "Inaugural Dissertation", *Theoretical Philosophy 1755-1770* içinde, çev. D. Walford ve R. Meerbote. Cambridge: Cambridge University Press. [(1991) De Mundi Sensibilis atque Intelligibilis Forma et Principiis (Von der Form der Sinnen und Verstandeswelt und ihren Gründen), *Schriften zur Metaphysik und Logik.* Band V. içinde, Frankfurt: Suhrkamp Taschenbuch Verlag]
- Kant, I. (1998) *Critique of Pure Reason,* çev. P. Guyer ve A.W. Wood, Cambridge: Cambridge University Press.
- I. Kant *Prolegomena.* Hacettepe Ün. Yay. Ankara 1983, çev: I. Kuçuradi, Y. Örnek
- I. Kant *Lectures on Logic.* Çev. M. Young Cambridge Un. Pr., 1992.
- Yalçın Koç, *Matematiğin Ontolojisi Bakımından Kant ile Frege Karşılaştırması,* Felsefe Arkivi, Sayı 30, İstanbul 1997.
- Hans Sluga, *Gottlob Frege.* Routledge and Kegan Paul, London 1980
- Ludwig Wittgenstein, *Tractatus Logico-Philosophicus,* BFS. İst. 1985, çev. Oruç Aruoba

Çeviri Hakkında

Bu çeviriye yıllar önce J.L. Austin tarafından yapılmış İngilizce çeviri ile başladım (*The Foundations of Arithmetic-A logico-mathematical enquiry into the concept of number,* Harper Torchbook ed., New York, 1960) ve çalışmayı Almanca aslıyla karşılaştırarak yürüttüm. Daha sonra Sayın Mustafa Küpüşoğlu'nun girişimiyle Sayın Mustafa Tüzel çeviriyi Almancasıyla karşılaştırarak baştan sona okudu ve çok önemli katkılarda bulundu. Tüzel'in önerileriyle çeviriyi bir kez daha elden geçirdim. Bu aşamada Sayın Yeşim Tükel metni Almancasıyla karşılaştırarak tekrar okudu ve son derece isabetli değişiklikler önerdi. Hem Küpüşoğlu'na, hem Tüzel'e, hem de Tükel'e çok teşekkür ediyorum. Bu haliyle birkaç yıl bekledikten sonra çeviriyi yeniden ele aldım ve bu kez Michael Beaney'nin *The Frege Reader*'daki çevirisini (Blackwell. Oxford 1997) ve Claude Imbert'in yetkin Fransızca çevirisini de dikkate aldım. (Les fondements de l'arithmétique. Éditions du Seuil. Paris, 1969). Beaney'nin çevirisi *Aritmetiğin Temelleri*'nin tamamını değil, ana bölümlerini içerse de, Austin'in hatalarını düzeltmesi bakımından onunkinden daha iyi bir çeviri. Metni, bu üç çeviriyi de dikkate alarak ama Almanca metin üzerinde yoğunlaşarak bir kez daha ele aldım.

Metnin son kez gözden geçirilmesini Boğaziçi Üniversitesi Felsefe Bölümü öğretim üyesi (aynı zamanda ODTÜ İnşaat Mü-

hendisliği Bölümü'nden sınıf arkadaşım olan) sevgili dostum İlhan İnan üstlendi. İlhan'a titizliği, dikkati ve ilgisi için sonsuz teşekkürlerimi sunuyorum.

İyi bir çeviri olduğu kanısındayım, ama her şeye rağmen hatalar varsa tüm sorumluluk bana aittir.

Eylül 2008, Çiftehavuzlar

ARİTMETİĞİN TEMELLERİ

Giriş

Herhangi birine, bir sayısının ne olduğunu ya da 1 göstergesinin neye gönderme yaptığını [*bedeute*]* sorduğumuzda, aldığımız yanıt çoğunlukla şudur: "bir şey işte". Ve eğer

"bir sayısı bir şeydir" [*Die Zahl Eins ist ein Ding*]

tümcesinin bir tanım olmadığına, çünkü bu tümcenin bir yanında belirli tanımlık [*Artikel*]** diğer yanında belirsiz tanımlık kullanıldığına ya da bir sayısının hangi şeylere ait olduğunu söylemeden, tümcenin onu yalnızca şeyler kümesine yüklediğine dikkati çekecek olursak, bu durumda istediğimiz herhangi bir şeye "bir" adını vermekte belki de serbest oluruz. Bununla birlikte, eğer herkesin bu adla istediği şeyi anlama hakkı olsaydı, bu durumda bir sayısı hakkmdaki aynı tümce farklı kişiler için farklı anlamlara gelirdi, yani böyle tümcelerin ortak bir içeriği olmazdı. Belki de

* Frege'nin ünlü *Sinn* ve *Bedeutung* ayrımını, sırasıyla 'anlam' ve 'gönderim' ile karşıladık; *bedeuten* fiilini de yerine göre 'gönderme yapmak' veya 'göndermek' olarak çevirdik. Aslında, dil felsefesinde çağ açan bu ünlü ayrımı, Frege, *Über Sinn und Bedeutung* (1892) (Anlam ve Gönderim Üzerine) makalesinde yapmıştır. Hem *Über Begriff und Gegenstand* (1892) (Kavram ve Nesne Üzerine) makalesinde, hem de Husserl'e yazdığı mektupta (24 Mayıs 1891), *Aritmetiğin Temelleri*'nde bu ayrımı henüz yapmamış olduğunu belirttiğine işaret edelim. Ayrıntılı açıklama için bkz. Sunuş, s. 49-51 (ç.n.)

** Almancada "das", "der", "die" (İngilizcedeki "the" gibi) belirli tanımlıkları, tekil ve belirli bir şeye veya nesneye gönderme yapmak için kullanılır. Frege'ye göre, bir belirli tanımlığın kullanıldığı "masanın üstündeki mavi kalem" belirli betimlemesi, tekil ve belirlenmiş bir nesneye gönderme yaptığı için, bir özel ad olarak kabul edilmelidir. Bir kavramı dilegetiren sözcük veya "ein" gibi belirsiz bir tanımlığm kullanıldığı niteleme (mavi bir kalem), tekil ve belirlenmiş bir nesneye gönderme yapmadığı için bir özel ad değildir. Ayr. bkz. Sunuş, s.44-47 (ç.n.)

bazıları, aritmetikte kullanıldığı haliyle "*a*" harfinin hangi anlama geldiğini söylemenin de olanaksız olmasma işaret ederek bu soruyu yanıtlamayı reddedecektir; eğer "*a*, bir sayıya gönderme yapmaktadır" dersek, burada da, "bir sayısı bir şeydir" tanımında gördüğümüz hata bulunabilecektir. Şimdi, *a* ile ilgili durumda soruyu yanıtlamamak son derece haklıdır: *a*, ayırt edilebilecek belirli bir sayıya gönderme yapmamaktadır, ancak tümcelerin genelliğini dile getirmeye yaramaktadır. Eğer $a + a - a = a$ ifadesinde, a yerine ifadedeki tüm a'lar için aynı olmak koşuluyla istediğimiz sayıyı koyarsak, her zaman doğru bir denklem [*Gleichung*] elde etmiş oluruz. *a* harfi bu anlamda kullanılmıştır. Ancak, bir sayısı söz konusu olduğunda durum özsel olarak farklıdır. 1 + 1 = 2 denkleminde, 1 yerine her iki konum için bir ve aynı nesneyi, diyelim Ay'ı koyabilir miyiz? Aksine, birinci 1 için ne koyarsak, sanki ikinci 1 için farklı bir şey koymamız gerekirmiş gibi gözüküyor. Niye daha önceki durumda hata olarak görülen bir şeyi tam da burada yapmamız gerekiyor? Ayrıca aritmetik yoluna yalnızca *a* ile devam edemez, onun yanında farklı sayılar arasmdaki bağıntıları genel biçimde ifade edebilmek için *b*, *c* vb. gibi başka harfler de kullanmak zorundadır. Dolayısıyla 1 göstergesinin de, benzer şekilde tümcelere genellik kazandırmak için kullanıldığında, kendiliğinden yeterli olamayacağını varsaymak doğal olacaktır. Bununla birlikte, bir sayısı [*die Zahl Eins*] örneğin kendisiyle çarpıldığında değişmeden kalmak gibi ayırt edilebilecek özellikleriyle, belirli bir nesne olarak görünmekte değil midir? Bu anlamda *a*'nın belirlenebilecek hiçbir özelliği yoktur, çünkü a hakkında öne sürülen her şey tüm sayıların ortak bir özelliğidir; oysa 1^1 = 1 Ay hakkında, Güneş hakkında, Sahra Çölü hakkında, Teneriffa Dağı'nm doruğu hakkında hiçbir şey öne sürmemektedir; çünkü böyle bir bildirimin [*Aussage*] anlamı ne olabilirdi ki?

Bu tür sorular matematikçileri bile hazırlıksız yakalamakta ya da birçoğunu doyurucu bir yanıt verme konusunda sıkıntıya sokmaktadır. Bu durumda bu bilimin kendi nesneleri arasında ilk ve en önde geleni ve görünüşte en yalın olanı hakkında bu kadar karanlık içinde bulunması utanç verici değil midir? Sayının ne olduğunun söylenebileceği konusunda umutlar daha da az. Eğer kapsamlı ve büyük bir bilimin temel bir kavramında

güçlükler ortaya çıkıyorsa, bu güçlüklerin üstesinden gelinceye kadar onu daha yakından incelemek kesinlikle zorunlu bir ödevdir; özellikle, aritmetiğin bütün yapısının temellerine ilişkin kavrayışımız hâlâ kusurlu oldukça, negatif sayılarla, kesirli sayılarla veya karmaşık sayılarla ilgili yanları çok zorlukla aydınlatabiliriz.

Elbette birçok kişi bunun uğraşmaya değer bir şey olmadığını düşünecektir. Doğal olarak onlar, konunun nihai olarak ortaya konduğu temel ders kitaplarında bu kavramla yeterince uğraşılmış olduğunu varsaymaktalar. Böylesine basit bir konu üzerine hâlâ öğrenilebilecek bir şeyler olduğuna kim inanabilir ki? Her türlü zorluktan uzak bir kavram olan pozitif tamsayı kavramının çocuklar için verilen bir açıklamasının hem bilimsel, hem de nihai olduğu kabul edilmektedir; öyle ki, sanki her okul çocuğu başkalarının bu konuda ne düşündüğü hakkında fazla kafa yormadan, pozitif tamsayı kavramı hakkında bilinebilecek her şeyi bilmektedir. Böylece herhangi bir şeyi öğrenmenin şu ilk önkoşulu çoğu zaman eksik kalmaktadır: Bilmediğimizin bilgisi. Herbart'm[1] çalışmasından sonra daha iyi bir öğreti varolsa da, sonuç olarak hâlâ çok ham ve işlenmemiş durumdaki görüşlerle yetinmekteyiz. Bir zamanlar edinilmiş bilgilerin böyle bir anlayış içinde nasıl her zaman kaybolma tehdidiyle karşı karşıya olduğu ve kibirimiz yüzünden bu tür çalışmaların sonuçlarını benimseme zahmetine bile gerek duymadığımızdan, bu kadar çalışmanın boşa gitmiş olduğunu görmek üzüntü verici ve cesaret kırıcıdır. Benim bu çalışmamın da böyle bir risk taşıdığının farkındayım. Hesaplamanın "yığışımsal mekanik düşünce"[2] olarak betimlenmesi, beni şaşırtan son derece kaba bir yaklaşımdır. Böyle bir betimlemeye karşılık gelen bir düşüncenin olduğundan kuşkuluyum. Yığışımsal tasarımlamaya* (*Aggregatives Vors-*

1 *Sämmtliche Werke* [Toplu Yapıtlar], ed. von Hartenstein, Cilt X, Kıs. i, Umriss pädagogisher Vorlesungen, P 252, n. 2: "İki, iki şey anlamına gelmiyor, çiftleme anlamına geliyor", vb.

2 K. Fisher, *System der Logik und Metaphysik oder Wissenschaftslehre*, 2. Bas., 94.

* Frege, "tasarım" [*Vorstellung*] terimini psikolojik anlamda, yani bir sözcüğü duyduğumuzda veya okuduğumuzda zihnimizde oluşan öznel imgeler veya öznel çağrışımlar anlamında kullandığını ifade ediyor. Ayr. bkz. Sunuş s. 21 ve § 27 dipnot (ç.n.)

tellen) bile belki izin verilebilir; ancak bunun hesaplamayla bir ilgisi yoktur. Düşünce özsel olarak her yerde aynıdır; düşünülen farklı nesnelerin türüne uygun gelecek farklı türden düşünce yasalarının olduğu görüşü doğru değildir. Fark yalnızca düşüncenin daha çok ya da daha az saf olmasından ve psikolojik etkilere ve dil, rakamlar vb. dışsal desteklere daha az ya da daha çok bağımlı olmasından ve bir de, kullanılan kavramların yapılarının ince ayrıntılara sahip olmasından ileri gelmektedir; ancak matematiğin, tüm diğer bilimleri, hatta felsefeyi bile geride bırakması özellikle bu bakımdandır.

Bu çalışma şunu açık kılacaktır ki, matematiğe özgüymüş gibi görünen *n*'den *n* + 1'e giden bir çıkarım bile, aslında genel mantık yasalarına dayanır ve yığışımsal düşüncenin özel yasalarına gerek yoktur. Doğal olarak, sayı göstergeleriyle mekanik işlemler yapmak, tıpkı bir papağan gibi konuşmak olanaklıdır; ancak bu, 'düşünce' adını pek de hak etmemektedir. Bunu hak etmesi, ancak gerçek düşüncenin bir sonucu olarak matematiksel notasyonun, deyim yerindeyse bizim için düşünmeyi gerçekleştirebilecek şekilde gelişmesinden sonra olanaklı olmuştur. Bu durum, kumun kuvars taneciklerinden oluşması gibi, sayının da özel bir mekanik yoldan oluştuğunu kanıtlamaz. Bana göre matematikçiler kendi çalışma alanlarında, çalışmalarının başlıca nesnesinin ve onunla birlikte kendi bilimlerinin de küçük düşmesine neden olacak bu tür görüşlerle mücadele etmelidirler. Ancak matematikçilerin yaptığı çalışmalarda bile benzer ifadeler yer alır. Oysa, aritmetiğin en basit kavramlarından biri bile olsa, sayı kavramının, diğer bilimlerin birçok kavramından çok daha incelikli bir yapıya sahip olduğunun kabul edilmesi eninde sonunda gerekli olacaktır.

Pozitif tamsayılar söz konusu olduğunda gerçekte hiçbir güçlükle karşılaşılmadığı ve tersine bu konuda genel bir görüş birliğinin egemen olduğu yolundaki bu yanılgıyı gidermek için, söz konusu sorunla ilgili matematikçilerin ve filozofların ortaya koymuş olduğu görüşleri ele almanın iyi olacağını düşündüm. Böylelikle onların görüş birliğine vardığı ne kadar az nokta olduğu, hatta birbirleriyle çelişik iddialara sahip oldukları görülebilecektir. Örnek olarak, bazıları "birimlerin [*Einheiten*] birbirleriyle

aynı olduğunu" öne sürerken, diğerleri bunların farklı olduğunu ifade etmektedir; ve her iki tarafın da savlarını desteklemek için kullandığı uslamlamalar, öyle üzerinde kafa yormadan yadsınabilecek gibi değildir. Benim bu eleştirileri yapmaktaki hedefim, daha sağlam bir inceleme için bir istek uyandırabilmektir. Aynı zamanda da, diğerlerinin öne sürmüş olduğu görüşlerin ön incelemesi ile kendi görüşümün karşısındaki engelleri ortadan kaldırmak, böylece diğer yolların hedefe gitmediğini göstermek ve benim görüşümün, diğer görüşlerle aynı kefeye konulamayacağı konusunda önceden ikna olunmasını sağlamaktır; ve böylelikle, umuyorum ki, sorunu, en azından özünde, nihai olarak çözeceğim.

Sonuç olarak, birçok matematikçinin kabul edebileceğinden daha fazla felsefi uslamlamaya yöneldiğimi fark ettim; ancak sayı kavramını çok ayrıntılı bir şekilde ele alan her inceleme her zaman felsefi olmak durumundadır. Böyle bir inceleme hem matematikçiler hem de felsefeciler için ortak bir ödevdir.

Bu iki bilim arasındaki işbirliği, her iki taraftan da yapılan girişimlere karşın, istenildiği ve beklenildiği kadar verimli olmamıştır. Bana göre bunun sebebi, psikolojik inceleme yöntemlerinin felsefedeki egemenliğidir; hatta bu durum mantık alanına bile sıçramıştır. Bu psikolojik eğilim matematikte hoş karşılanan bir şey değildir ve birçok matematikçi tarafından felsefi incelemelere karşı duyulan nefreti de açıklamaktadır. Örnek olarak Stricker,[3] sayı tasarımlarımızı motor fenomenler olarak adlandırdığında ve onları kaslarla ilgili duyumlarımıza bağımlı kıldığında, hiçbir matematikçi böyle bir açıklamada sayıların nerede olduğunu teşhis edememiş ve böyle bir açıklamayla ne yapacağını bilememiştir. Kas duyumları üzerine temellenen bir aritmetiğin yeterince duyusal bir hale geleceği açıktır, ancak bu durumda her nokta bu temeller kadar karanlık ve anlaşılmaz olacaktır. Hayır, duyumların aritmetikle hiçbir ilgisi yoktur. Daha önce duyu izlenimlerinin karışımıyla oluşmuş içsel imgelerin de aritmetikle ilgisi yoktur. Bu tür zihinsel oluşumların değişkenliği ve belirlenmemişliğinin tam karşıtı olarak, matematikteki kavramlar ve nesneler belirlenmişliğe ve sağlamlığa sa-

3 *Studien über Association der Vorstellungen.* Viyana 1883, 4. basım.

hiptir. Elbette matematiksel düşünme sırasında meydana gelen tasarımların ve tasarımlardaki değişmelerin incelenmesi bir işe yarayabilir; ancak psikoloji, aritmetiğin temellerine ilişkin herhangi bir şeye katkıda bulunabileceği kuruntusuna kapılmamalıdır. Matematikçilere göre bu tür içsel imgelerin, kökenleri ve dönüşümleri itibariyle konuyla bir ilgisi yoktur. Stricker, "yüz" sözcüğüne bağladığı tek tasarımın 100 göstergesi olduğunu söylemektedir. Başkaları da "C" harfinin ya da başka bir şeyin tasarımına sahip olabilirler; şimdi bundan, bizi ilgilendirdiği kadarıyla ve sorunun özü itibariyle, bu içsel imgelerin konuyla hiç ilgisi olmadığı ve tümüyle rastlantısal olduğu, tebeşir ve karatahta kadar rastlantısal olduğu ve gerçekten de yüz sayısının tasarımı olarak anılmayı hak etmedikleri sonucu çıkmıyor mu? Öyleyse, konunun özünün bu tür öznel tasarımlarda yattığını hiçbir zaman varsaymayalım. Hiçbir zaman bir tasarımın kökeni ile ilgili bir betimlemeyi bir tanım olarak, veya bir tümcenin bilincinde olmamızı sağlayan ruhsal ve fiziksel koşullarla ilgili bir açıklamayı, o tümcenin ispatı olarak almayalım ve bir tümcenin düşünülmüş olmasıyla, onun doğruluğunu birbirine karıştırmayalım! Şunu hesaba katmalıyız ki, gözlerimizi kapattığımızda Güneş nasıl ortadan yok olmuyorsa, bir tümcenin doğruluğu da, ben onu düşünmeyi bıraktığımda doğru olmaktan çıkmıyor. Aksi takdirde, Pythagoras teoremini kanıtlarken insan beynindeki fosfor miktarını göz önüne almamız gerekirdi; ve bir gökbilimci şöyle bir itirazla karşılaşmamak için uzak geçmiş hakkında sonuçlar çıkarmakta çekimser kalacaktı: "2 x 2 = 4 ettiğini hesaplıyorsun; ama sayı tasarımının bir gelişimi, bir tarihi var! Eskiden de bu aşamaya varılmış olması kuşku götürür. Geçmişte de bu önermenin mevcut olduğunu nereden biliyorsun? O zamanlar yaşamış bulunan insanlar 2 x 2 = 5 önermesini benimsemiş olamazlar mı; ve 2 x 2 = 4 önermesi varolma mücadelesindeki doğal ayıklama yoluyla o eski önermenin evrimi sonucu ortaya çıkmış olamaz mı? 2 x 2 = 4 önermesi de niye aynı evrim sürecinin sonucunda 2 x 2 = 3! önermesine doğru bir gelişim göstermesin?" *Est modus in rebus, sunt certi denique*

* "Şeylerde ölçü vardır, kısaca, belirli sınırlar vardır." Horatius. *Satirae*, Kitap I, I, satır 106. (ç.n.)

*fines!** Şeylerin nasıl ortaya çıktığını ve bu kökenlerden onların doğasına ilişkin bilgiye ulaşmayı amaçlayan tarihsel yaklaşım, elbette tamamıyla meşrudur; ancak bunun da sınırlamaları vardır. Eğer şeylerin sürekli akışı içinde kalıcı, ebedi olan hiçbir şey olmasaydı, dünya hakkında herhangi bir bilgi sahibi olma olanağı ortadan kalkacak ve her şey bir karmaşanın içine düşecekti. Öyle görünüyor ki, kavramların, tıpkı yaprakların bir ağaçta filizlenmesi gibi bireylerin ruhunda da öyle ortaya çıktığını varsayıyoruz; ve kavramların doğalarını, onların doğuşunu inceleyerek bulabileceğimizi düşünüyoruz ve kavramları, insan ruhunun doğasından yola çıkarak psikolojik olarak tanımlayabilmeye çalışıyoruz. Ancak bu yaklaşım her şeyi öznel kılmaktadır ve bu yaklaşımı sonuna kadar izlersek, gerçeği kaybederiz. Kavramların tarihi olarak adlandırılanlar ya kavramların bilgisi hakkındaki bir tarihtir ya da sözcüklerin gönderimleri [*Bedeutungen*] hakkında. Bir kavramın, tinsel gözün [*geistige Auge*] onu görmesini engelleyen fazlalıklardan temizlenerek, kendi saf haliyle bilgisine ulaşılması, çoğunlukla yüzyıllarca süren müthiş bir zihinsel çalışmayı gerektirmiştir. Öyleyse, henüz tamamlanmamış olan bu büyük çalışmayı sürdürmek yerine, bunu hiçe sayanlara, anaokuluna başvuranlara ya da insan evriminin düşünülebilir en eski dönemlerinden medet ummaya girişenlere, orada John Stuart Mill gibi zencefilli çörek ya da çakıltaşı aritmetiğini keşfetmeye çalışanlara ne demeli! Geriye, bir de, sayı kavramındaki özel bir anlamı çöreğin kokusuna atfetmek kalıyor. Böyle bir anlayış akılsal olanın kesinlikle tam karşıtıdır ve her durumda olabilecek en matematik dışı anlayıştır. Matematikçilerin bu anlayışa sırt çevirmelerine şaşmamalı! Varsayılan kaynaklarına yaklaştıkça, kavramların saf bir halde ortaya konulması beklenirken, tam tersine, her şey yine bir sis perdesi ardında ayrışmamış ve bulanık olarak görülüyor. Sanki Amerika hakkında bir şey bilmek isteyen birinin, kendini, Kolomb'un Hindistan olduğunu sandığı yere kuşkuyla baktığı ilk andaki konumuna koyması gerekiyormuş gibi. Doğal olarak böyle bir karşılaştırma hiçbir şeyi kanıtlamaz; ama umuyorum ki, benim yaklaşımımı açık kılmaktadır. Birçok durumda ilk keşifler tarihine yönelik bir inceleme, sonraki araştırmalara bir

hazırlık olarak yararlı olabilir; ancak tarihsel inceleme, sonraki araştırmaların yerine geçmemelidir.

Matematikçileri ilgilendirdiği kadarıyla bu tür görüşlere saldırmak aslında pek de gerekli olmayabilirdi; ancak ele alınan sorunları felsefeciler için de mümkün olduğu kadar çözüme ulaştırmak istediğim için, yalnızca psikolojinin matematiği işgal etmesine karşı çıkmak için bile olsa, kendimi biraz psikoloji alanına da girmek zorunda hissettim.

Ayrıca, matematik ders kitaplarında da psikolojik terimler kullanılmaktadır. Kitabın yazarı kendini bir tanım vermek zorunluluğunda hissettiğinde ve bu tanımı veremeyince en azından söz konusu nesneye ya da kavrama ulaşma yolunu betimlemeye yönelmektedir. Böyle durumlar, bu tür açıklamalara, konunun sonraki sunumları sırasında hiçbir şekilde başvurulmamasından kolayca anlaşılabilir. Öğretim amaçları için, yol gösterici şeyler kesinlikle son derece yerindedir; ancak bunların tanımlardan açıklıkla ayırt edilmeleri gerekir. Matematikçilerin de kanıtlamanın dayandığı temelleri, kanıtlamanın içsel ve dışsal koşulları ile karıştırabildiklerine çok iyi bir örneği E. Schröder vermektedir.[4] "Özel Aksiyom" adı altında Schröder şunu söylüyor: "Aklımdaki ilke, Göstergenin Kararlılığı Aksiyomu [*das Axiom der Inhärenz der Zeichen*] olarak da adlandırılabilirdi. Bu ilke, tüm uslamlamalarımız ve çıkarımlarımız boyunca göstergelerin belleğimizde –veya daha da sağlam şekilde kâğıt üzerinde– sabit kaldığının güvencesini vermektedir..." vd.

Matematik, psikolojiden gelecek her türlü desteği nasıl reddetmek zorunda ise, mantıkla olan yakın beraberliğini de öyle kabul etmelidir. Evet, ben bu ikisi arasında keskin bir ayrım yapmanın olanaksız olduğunu söyleyenlerle aynı görüşü paylaşıyorum. Şu kadarını herkes kabul edecektir ki, bir kanıtlamanın sağlamlığına ya da bir tanımın gerekçelendirilmesine yönelen her inceleme, mantıkla ilgili olmalıdır. Bu incelemeler kesinlikle matematikten dışlanamaz, çünkü ancak onlara yanıt verme yoluyla gerekli kesinliğe ulaşabiliriz.

Bu yönde ilerlerken de, alışılmış olandan daha öteye gideceğim. Birçok matematikçi, gereksinimleri doğrudan karşılan-

4 *Lehrbuch der Arithmetik und Algebra*, [Leipzig 1873].

dığı sürece bu tür incelemelerden memnundur. Eğer bir tanım, kanıtlamalarda kullanılmaya elverişli görünüyorsa, hiçbir çelişkiyle karşılaşılmıyorsa, görünüşte birbirlerinden uzak gibi duran konular arasındaki bağlantılar ortaya çıkarılmışsa ve böylece sıralandırma ve düzende bir ilerleme ortaya çıkıyorsa, tanımın yeterince kabul gördüğü düşünülmekte ve onun mantıksal gerekçelendirilmesine ilişkin çok az soru sorulmaktadır. Böyle bir yöntemin en azından hedefe hiç isabet ettirememeyi zorlaştırması gibi bir yararı vardır. Tanımların kendi değerlerini verimlilikleriyle, onlarla kanıtlamalar yapma olanağıyla göstermeleri gerektiğini ben de kabul ediyorum. Yine de akılda tutulmalıdır ki, yapılan kanıtlamalardaki çıkarım zincirlerinde hiçbir halka eksik olmasa da, tanımların gerekçelendirilmesi yalnızca herhangi bir çelişkiyle karşılaşmamız dolayısıyla daha sonradan eklenen bir düşünce olarak kaldığı sürece kanıtlamaların keskinliği bir yanılsama, bir hayal olarak kalacaktır. Böylece, sadece deneyime bağlı bir kesinliğe ulaşmış olacağız ve en sonunda tüm yapıyı yıkılmaya götürecek bir çelişkiyle karşılaşma olanağı hep olacaktır. İşte bu yüzden, belki birçok matematikçinin zorunlu olduğunu düşündüğünden de fazla, kendimi, bizim bilimimizin genel mantıksal temellerine doğru yönelme zorunda hissettim.

Bu çalışmada üç temel ilkeye bağlı kaldım:

Psikolojik olanı mantıksal olandan, öznel olanı nesnel olandan kesin bir biçimde ayırmak;

Sözcüklerin anlamını/gönderimini [*Bedeutung*] tek başına değil, ancak bir tümce bağlamında [*Satzzusammenhange*] ele almak;

Kavramla nesne [*Gegenstand*] arasındaki ayrımı asla gözden kaçırmamak.

Birinci ilkeye uyarak, "öznel tasarım" [*Vorstellung*] sözcüğünü her zaman psikolojik anlamda kullandım; tasarımları kavramlardan ve nesnelerden ayırdım. Eğer ikinci ilke dikkate alınmazsa, sözcüklerin gönderimlerinin, neredeyse zorunlulukla içsel imgeler veya bireysel ruhun edimleri olduğu kabul

edilebilir ve böylelikle birinci ilkeye de karşı çıkılabilir. Üçüncü ilkeye gelince, bir kavramın, onu başkalaştırmadan bir nesne yapılabileceğini varsaymak bir aldanmadır [*Schein*]. Bundan da, kesirli, negatif, vb. sayılarla ilgili büyük ölçüde kabul görmüş Formalist kuramın savunulamaz olduğu sonucu çıkmaktadır. Bu konuda onlardan nasıl daha iyi bir sonuç ortaya koyacağıma, bu çalışmada yalnızca yüzeysel olarak değinebilirim. Sorun, pozitif tamsayılarda olduğu gibi, her türden sayılarla ilgili bir denklemin [*Gleichung*] anlamını saptama sorunudur.

Öyle sanıyorum ki, ulaştığım sonuçlar, en azından esaslarda, benim uslamlamalarımı dikkate alma zahmetine katlanan matematikçiler tarafından kabul edilecektir. Bu sonuçlar bana havada asılıymış gibi görünüyorlar; ve bu sonuçlardan her biri tek tek ya da en azından benzerleri daha önce öne sürülmüş olabilir; ancak öyle bile olsa, birbirleriyle bu bağlantı içinde sunulduklarında yine de yeni olabilirler. Bazı yazarların benim görüşlerime bir noktada bu kadar yaklaşırlarken, başka bir noktada bundan son derece uzakta olmaları beni kimi zaman çok şaşırtmıştır.

Bu sonuçların kabul edilmesi, felsefecilerin bakış açılarına bağlı olarak değişken olacaktır; ancak muhtemelen bu sonuçlar, en az, tümevarımı yegâne asıl çıkarım süreci olarak gören, hatta bunu da bir çıkarım süreci değil, bir alışkanlık olarak gören Deneyciler tarafından benimsenecektir. Belki kimileri bu fırsatı kendi bilgi kuramını yeniden incelemek için değerlendirecektir. Benim tanımlarımı doğal bulmayarak eleştirme eğiliminde olanlara, bu tanımların doğal olup olmadığı üzerinde değil, ama sorunun köküne inilip inilmediği ve mantıksal olarak ortaya atılıp atılamayacağı üzerinde düşünmelerini öneririm.

Burada yazdıklarımı herhangi bir önyargı olmadan okumaları halinde, felsefecilerin de bu sonuçlarda işe yarar bir şeyler bulabileceklerini umut etmek istiyorum.

§ 1. Matematik, Eukleides'ten gelen kesinlik ve keskinlik ölçütlerinden uzun bir süre ayrı kaldıktan sonra, şimdi onlara geri dönüyor, hatta onların da ötesine giden çabalarda bulunuyor. Belki de yöntem ve kavramlarmm çoğunun Hindistan'dan kaynaklanması nedeniyle, aritmetik, büyük ölçüde Eski Yunan'da geliştirilmiş geometriye göre daha az kesinlikli akıl yürütme geleneğine sahip olmuştur. Yüksek analizin keşfi bu eğilimi yalnızca hızlandırmıştır; çünkü bir yandan bu alanın keskinlikle ele alınmasında büyük, neredeyse aşılamaz zorluklarla karşılaşılırken, diğer yandan da bu çabalar, zorlukların aşılmasında pek işe yaramıyormuş gibi görünmektedir. Bununla birlikte, daha sonraki gelişmeler, birçok başarılı uygulama ile desteklenmiş olsa da kesinlik taşımayan kanaatlerin matematikte yeterli olmadığını giderek daha açıklıkla göstermiştir. Önceden kendinden apaçık kavranabilir kabul edilenler için artık kanıtlama beklenmektedir. Geçerliliğinin sınırları da böylece ilk kez ortaya konmuş olmaktadır. Fonksiyon, süreklilik, limit ve sonsuzluk kavramları da daha keskin bir tanımlama gereğiyle karşı karşıyaydı. Çok uzun bir zamandan beri bilime kabul edilmiş olan negatif ve irrasyonel sayılar, güvenilirlikleri hakkında çok daha sıkı bir incelemeye tâbi tutulmalıydı.

Aynı çaba her yerde görülmektedir: kanıtlamada keskinlik, geçerlilik alanının sınırlarının hassas bir şekilde çizilmesi ve bunları yapabilmek için kavramların keskin bir şekilde tanımlanması.

§ 2. Bu yol bizi, sonuçta sayal sayı* kavramına ve tüm aritmetiğin temelini oluşturan pozitif tamsayılar hakkındaki en yalın

* Frege, "sayı" sözcüğü için *Zahl* ve *Anzahl* terimlerini kullanıyor. *Zahl* genel anlamda sayı kavramıdır. *Anzahl* ise, sayal (kardinal) sayı anlamındadır; sayal sayı, bir kümenin öğelerinin toplam sayısını veren, yani "kaç tane" sorusuna yanıt veren tamsayıdır. Frege'nin bu çalışmada konu aldığı *Anzahl*'dır (Ayr. bkz. 7. dipnot). Çeviride *Zahl* için "sayı", *Anzahl* için ise "sayal sayı" sözcükleri kullanılmıştır.

önermelere götürmelidir. Doğal olarak, 7 + 5 = 12 gibi sayısal ifadeler ve Toplamanın Birleşme Yasası gibi yasalar her gün yapılan sayısız uygulamalarla o kadar çok doğrulanmıştır ki, onların kanıtlanmalarını isteyerek onları tartışma konusu yapmak neredeyse gülünç gözükebilir. Ancak, bir kanıtlamanın olanaklı olduğu her yerde, kanıtlamayı, tümevarımla onaylamaya tercih etmek matematiğin doğasmda bulunmaktadır. Eukleides, herkesin sorgusuzca kabul edeceği birçok şeyin kanıtlamasını vermişti. Ve insanlar Eukleides'in keskinlik ölçülerinden bile tatmin olmayı kabul etmedikleri zaman, Paraleller Aksiyomuyla gündeme gelen araştırmalara yönelmişlerdi.

En yüksek kesinliğe ve keskinliğe ulaşmaya yönelen her hareket, böylece başlangıçta hissedilen gereksinimin çok ötesine geçmiş; giderek daha çok yayılmış ve güçlenmiştir.

Aslında kanıtlamanın amacı, bir tümcenin doğruluğunu her türlü kuşkunun ötesinde sağlamak değildir yalnızca; ayrıca doğrulukların birbirlerine olan bağımlılığı hakkında bize bir kavrayış sağlamaktadır. Büyük bir kaya kitlesini yerinden oynatmak için yapılan başarısız girişimler sonucunda, bu kayanın yerinden oynatılamaz olduğuna ikna olduktan sonra, ortada şu soru kalıyor: Ona böylesine güvenli bir dayanak sağlayan nedir? Bu incelemeleri ne kadar ileri götürürsek, her şeyi onlara indirgeyebileceğimiz ilksel doğrulukların sayısı o kadar azalır; ve bu sadeleştirme kendi içinde izlemeye değer bir hedeftir. Belki bu, insanların en basit durumlarda içgüdüyle yapmış olduklarında evrensel olarak nelerin geçerli olduğunu çekip çıkarma yoluyla, kavram oluşturmanın ve temel ilkelerin genel yöntemlerinin daha karmaşık durumlara da uygulanabilmesini sağlayabilir.

§ 3. Bu tür incelemelere yönelmemin arkasında felsefi saikler de var. Aritmetiksel doğrulukların a priori mi yoksa a posteriori mi, sentetik mi, analitik mi olduğuna dair sorulan sorular da çözüme kavuşturulmayı beklemektedir. Çünkü söz konusu kavramlar felsefeye ait olsalar da, inanıyorum ki, matematiğin yardımı olmadan bu sorular hakkında herhangi bir karara varılamaz. Ancak bu yaklaşım, elbette bizim o sorulara yüklediğimiz anlamlara da bağlıdır.

Bir tümcenin önce içeriğini keşfetmek ve ancak daha sonra, başka ve daha zor yollarla onun kesin kanıtlamasını vermek çok ender olan bir şey değildir; bu aynı kanıtlama çoğunlukla, ilk tümcenin geçerlilik koşullarını daha ayrıntılı ortaya çıkarmaktadır. Demek ki, genelde, bir yargının içeriğine nasıl ulaştığımız sorusunu, onun öne sürülmesinin gerekçelendirilmesini nereden türettiğimiz sorusundan ayırt etmeliyiz.

A priori ile a posteriori, sentetikle analitik arasındaki ayrımlar, benim düşünceme göre,[5] yargının içeriğiyle ilgili değil, yargıda bulunmanın gerekçelendirilmesiyle [*Berechtigung*] ilgilidir. Böyle bir gerekçelendirmenin olmadığı durumda, ayrımları yapabilmenin olanağı ortadan kalkmaktadır. A priori bir hata, mavi bir kavram kadar anlamdan yoksun bir şeydir. Bir tümceye, benim anladığım anlamda a posteriori ya da analitik denildiğinde, böyle bir yargı, ne bu tümcenin içeriğinin bizim bilincimizde oluşmasının olanağını sağlayan psikolojik, fizyolojik ve fiziksel koşullarla ilgilidir, ne de diğer insanların belki yanlışlık sonucu tümcenin doğru olduğuna inanma şekline ilişkindir; aksine, bu yargı, o tümcenin doğru kabul edilmesini sağlayan gerekçelendirmenin dayandığı nihai zemin hakkındadır.

Bunun anlamı, bu sorunun psikoloji alanından çıkarılması ve eğer söz konusu doğruluk matematiksel bir doğruluksa, onun matematik alanına bağlanmasıdır. Aslında sorun, tümcenin kanıtlanmasını ortaya koymak ve onu ilksel doğruluklara [*Urwahrheiten*] kadar izlemektir. Bu yolda, sonunda karşımıza sadece genel mantık yasaları ve tanımlar çıkıyorsa, ulaştığımız doğruluk analitik bir doğruluktur; şunu da aklımızda tutmalıyız ki, tanımlardan herhangi birinin kabul edilebilirliğinin dayandığı tüm tümceler de hesaba katılmalıdır. Bununla birlikte, eğer bir kanıtlamayı sadece genel mantıksal doğruluklarla yapabilmek mümkün değilse ve bunun için özel bir bilim alanının doğrulukları da gerekiyorsa, bu tümce sentetik bir tümcedir. Çünkü bir doğruluk a posteriori ise, onun kanıtlanması olgulara başvurulmadan yapılamaz; yani, tikel nesneler hakkında bildi-

5 Bununla doğal olarak, bu terimlere yeni anlamlar yüklemek istiyor değilim, yalnızca daha önceki düşünürlerin ve özellikle Kant'ın bunlarla ne anlatmak istediğini doğru dile getirmeyi istedim.

rimler içerdiği, kanıtlanamayan ve tümel olmayan doğruluklara başvurulduğu için. Buna karşılık, kanıtlanması tümüyle tümel yasalar aracılığıyla yapılabiliyorsa ve bu yasaların kendileri de kanıtlanamıyor ve de kanıtlama gerektirmiyorsa, bu doğruluk a prioridir.[6]

§ 4. Bu felsefi sorulardan yola çıkarak, bunlardan bağımsız olarak matematik alanında da ortaya çıkmış olan aynı talebi formüle etmeye yol açmış oluyoruz, yani aritmetiğin temel önermelerinin [*die Grundsätze der Arithmetik*], eğer olanaklı ise en büyük keskinlikle kanıtlanması gerektiği sonucuna yol açmış oluyoruz; çünkü, ancak tümdengelimli çıkarımlar zincirindeki her boşluk büyük bir özenle giderildikten sonra, kanıtlamaların dayandığı ilksel doğrulukların neler olduklarını kesinlikle söyleyebilir duruma geliriz; ve ancak tüm bunlar bilindiği zaman başlangıçta sorduğumuz soruyu yanıtlamamız mümkün olur.

Şimdi, bu talebi karşılamayı deneyecek olursak, tümcelerle karşılaşırız ki, bu tümcelerde yer alan kavramları en yalın kavramlara kadar çözümlemediğimiz ya da onları daha büyük bir genellik taşıyan başka bir kavrama indirgemediğimiz sürece, bu tümceleri kanıtlayamayız. Şimdi bu noktada, sayal sayının tanımlanması mı gerektiği, yoksa tanımlanmamış olarak mı kabul edileceği sorunu her şeyin üstündedir. Bu kitabın ortaya koymak istediği nokta tam da budur.[7] Aritmetiğin yasalarının doğası hakkındaki karar, bu çalışmanın sonucuna bağlı olacaktır.

Bu soruları kendim ele almadan önce, başkalarının bu konudaki yanıtları hakkında bazı noktalara işaret edeceğim. Eğer diğer görüşler açısından da aritmetiğin temel ilkelerinin analitik olduğunu kabul etmek için gerekçeler varsa, bu gerekçelerin,

6 Tümel doğrulukların olduğunu kabul ediyorsak, böyle ilksel yasaların olduğunu da kabul etmek durumundayız; çünkü bir yasa sağlamlığında olmadıkları sürece, yalnızca tekil olgulardan hiçbir şey çıkmaz. Tümevarımın kendisi, tümevarımsal yöntemin bir yasanın doğruluğunu ya da en azından olasılığını ortaya koyabileceğine ilişkin tümel yasaya dayanmaktadır. Bunu yadsıyacak olursak, tümevarım, psikolojik bir görünüşten, insanları bir tümcenin doğruluğuna inandırmaya götürürken, ona inanılması için gerekli hiçbir gerekçelendirme çabasını göstermeyen bir yöntemden öte bir şey olmayacaktır.

7 Başka bir uyarı yapılmadıkça, tartışmaya konu olan yegâne "sayılar", "Kaç tane" sorusuna yanıt veren pozitif tamsayılardır.

temel ilkelerin kanıtlanabilirliği ve sayal sayı kavramının tanımlanabilir olması hakkında da bize bir şeyler söylemeleri gerekir. Öte yandan aynı doğrulukların a posteriori olduğuna dair düşüncelerin tam karşıt yönde bir etkisi olacaktır. Dolayısıyla, öncelikle bu tartışmalı konuların incelenmesi yerinde olacaktır.

I. Bazı Yazarların Aritmetiksel Önermelerin Doğası Hakkındaki Görüşleri.*

Sayısal İfadeler Kanıtlanabilir mi?

§ 5. Belirli sayılarla ilgili olan 2 + 3 = 5 gibi sayısal ifadeleri, tüm tamsayılar için geçerli olan genel [tümel] yasalardan ayırt etmemiz gerekir.

Bazı filozoflar[8] sayısal ifadeleri, kanıtlanamayan ve aksiyomlar gibi dolaysızca kendinden apaçık ifadeler olarak kabul ettiler. Kant,[9] onların kanıtlanamaz ve sentetik olduklarını ifade etti, ama onlara aksiyom demekte duraksadı, çünkü bunlar genel değildi ve sayıları sonsuzdu. Hankel[10] haklı olarak bu sonsuz sayıdaki kanıtlanamaz ilksel doğruluklar anlayışını, uygunsuz ve paradoksal olarak niteledi. Buradaki durum, aklın ilk ilkelerin açıklığına ilişkin gereksinimine aykırı düşüyordu. Üstelik,

$$135\,664 + 37\,863 = 173\,527$$

işlemi gerçekten de kendinden apaçık mıdır? Değildir! Ve Kant, bu önermelerin sentetik doğalarına bir kanıt olarak göstermektedir bunu. Aslında bu sayısal ifade, daha çok onların kanıtla-

* *Tümce* ve *önerme* terimlerinin kullanımı hakkında bkz. Sunuş. s. 37-38. (ç.n.)

8 Hobbes, Locke, Newton. Karş. Baumann, *Die Lehren von Zeit, Raum und Mathematik.* Cilt I, s. 241 ve 242, s. 365, s. 475.

9 *Kritik der reinen Vernunft.* Toplu Yap. ed. Hartenstein. III. s. 157 [A 164/B 205].

10 *Vorlesungen über die complexen Zahlen und ihren Functionen*, s. 53.

namaz olmasına karşı bir şey söylemektedir; çünkü, bunların dolaysızca kendinden apaçık olmadıklarını görerek onların doğru olduğunu, kanıtlama yoluyla değilse, başka türlü nasıl anlayabiliriz? Kant, bu konuda parmakların ya da noktaların görüsünden [*Anschauung*] yararlanabileceğini düşünüyor, dolayısıyla da kendi düşüncesine karşıt olarak bu önermelerin deney kökenli olduğu düşüncesine sürüklenme tehlikesini beraberinde getiriyordu; çünkü 37 863 parmakla ilgili görümüz ne olursa olsun, en azından bu görü kesinlikle saf değildir. Üstelik "görü" terimi burada pek uygun görünmüyor, çünkü 10 parmak bile farklı bir yerleştirmede çok farklı görülere neden olabilmektedir. Ve 135 664 parmağın ya da noktanın görüsüne gerçekten sahip miyiz? Eğer bu görüye ve 37 863 parmakla ilgili bir diğer görüye ve 173 527 parmakla ilgili bir üçüncüsüne sahip olsaydık, bu durumda, sayısal ifademiz kanıtlanamaz olsaydı bile, onun doğruluğu, en azından parmaklara uygulandığında açık olmalıydı; ama böyle değildir.

Belli ki, Kant yalnızca küçük sayılar hakkında düşünüyordu. Öyleyse, her ne kadar küçük sayılarla ilgili sayısal ifadeler görü aracılığıyla dolaysızca kendinden apaçık olsalar da, büyük sayıları kapsayan sayısal ifadelerin de kanıtlanabilir olması gerekecekti. Ancak büyük ve küçük sayılar arasında temel bir ayrım yapmak, özellikle de aralarında keskin bir ayırma çizgisi belirlemenin çok zor olması nedeniyle pek uygun gözükmüyor. Eğer, örneğin 10'dan sonra gelen sayısal ifadeler kanıtlanabiliyor olsaydı, "5'ten, 2'den veya 1'den sonrakiler neden kanıtlanabilir olmasın" diye sormak son derece haklı olacaktı.

§ 6. Diğer filozoflar ve matematikçiler, sayısal ifadelerin kanıtlanabilir olduklarını öne sürmüşlerdir. Leibniz[11] şöyle demektedir:

"2 artı 2'nin 4 olması dolaysız bir doğruluk değildir; 3 artı 1'in 4'ü ifade ettiğini kabul etmemiz koşuluyla. Bunun kanıtlaması aşağıdaki gibi yapılabilir:

11 *Nouveaux Essais*, IV, § 10 (Leibniz'in Toplu Yapıtları, Erdmann edisyonu, Berlin 1840, s. 363).

Tanımlar: 1) 2, 1 artı 1'dir.
2) 3, 2 artı 1'dir.
3) 4, 3 artı 1'dir.

Aksiyom: Eğer eşit olanların yerine onların eşiti konursa, eşitlik korunur.

Kanıtlama: $2 + 2 = 2 + 1 + 1$ (Tanım 1'den) $= 3 + 1$ (Tanım 2'den) $= 4$ (Tanım 3'ten).

Demek ki, $2 + 2 = 4$ (Aksiyomdan)

İlk bakışta, bu kanıtlama tümüyle, verilen tanımlarla ve aksiyomla inşa edilmiş gibi görünüyor. Ve yine bu aksiyom, Leibniz'in bizzat kendisinin başka bir yerde yaptığı gibi bir tanıma dönüştürülebilir.[12] Sanki 1, 2, 3, 4 hakkmda tanımlarda yer alandan daha fazla bir şey bilmemize gerek yokmuş gibi gözüküyor. Bununla birlikte, daha dikkatle baktığımızda, kanıtlamada, ayraçların ihmal edilmesi yüzünden saklı kalmış bir açık bulabiliriz. Tam kesinliği sağlamak için kanıtlamayı şu şekilde yazmamız gerekir:

$$2 + 2 = 2 + (1 + 1)$$
$$(2 + 1) + 1 = 3 + 1 = 4$$

Burada eksik olan

$$2 + (1 + 1) = (2 + 1) + 1$$

önermesidir, bu da,

$$a + (b + c) = (a + b) + c$$

önermesinin özel bir durumudur. Eğer bu yasayı varsayarsak, her toplama formülü için benzer bir kanıtlama verebileceğimiz kolaylıkla görülebilir. Yani, her sayı, kendinden önce gelenle tanımlanmaktadır. Aslında 437 986 gibi bir sayının Leibniz'in yaptığından daha uygun bir biçimde bize nasıl verilebileceğini de görmemekteyim. Hatta onunla ilgili hiçbir öznel tasarımımız olmasa da, yine de bu yolla onu rahatlıkla elde edebiliriz. Böyle tanımlar aracılığıyla tüm sonsuz sayılar kümesini bir sayısına indirgeriz ve onu birle arttırırız, böylelikle sonsuzca çok sayısal ifadeden her biri birkaç genel (tümel) önermeden hareketle kanıtlanabilir.

12 Non inelegans specimen demonstrandi in abstractis. Erdmann edisyonu, s. 94.

Bu görüş H. Grassmann ve H. Hankel tarafından paylaşılmaktadır. Grassmann, aşağıdaki yasayı:

$$a + (b + 1) = (a + b) + 1$$

bir tanım aracılığıyla elde etmeye çalışmıştır:[13]

"Eğer a ve b, temel dizinin herhangi iki üyesiyse, a + b toplamıyla,

$$a + (b + e) = a + b + e$$

ifadesinin geçerli olduğu temel dizinin üyesi anlaşılmalıdır."

Burada e, artı bir birim [*Einheit*] anlamında alınmalıdır. Bu tanım iki şekilde eleştirilebilir. İlkin, toplam, kendisi cinsinden tanımlanmıştır. Henüz a + b'nin neye gönderme yaptığını [*bedeuten*] anlamamışsak, a + (b + e) dilegetirişininkini de anlamayız. Bununla birlikte, (metne açıkça ters düşerek) tanımlamaya çalıştığının toplam değil, toplama olduğunu söyleyerek bu karşı çıkış bir kenara bırakılabilir. Bu durumda eleştiriye yine devam edilebilir: Eğer temel dizinin, saptanmış koşulu sağlayan hiçbir üyesi yoksa ya da birçok üyesi varsa, a + b boş bir gösterge [*Zeichen*] olacaktır. Aslında bu durumun hiçbir zaman meydana gelmediğini, Grasmann kanıtlama olmadan sadece varsaymaktadır; bu durumda onun yönteminin keskinliği yalnızca görünüştedir.

§ 7. Sayısal ifadelerin, onların kanıtlanabilmelerinin dayanağını sağlayan genel yasalara göre sentetik ya da analitik, a posteriori ya da a priori oldukları düşünülebilir. Ancak John Stuart Mill karşıt görüştedir. Aslında ilk bakışta, o da Leibniz gibi, bu bilimi tanımlar üzerinde temellendiriyor görünmektedir,[14] çünkü Mill de her tekil [*einzelnen*] sayıyı Leibniz'in yaptığı gibi tanımlamaktadır; ancak sağlam görünen bu düşünce kıvılcımı, Mill'in tüm bilgiyi deney kökenli (empirik) kabul eden anlayışı sayesinde daha parlamadan sönüyor. Mill, aslında bu tanımların mantıksal anlamda tanım olmadıkları konusunda bizi bilgilendiriyor;[15] bu tanımlar yalnızca bir terimin gönderimini [*Bedeutung*] saptamakla kalmıyor, ayrıca bu tanımla birlikte gözlemlenmiş olgu

13 *Lehrbuch der Mathematik für höhere Lehranstalten*. Kıs. I. Arithmetik, s. 4. Stettin 1860.

14 *System of Logic*, Kit. III, Böl. xxiv, § 5 (Almanca çev. J. Schiel).

15 A.g.y., Kit. II, Böl vi, § 2.

durumları hakkında da bir sav ileri sürüyor. Ancak, 777 864 sayısının tanımında ileri sürülen olgu, gözlemlenmiş hangi olgu ya da (Mill'in bir diğer ifadesini kullanarak) fiziksel olgu olabilir ki? Mill, karşımızda açılan son derece zengin fiziksel olgular dünyasından bize sadece bir tanesini belirtiyor: 3 sayısının tanımında öne sürülen olguyu. Mill'e göre bu durum, nesne toplulukları duyularda °∘° etkisi yaparken, bunların ∞ ∘ şeklinde de iki parçaya ayrılabileceği olgusuna dayanmaktadır. Neyse ki, dünyadaki her şey yerlerine çiviyle çakılmamıştır; çünkü eğer bu lütuf olmasaydı, bu ayırmayı beceremezdik ve bu yüzden 2 + 1, 3 olamazdı! Aslında Mill'in 0 ve 1 sayılarının arkasındaki fiziksel olguları gözler önüne sermemesi de büyük kayıp!

Mill, sözlerini şöyle sürdürüyor: "Bu önerme kabul edildiğinde, buna benzer tüm bölükleri 3 olarak adlandırıyoruz". Bu dilegetirişten, saat üçü çaldığında, üç vuruştan söz etmenin veya tatlı, ekşi ve acıyı üç tat duyumu olarak adlandırmanın gerçekte haklı olmadığı sonucunun çıktığını görebiliriz; "bir denklemi çözmenin üç yolu" dilegetirişi de aynı şekilde sağlam bir dilegetiriş olmayacaktır. Çünkü bunlardan hiçbiri duyumlarımızı hiçbir zaman °∘° şeklinde etkilememektedir.

Mill'e göre, "hesaplamalar, tanımın kendisinden değil, gözlemlenmiş olgu durumlarından gelmektedir". Ancak Leibniz, 2 + 2 = 4 önermesinin yukarıda verilen kanıtının hangi noktasında söz konusu olgulara başvurmak zorundadır? Mill, 5 + 2 = 7 önermesinin Leibniz'in düşüncesine tümüyle uygun bir kanıtlamasını vermekle birlikte, kanıtlamadaki eksikliğe işaret etmeyi ihmal etmiştir.[16] Gerçekten de, ayraçların ihmal edilmesinden dolayı kanıtlamada bir eksiklik vardır; ancak Mill de, Leibniz gibi bunu gözden kaçırmaktadır.

Eğer her bir tekil sayının tanımı gerçekten özel fiziksel bir olgu öne sürüyorsa, dokuz haneli sayılarla hesap yapan birine, fiziksel olaylar hakkındaki bu bilgisi için duyduğumuz hayranlık hiçbir zaman yeterli olmayacaktır. Bu arada belki de Mill, tüm bu olguların tam olarak gözlemlenmeleri gerektiğini söyleyecek kadar ileri gitmiyordur, ama tümevarım yoluyla tüm bunların içine dahil edildiği genel bir yasa türetmenin yeterli olacağını dü-

16 A.g.y., Kit. III, Böl. xxiv, § 5.

şünüyordur. Ancak bu yasayı formüle etmek denendiğinde, olanaksız olacağı görülecektir. "Ayrıştırılabilecek şeylerden oluşan çok geniş topluluklar vardır" demek yeterli değildir. Çünkü bu dilegetiriş bu kadar geniş ve diyelim 1,000,000 sayısının tanımlanmasını gerektiren topluluklar olduğunu öne sürmemektedir, ayrıca bu topluluğun nasıl bölünebileceğini de belirtmemiştir. Mill'in kuramı, her sayı için özgül olarak bir olgunun gözlemlenmesi gerektiği sonucuna zorunlu olarak götürmektedir, çünkü genel bir yasada 1,000,000 sayısına özgü olan ve zorunlulukla onun tanımına ait olan ortadan kaybolacaktır. Mill'e göre, şeyler topluluğunun tam da bu şekilde kendine özgü ayrışmasını gözlemlemeden 1,000,000 = 999,999 +1 ifadesini yazamayız.

§ 8. Mill, bunların karşılık geldiği olgular gözlemlenmedikçe veya gözleninceye kadar 2 = 1 + 1, 3 = 2 + 1, 4 = 3 + 1 vb. gibi tanımlamaların yapılmaması gerektiğini düşünüyor gibidir. Aslında (2 + 1)'e bir anlam yüklenmedikçe, 3'ün, (2 + 1) olarak tanımlanmaması gerekir. Ancak soru, bunun için onun parçalarını ve ayrışmalarını gözlememiz gerekip gerekmediğidir. Eğer bu tanımlamalarda böyle bir gözlem gerekiyorsa, 0 sayısı bir sorun olarak ortaya çıkacaktır; çünkü şimdiye kadar hiç kimsenin 0 çakıltaşını gördüğünü veya ona dokunduğunu sanmıyorum. Doğal olarak Mill 0'ı anlam içermeyen bir şey, yalnızca bir ifade tarzı olarak açıklayacaktı; 0'la yapılan hesaplamalar, boş göstergelerle oynanan bir oyun olacaktı sadece; ve bundan akla uygun bir şey çıkacak olsaydı, işte bu şaşırtıcı olurdu. Bununla birlikte, eğer bu hesaplamalar ciddi bir anlam taşıyorsa, bu durumda 0 göstergesinin tümüyle anlamdan yoksun bir şey de olmaması gerekir. Böylece, tıpkı 0 durumunda olduğu gibi, 2 + 1'in de Mill'in istediği gibi gözlenmiş bir olgu olmadan da bir anlamı olabilir. Şimdi kim, on sekiz basamaklı bir sayının tanımlanmasında, Mill'in istediği şekilde bir olguyu gözlemlemiş olduğunu öne sürecektir ve kim, böyle bir sayının buna rağmen anlamlı olduğunu yadsıyacaktır?

Belki fiziksel olguların yalnızca küçük sayılar için, diyelim 10'a kadar olan sayılar için kullanıldığı ve geri kalan sayıların bunlarla inşa edildiği varsayılıyor. Ancak, eğer 11'i, bu sayıya

karşılık gelen topluluğu görmeden basitçe tanım yoluyla 10 ve 1'den oluşturabiliyorsak, bu durumda 2 sayısını da aynı şekilde 1 ve 1'den kalkarak oluşturamamamız için hiçbir sebep yok demektir. Eğer 11 sayısıyla yapılan hesaplamalar, yalnızca bu sayıya özgü olan bir olgu durumundan gelmiyorsa, 2 sayısıyla yapılan hesaplamaların, belirli bir topluluğa ve bu topluluğun kendine özgü bir biçimde ayrılmasının gözlemlenmesine bağlı olması gerektiği nasıl öne sürülebilir?

Eğer duyularımız aracılığıyla hiçbir şeyi ayırt edemiyorsak ya da en fazla üç şeyi ayırt edebiliyorsak, aritmetiğin nasıl varolabileceği sorulabilirdi belki de. Böyle bir durumda, bizim aritmetiksel önermeler ve onların uygulamaları hakkmdaki bilgimiz tehdit altında kalabilirdi; ancak bu, aritmetiksel önermelerin doğruluğunu da etkileyecek midir? Eğer biz bir tümcenin deney kökenli [*empirisch*] olmasını, onun içeriğinin bilincinde olmamız için gözlem yapmamız gerektiği bağlamında öne sürüyorsak, bu durumda "deney kökenli" sözcüğünü "a priori" sözcüğüne karşıt olacak bir anlamda kullanmıyoruz demektir. Burada, tümcenin yalnızca içeriğini ilgilendiren psikolojik bir bildirimde bulunuyoruz; tümcenin doğru olup olmadığını ise dikkate almıyoruz. Bu anlamda Münchhausen'in tüm öyküleri de deney kökenlidir; çünkü bunların hayal edilebilmeleri için her çeşit gözlemin yapılması gerekmektedir.

Aritmetiğin Yasaları Tümevarımsal Doğruluklar mıdır?

§ 9. Şimdiye kadar ortaya konan düşünceler, sayısal ifadelerin bazı genel yasalar aracılığıyla yalnızca tekil sayıların tanımlarından türetilebilmelerinin olanaklı olduğunu ve bu tanımların gözlemlenmiş olguları öne sürmediğini ve kendi meşrulukları için onları gereksinmediklerini göstermiştir. Dolayısıyla, bundan sonraki hedefimiz, söz konusu yasaların doğasını soruşturmak olmalıdır.

Mill,[17] 5 + 2 = 7 sayısal ifadesinin daha önce söz edilen kanıtlanmasında, "Parçalardan meydana gelenler, bu parçaların par-

17 A.g.y., Kit. III, böl. xxiv, § 5.

çalarından meydana gelmişlerdir" ilkesini kullanmayı önermektedir. Mill, bu ilkenin, "Eşitlere eşit şeyler eklenirse toplamlar da eşittir" biçimindeki ilkenin daha özelleşmiş bir dilegetirilişi olduğunu düşünmektedir. Bunu tümevarımsal bir doğruluk ve en yüksek düzeyde bir doğa yasası saymaktadır. Uygulanmasının kaçınılmaz olduğunu düşündüğü bir noktada Mill'in bu ilkeye hiç başvurmaması, sunuşunun sağlam olmadığının bir işaretidir. Bununla birlikte, Mill'in bu tümevarımsal doğruluğu Leibniz'in şu aksiyomunun yerini tutmuşa benziyor: "Eğer eşit olanların yerine eşitleri konulursa, eşitlik [*Gleichung*] korunur." Ancak aritmetiksel doğrulukları doğa yasaları sayabilmek için Mill onlara taşımadıkları bir anlam yüklüyor. Örneğin,[18] yarım kiloluk bir ağırlığın bir diğer yarım kiloluk ağırlıkla her zaman aynı ağırlığa gelmemesine dayanarak, 1 = 1 eşitliğinin yanlış olabileceğini düşünmektedir Mill. Ancak 1 = 1 önermesi kesinlikle böyle bir şey öne sürmemektedir.

Mill, '+' göstergesini, fiziksel bir cismin veya yığının parçalarıyla o cismin veya yığının bütünü arasında bir ilişkiyi ifade etmeye yarayan bir gösterge olarak anlamaktadır; ancak göstergenin anlamı bu değildir. 2 birim hacimli bir sıvıyı 5 birim hacimli bir sıvıya dökerek 7 birim hacimli bir sıvı elde edecek olmamız, '5 + 2 = 7' denkleminin gönderimi değil, onun bir uygulamasıdır ve yalnızca birtakım kimyasal tepkimeler sonucunda hacimlerde herhangi bir değişme olmaması koşuluyla doğru çıkar. Mill, aritmetiksel bir önermenin çoğunlukla fiziksel olan ve gözlemlenmiş olguları gerektiren uygulamalarıyla, saf matematiksel önermenin kendisini sürekli karıştırmaktadır. Artı göstergesi, birçok uygulamada sanki bir kümelendirme, biraraya toplama sürecine karşılık gelen bir göstergeymiş gibi gözükebilir; ancak onun gönderimi bu değildir; çünkü öyle uygulamalar vardır ki, örneğin meydana gelen olayların sayılarını hesaplarken olduğu gibi, bunlarda ne kümelendirme, ne yığınları biraraya toplama, ne de fiziksel bir cisimle onun parçaları arasındaki ilişkiler söz konusudur. Kuşkusuz olayların sayılması örneğinde de "parçalardan" söz edebiliriz; ancak bu durumda "parça" sözcüğünü fiziksel ya da geometrik anlamında değil, mantıksal anlamında

18 A.g.y., Kit. II, Böl. vi, § 3.

kullanmaktayız; tıpkı devlet büyüklerinin öldürülmesinden bir bütün olarak cinayetlerin bir parçasıymışçasına söz etmemiz gibi. Bu mantıksal ardardalık [*Unterordnung*] sorunudur. Ve aynı şekilde toplama da, genelde herhangi bir fiziksel ilişkiye karşılık gelmemektedir. Bundan da çıkan sonuç şudur: Toplamanın genel yasaları doğa yasaları olamaz.

§ 10. Ancak bu yasalar yine de tümevarımsal doğruluklar olamaz mı? Bunun nasıl düşünülebilir olduğunu anlayamıyorum. Burada, genele doğru ilerleyebilmek için hangi tikel olgulardan yola çıkabiliriz? Bu olgular ancak sayısal ifadeler olabilir. Öyleyse tikel olguları sayısal ifadeye eşleyelim, ancak bu durumda tekil sayıların tanımlarını vermek suretiyle kazanmış olduğumuz üstünlüğü bir kez daha yitirmiş oluyoruz; ve sayısal ifadeyi temellendirebilmek için diğer araçların peşine düşmek zorunda kalıyoruz., Hiç kolay olmasa da, bu kaygının üstesinden gelecek bir yol bulsak bile, yine de zeminin tümevarım için elverişli olmadığını görürüz; çünkü, diğer alanlarda yüksek bir güvenilirlik sağlayan yöntemi veren tekbiçimlilikten bu alanda eser yoktur. Leibniz[19] bunun farkındaydı; Philaléte:

> "Sayıların çeşitli kipleri az ya da çok dışında başka bir ayrım yapmaya yetmiyor; işte bu nedenle bunlar yalın kiplerdir, tıpkı uzayınkiler gibi"*

görüşünü öne sürdüğünde Leibniz'in buna yanıtı şudur:

> "Zaman ve doğru çizgi hakkında bu söylenebilir, ancak şekiller hakkında kesinlikle söylenemez; yalnızca büyüklük olarak farklı değil, aynı zamanda aralarında benzerliğin de olmadığı sayılar hakkında ise hiç söylenemez. Bir çift sayı iki eşit parçaya bölünebilir, ama bir tek sayı bölünemez; üç ve altı üçgen sayılardır, dört ve dokuz kare sayılardır, sekiz küp sayıdır vb. ve sayılarda, bu duruma, şekillerde olduğundan daha çok rastlanır; çünkü birbirine eşit olmayan iki şekil birbirine tümüyle benzer [*ähnlich*] olabilir, ancak iki sayı hiçbir zaman olamaz."

19 Baumann, a.g.y., Cilt II, s. 39.

* Bu bölüm Locke'un *An Essay Concerning Human Understanding* kitabından (Kit. II, Böl. XVI, § 5). (ç.n.)

Kuşkusuz birçok bağlamda sayıları, aynı türdenmiş gibi ele almaya alışmış olarak yetiştiğimiz doğrudur; ancak bunun sebebi, bütün sayılar için geçerli olan bir genel önermeler kümesi biliyor olmamızdır. Şimdi ise, bu genel önermelerin hiçbirisinin doğruluğunun henüz kabul edilmediği bir noktadan bakmalıyız. Şimdiki duruma koşut düşecek bir tümevarımsal çıkarım örneği bulmak zor olsa gerektir. Aksi takdirde, çoğunlukla, uzaydaki her konumun ve zamandaki her anın bir diğer konum ve anla kendi içinde aynı oldukları önermesini kullanırdık. Ulaştığımız sonuçların, koşullar aynı oldukları sürece başka bir konumda ve başka bir zamanda da geçerli olması gerekir. Ancak sayılarla ilgili durumda bu uygulanamıyor, çünkü sayılar uzay ve zamanda değillerdir. Sayı dizilerindeki konum, uzaydaki konumla eşdeğer değildir.

Üstelik sayıların birbirleriyle bağlantısı, örneğin bir hayvan türü içindeki hayvanların birbirleriyle olan bağlantısından çok farklıdır. Sabit, kesin bir öncelik sonralık düzenine göre düzenlenmiş olmaları sayıların doğasında vardır; sayılardan her biri kendine özgü bir şekilde meydana gelmiştir ve bu kendine özgülük en çok 0, 1 ve 2 sayılarında kendini gösterir. Bir türle bağlantılı olarak tümevarım yoluyla bir tümceyi ortaya koyduğumuzda, yalnızca türün kavramının tanımıyla bile, bir dizi ortak özelliğe sahibizdir zaten. Ancak sayılar söz konusu olduğunda zor olan, başta kanıtlanması gerekmeyen ortak tek bir özellik bulabilmektir.

Aşağıdaki örnek bu konuda bize bir karşılaştırma olanağı veriyor. Varsayalım ki, bir sondaj çukurunda derinlik arttıkça, sıcaklığın da düzenli bir şekilde arttığını fark ettik; ve varsayalım ki o ana kadar büyük değişkenlik gösteren kaya katmanlarına rastladık. Bu noktada, yalnızca bu sondaj çukurunda yapılan gözlemler ışığında, daha derin düzeylerdeki katmanların doğası hakkında herhangi bir bilgiyi çıkarsayamayacağımız açıkça bellidir; ayrıca sıcaklık dağılımındaki düzenliliğin daha alt düzeylerde de sürüp sürmeyeceği sorusuna verilecek bir yanıt, erken bir yanıt olacaktır. Evet, "sondaj sürdürüldüğünde ulaşılan şey" kavramının altına hem şimdiye kadar gözlenen katmanların hem de daha alt düzeydekilerin düştüğü doğrudur; ancak bu-

nun bu noktada bize pek yardımı olmaz. Aynı şekilde, sayılar söz konusu olduğunda, sayıların hepsinin "bir arttırarak elde edilen şey" kavramının altına düştüğünü öğrenmenin de bize pek yardımı olmayacaktır. İki durum arasında, katmanların yalnızca ulaşılan şeyler olmaları, oysa sayıların sürekli olarak birle arttırılarak ortaya çıkmaları ve doğalarının da bu şekilde belirlenmiş olması açısından bir ayrım bulunabilir. Şimdi bunun anlamı ancak şu olabilir; bir sayının, diyelim 8 sayısının, birle arttırılarak meydana getirilmesi yoluyla onun tüm özellikleri çıkarsanabilir. Aslında bu, temelde, sayıların özelliklerinin onların tanımlarından geldiğini ve sayıların genel yasalarını, onların tümünde ortak olan meydana getirme yönteminden kalkarak kanıtlayabilme olanağını doğrularken; tekil sayıların kendilerine has özelliklerinin de, birle sürekli olarak arttırılmalarıyla meydana geldiğini göstermektedir. Jeolojiyle ilgili durumda da aynı şekilde, karşılaşılan bir katmanda sadece derinlikle belirlenenlerden, yani katmanın görece konumundan tümevarıma hiç başvurmadan her şeyi çıkarımlayabiliriz; ama bu şekilde belirlenmeden kalanlar, tümevarımla da öğrenilemez.

Tümevarım yönteminin yalnızca aritmetiğin genel yasaları aracılığıyla gerekçelendirilebileceğini tahmin edebiliriz – elbette tümevarımdan bir alışkanlık sürecini anlamıyorsak. Çünkü böyle bir anlayışın, doğruluğun keşfedilmesi yolunda hiçbir gücü yoktur. Nesnel ölçütlerle sürdürülen bilimsel yöntem, bazen tek bir onaylayıcı örnekle ortaya konan yüksek bir olabilirliğe ulaşırken, bazen de binlerce örneği değersiz bularak bir kenara bırakacaktır; oysa alışkanlıklarımız, edindiğimiz izlenimlerin sayısı ve şiddetiyle ve yargılarımız üzerinde etkide bulunmaya hiç hakkı olmayan öznel koşullarla belirlenmiştir. Tümevarım, kendisini olasılık kuramına dayandırmalıdır, çünkü bir önermeyi olası kılmaktan fazlasını hiçbir zaman sağlayamaz. Ancak olasılık kuramının aritmetiksel yasalar önvarsayılmadan nasıl geliştirilebileceği de anlaşılabilir gibi değil.

§ 11. Leibniz[20] karşı görüşü savunmuştu, yani aritmetikte bulunan türden zorunlu doğrulukların, kanıtlanmaları örnek-

20 Baumann, a.g.y., Cilt II, p. 13-14.

lere dayanmayan ilkelerle yapılmalıdır ve bu yüzden, her ne kadar duyular olmadan hiç kimse onları düşünemese de, bu kanıtlamalar duyulardan gelen tanıklığa dayanmamalıdır. "Aritmetiğin tamamı doğuştandır ve bizde olanak olarak [*virtuelle*] bulunur." Leibniz'in "doğuştan" terimiyle ne kastettiği başka bir bölümde, "öğrendiğimiz her şeyin doğuştan olmadığı"nı yadsıdığı bölümde açıklanmıştır: "Sayılarla ilgili doğrular bizim içimizdedir, ama yine de onları öğreniriz, ister kanıtlayarak öğrendiğimizde onları kaynaklarından çekip çıkararak olsun (ki bu, onların doğuştan olduklarını göstermektedir), isterse de ..."[21]

Aritmetiğin Yasaları Sentetik A Priori midir, Yoksa Analitik midir?

§ 12. Analitikle sentetik arasındaki diğer karşısavı ele aldığımızda, dört kombinasyonun mümkün olduğunu görüyoruz; bununla birlikte bu kombinasyonlardan biri, yani

analitik a posteriori

elenebilir. Mill'le birlikte a posteriori yanında tavır alanların ikinci bir seçenekleri yoktur; öyleyse geriye bizim için incelenecek iki olanak kalıyor, yani

sentetik a priori

ve

analitik.

Kant, aritmetiğin yasalarının sentetik a priori olduklarını öne sürmüştü. Bu durumda, böyle yargıların nihai bilgi zemini olarak bir saf görüyü öne sürmekten başka bir seçenek kalmıyor, gerçi bu görünün uzaysal mı, yoksa zamansal mı olduğunu, ya da başka bir şey mi olduğunu söylemek zordur. Baumann[22] farklı sebeplerle de olsa Kant'la aynı görüştedir. Lipschitz'e[23] göre

21 Baumann, a.g.y., Cilt II, s. 38.
22 Baumann, a.g.y., Cilt II, s. 669.
23 *Lehrbuch der Analysis*, Cilt I, s. 1 [Bonn 1877]

de, bazı önermeler, yani sayal sayının, sayılama yönteminden bağımsız olduğunu öne süren önermeler gibi, toplamanın değişme ve birleşme yasaları da içsel görüden çıkmaktadır. Hankel[24] gerçek sayılar kuramını, *notiones communes* (ortak kavramlar) vasfı yüklediği üç temel önermeye [*Grundsätz*] dayandırmaktadır: "Açıklandıklarında tümüyle kendinden apaçıktılar; bizim büyüklükle ilgili saf görümüzün onayladığı gibi her alandaki büyüklükler için geçerlidirler; ve bunlar, büyüklüklerin toplamını sağlayan bir işlem olarak tanımlanma yoluyla, kendi vasıflarını kaybetmeden tanımlara dönüşebilirler." Son bildirimde bir belirsizlik var. Belki böyle bir tanımlama yapılabilir, ancak bu tanım, başlangıçtaki temel önermenin yerini alacak bir şey olmayacaktır; uygulandığında her zaman şu sorular akla gelecektir çünkü: Sayal sayılar büyüklük müdür; ve sayal sayıların toplamı demeye çalıştığımız şey, bu tanımda sözü edildiği türden bir toplam mıdır? Bunu yanıtlamak için, tanımın sayal sayılar hakkmdaki temel önermelerini bilmemize gerek vardır. Üstelik "büyüklüğün saf görüsü" dilegetirişi bizi bir durup düşünmeye yöneltiyor. Büyüklük adı verilen şeylerin hepsini düşünürsek: Sayal sayılar, uzunluklar, alanlar, hacimler, açılar, eğrilikler, kütleler, hızlar, kuvvetler, ışık şiddetleri, elektrik akımları vb. bütün bunların tek bir büyüklük "kavramı" altında toplanabileceklerini gayet iyi görebiliriz; ancak "büyüklüğün görüsü" dilegetirişi ve hatta "büyüklüğün saf görüsü" dilegetirişi uygun bir deyim olarak kabul edilemez. Değil genel olarak sayının ya da genel olarak büyüklüğün görüsünü, 100 000 sayısının görüsünü bile kabul edemem. Bilgi için başka bir zemin bulamadığımızda, içsel görüyü devreye sokmaya hepimiz hazırız. Ancak bunu yaparken, "görü" sözcüğünün anlamını gözden kaçırmamak gerekir.

Kant *Logik*'te (yay. Hartenstein, Cilt VIII, s. 88) görüyü şöyle tanımlıyor:

"Görü, tekil bir temsildir (*repraesentatio singularis*), kavram ise genel bir temsildir (*repraesentatio per notas communes*) ya da reflektif [*reflectirte*] temsildir (*repraesentatio discursiva*)."

Burada duyusallıkla [*Sinnlichkeit - hissetme yetisi*] bağlantıdan hiç söz edilmemektedir; duyusallık ile görü bağlantısı *Tran-*

24 A.g.y., s. 54-55.

sandantal Estetik bölümünde ele almır ve bu bağlantı olmadan görü, sentetik a priori yargılar için bir bilgi ilkesi olarak işe yarayamaz. "*Saf Aklın Eleştirisi*"nde (yay. Hartenstein, cilt III, s. 55 [A 19/B 33]) şu satırları okuyoruz:

"Nesneler [*Gegenstände*] bize duyusallık aracılığıyla verilirler ve bize görüleri sağlayan yalnızca duyusallıktır."

Bundan çıkan sonuç "görü" sözcüğünün *Logik*'teki anlamının *Transandantal Estetik*'tekinden daha geniş olduğudur. *Logik*'teki anlamında, 100 000'i bir görü olarak adlandırma olanağımız vardır; çünkü o genel bir kavram değildir. Ancak bu anlamıyla görü, aritmetik yasalarının temellendirilmesinde kullanılamaz.

§ 13. Aritmetiğin geometriyle olan yakınlığını abartmamakla doğru davrandık. Böyle bir şeye karşı Leibniz'den gelen uyarıyı daha önce aktarmıştım. Bir geometrik nokta, kendisi için düşünüldüğünde, bir diğer noktadan hiçbir şekilde ayırt edilemez; aynı şey çizgiler ve düzlemler için de geçerlidir. Sadece tek bir durumda, birçok nokta, çizgi veya düzlem eşzamanlı olarak tek bir görüde içerildiğinde aralarında bir ayrım yapabiliriz. Dolayısıyla geometride genel önermelerin görüden türemiş olmaları son derece anlaşılır bir şeydir; görüsü edinilen noktalar, çizgiler ya da düzlemler gerçekten tikel şeyler değildirler, bu da, onların bütün bir türün temsilcisi olmalarını sağlar. Ama sayılar söz konusu olduğunda durum farklıdır; her sayının kendine has özelliği vardır. Belli bir sayının hangi ölçüde bütün diğer sayıları temsil ettiği ve onun özel vasfının hangi noktada devreye gireceği genelde kolaylıkla ortaya konamaz.

§ 14. Egemen oldukları alanlar itibariyle çeşitli doğruluk türlerini karşılaştırdığımızda da, bu karşılaştırmanın aritmetiğin deneysel ve sentetik doğasına karşıt yönde sonuçlandığını görürüz.

Deneysel önermeler, fiziksel ve psikolojik fiili gerçeklik [*Wirklichkeit*] için geçerlidir; ister fiili gerçeklik, ister hayalgücünün [*Einbildungkraft*] ürünü olsun, geometrinin doğrulukları da, uzaysal görüsü edinilebilir olan her şeye egemendir. Hezeyanlardaki en çılgın fanteziler, hayvanların konuştuğu ve yıldızla-

rın çakılıp kaldığı, insanların taşa dönüştüğü ve ağaçların insan olduğu, boğulanların kendilerini saçlarından çekerek bataklıktan kurtarmaları gibi efsanelerin ve şiirin en cüretkâr yaratıları, görüleri edinilebilir [*anschaulich*] olduğu sürece geometrinin aksiyomlarına tâbidirler. Böyle bir boyunduruktan yalnızca kavramsal düşünce, diyelim ki dört boyutlu bir uzay veya pozitif eğrilik* hakkmdaki kavramsal düşünce, bir dereceye kadar kendini kurtarabilir. Dört boyutlu uzay gibi konulardaki yaklaşımlar hiçbir şekilde yararsız değildir; ancak böyle durumlarda görü zemininden de tamamıyla uzaklaşılmaktadır. Eğer burada görüden yardım alacaksak, bu ancak, resmedebildiğimiz yegâne uzay olan Eukleidesçi uzayın görüsü olabilir. Bu durumda görü, sadece verilen yüzeysel değer olarak değil, başka bir şeyin simgesi olarak düşünülür; örneğin, görüsü fiilen eğrisel olan bir şeyi, doğru çizgi ya da düzlem olarak adlandırırız. Kavramsal düşünce itibariyle, geometrinin aksiyomlarından herhangi birinin karşıtını kabul edebiliriz; ve görüyle çelişen bu tür kabullerden, kendi kendimizle çelişmeden, sonuçlar çıkarabiliriz. Bunun olanaklı olması, geometrinin aksiyomlarının birbirlerinden ve mantığın başlangıç yasalarından bağımsız olduklarını ve dolayısıyla sentetik olduklarını göstermektedir. Peki aynı şey sayı biliminin temel önermeleri için de söylenebilir mi? Eğer insan bunlardan birini yadsımak isteseydi, her şey karışıklığa sürüklenmez miydi? Hatta düşünmenin kendisi bile olanaklı olur muydu? Aritmetiğin temelleri daha derinlerde, tüm deneysel bilginin, hatta geometrinin temellerinden bile daha derinlerde yatmıyor mu? Aritmetiğin doğruları sayılabilir olanın alanına hükmetmektedir. Bu, bütün alanlar içinde en kapsayıcı olanıdır; çünkü yalnızca fiili gerçek olanı, görüsü edinilebilir olanı değil, düşünülebilir olan her şeyi de kapsar. Öyleyse sayıların yasaları, düşüncenin yasalarıyla çok yakından bağlantılı olmak durumunda değil midir?

§ 15. Leibniz'den aldığımız tümceler, Leibniz için a priori olanla analitik olanın çakıştığı dikkate alındığında, sayıların ya-

* Pozitif eğriliğe sahip Riemann uzayında olduğu gibi (Eukleides uzayı, sıfır eğrilikli düz uzaydır). (ç.n.)

salarının doğasının analitik olduğu anlamına gelmektedir. Dolayısıyla cebirin üstünlüğünün, onun daha üstün bir bilime, yani asıl [*wahren*] mantığa borçlu olmasında yattığını öne sürmektedir.[25] Başka bir yerde de[26] zorunlu ve olumsal* doğrulukları, eşölçülebilir [*commensurabeln*] ve eşölçülemez [*incommensurabeln*] büyüklüklerle karşılaştırmakta ve zorunlu doğruluklar söz konusu olduğunda bir kanıtlamanın veya özdeşliklere [*Identitäten*] indirgemenin olanaklı olduğunu kabul etmektedir. Bununla birlikte bu açıklamalar, Leibniz'in tüm doğrulukları kanıtlanabilir olarak görme eğilimi yüzünden ağırlıklarından bir miktar kaybetmektedirler:[27] "Her doğruluğun, terimlerin kavramından türetilebilen a priori bir kanıtlaması vardır, bununla birlikte böyle bir kanıtlamaya ulaşabilme her zaman gücümüzün erimi içinde değildir." Doğaldır ki, eşölçülebilirlikle eşölçülemezlik arasında yapılan karşılaştırma, en azından bizim için, zorunlu ve olumsal doğruluklar arasında aşılamaz bir engel ortaya çıkarmaktadır.

W.S. Jevons sayı yasalarının analitik doğası yönünde çok kesin konuşuyor:[28] "Cebir çok gelişmiş bir mantıktır ve sayı da mantıksal ayırt etmeden başka bir şey değildir."

§ 16. Ancak bu görüşün de birtakım güçlükleri var. Acaba bu yüksek, dallanıp budaklanmış ve büyümeye hâlâ devam eden sayı biliminin büyük ağacının kökleri sadece özdeşliklerde [*Identitäten*] kök salabilir mi? Ve mantığın boş formları nasıl olur da böylesine zengin bir içeriği içinden çıkarır?

Mill diyor ki: "Dilin ustaca bir manipülasyonuyla olguları keşfedebileceğimiz, doğanın gizli süreçlerini açığa çıkartabileceğimiz öğretisi sağduyuya öylesine aykırıdır ki, bir kimsenin buna inanabilmesi için felsefede biraz ilerlemiş olması gerekir."[29]

Elbette çok doğru, eğer bu ustaca manipülasyon sırasında hiç düşünmediğimiz varsayılıyorsa. Burada Mill, kimsenin savunmak istemeyeceği bir biçimciliği eleştiriyor. Sözcükleri ya

25 Baumann, a.g.y., Cilt II, s. 56.
26 Baumann, a.g.y., Cilt II, s. 57.
* karşıtıyla birlikte olanaklı olan (ç.n)
27 Baumann, a.g.y., Cilt II, s. 57.
28 *The Principles of Science*, Londra 1879, s. 156.
29 A.g.y., Kitap II, Böl vi. §. 2.

da matematiksel göstergeleri kullanan herkes onların bir anlama geldiğini öne sürecek ve hiç kimse, boş göstergelerden bir anlam çıkabileceğini beklemeyecektir. Ancak bir matematikçinin, kullandığı göstergeleri, duyusal olarak algılanabilir, görüsü edinilebilir şeyler olarak düşünmeden de, uzun hesaplamaları yapma olanağı vardır. Ama bu, göstergelerin anlamlarının olmaması demek de değildir; göstergelerin içeriklerini ancak göstergelerin yardımıyla yakaladığımız söz konusu olsa bile, göstergelerle onların içeriklerini birbirlerinden ayırıyoruz. Aynı şeyleri temsil etmek üzere başka göstergelerin seçilebileceğini biliyoruz. Göstergeler yoluyla duyulur hale gelen içeriği mantıksal olarak nasıl ele alacağımızı ve eğer diferansiyel hesabı fiziğe uygulamak istiyorsak, bunun görüngülere nasıl aktarılacağını bilmek yeterlidir. Bununla birlikte, tümcelerin gerçek anlamlarını böyle uygulamalarda görmek bir hatadır. Her uygulamada onların genelliklerinin büyük bir kısmı hep kaybolur ve diğer uygulamalarda yerini başka tikel öğelere bırakacak olan tikel bir öğe devreye girer.

§ 17. Tümdengelimi ne kadar küçümsersek küçümseyelim, tümevarımla ortaya konan yasaların yeterli olmadığı gerçeğini de yadsıyamayız. Bu yasalardan, tek tek yasaların hiçbirinde içerilmeyen yeni tümcelerin türetilmesi gerekir. Kuşkusuz bu tümcelerin, yasaların tümünün biraraya gelmesinde içeriliyor olmaları, bizi, onları çekip çıkarma ve kendileri için ortaya koyma işinden kurtarmaz. Bununla şöyle bir olanak doğmaktadır: Çıkarım zincirlerimizi dolaysızca olgulara bağlamak yerine, olguları oldukları gibi bırakır, ama içeriği bir koşullu önerme biçimi altında kabul ederiz. Bütün akıl yürütme boyunca, olgular yerine bu şekilde koşulları geçirerek, akıl yürütmeyi bazı sonuçların belli bir koşullar dizisine bağımlı hale geldiği bir biçime indirgemiş oluruz. Bu doğruluk yalnızca düşünce yoluyla ortaya konacaktır, ya da Mill'in ifadesini kullanarak, "dilin ustalıklı bir kullanımıyla". Sayı yasalarının da bu türden bir şey olması olanaksız değildir. Bu da, normalde yalnızca düşünceyle keşfedilememelerine karşın bu yasaların yargılarını analitik yargı haline getirecektir; çünkü burada onların keşfedilme yollarıyla değil, onların kanıtlanmaları-

nın dayandığı zeminin türüyle ilgileniyoruz; ya da Leibniz'in sözleriyle ifade edersek:[30] "Buradaki sorun, farklı insanlarda farklı olabilen keşiflerimizin tarihi değildir, sorun her zaman aynı olan doğruluklarının bağlantısı ve doğal düzenidir." Dolayısıyla yasalarda içerilen koşulların gerçekten yerine gelip gelmediğine nihai olarak karar verebilmek bunlarm gözlemlenmesiyle olacaktır. Demek ki sonunda, çıkarım zincirlerini dolaysızca gözlediğimiz olgu durumlarma bağlamak zorunda olduğumuz bir konuma ulaşmış oluyoruz. Ancak burada işaret edilen yöntem birçok durumda tercih edilmelidir, çünkü uygulanması yalnızca söz konusu olgularla sınırlı olmayan genel bir önermeye götürmektedir. Aritmetiğin doğruları, o halde, tıpkı geometrinin teoremlerinin geometri aksiyomlarına bağlı olduğu gibi, mantık doğrularına bağlı olacaktır. Bu doğrulukların her biri daha sonraki kullanımlar için bütün bir çıkarım zincirini yoğunlaştırılmış olarak içinde barındıracaktır ve bunların kullanımı tek tek çıkarımların yapılmasını artık gerektirmeyecek, tüm çıkarım zincirinin sonucu bir anda ifade edebilecektir.[31] Eğer durum bu ise, çok sayıda uygulamasıyla birlikte aritmetiksel çalışmaların olağanüstü gelişimi, analitik yargılar hakkındaki yaygın küçümsemeye ve saf mantığın arıtılmışlığı efsanesine bir son vermeye yeterli olacaktır.

İlk kez burada dile getirilmeyen bu görüş, eğer hiçbir kuşkuya yer bırakmayacak şekilde, ayrıntılı bir biçimde ortaya konabilirse, bana öyle geliyor ki ortaya çıkacak olan sonuç, hiç de azımsanmayacak bir sonuç olacaktır.

30 *Nouveaux Essais*, IV, § 9 (Erdmann edisyonu, s. 362.

31 Mill'in de (a.g.y., II. Kitap, 4. Bölüm, § 4'te) bu görüşü dile getirdiğini görmek dikkat çekicidir. Aslında onun sağlam anlayışı zaman zaman deneyci önyargıları nedeniyle kesintiye uğruyor. Ancak bu aynı önyargı, aritmetiğin uygulanmasıyla aritmetiğin kendisinin karıştırılması yüzünden çoğunlukla içinden çıkılamaz durumlara neden oluyor. Sanki koşullu bir yargının önkoşulu doğru olmasa bile, yargının kendisinin doğru olabileceğinden habersizmiş gibi görünüyor.

II. Bazı Yazarların Sayal Sayı Kavramı Üzerine Görüşleri

§ 18. Şimdi aritmetiğin asli [*ursprünglichen*] nesnelerini [*Gegenständen*] ele almaya dönerek, 3, 4 vb. gibi tekil [*einzelne*] sayılarla, sayal sayının genel kavramını birbirinden ayırmalıyız. Daha önce Leibniz, Mill, H. Grassmann ve diğerleri tarafından önerildiği gibi tekil sayıların, en doyurucu şekilde, bir sayısından, onun birle arttırılması yoluyla türetileceğine karar vermiş, ancak "bir sayısı"nın ve "birle arttırma"nın kendileri açıklanmadığı sürece bu açıklamaların da tamamlanmadan kalacaklarını kabul etmiştik. Böylelikle, sayısal ifadeleri bu tanımlardan çıkarmak istiyorsak, genel önermelere gereksinmemiz olduğunu görmüştük. Böyle yasalar tam da genelliklerinden dolayı tekil sayıların tanımlarından değil, ancak sayal sayının genel kavramından çıkabilirler. Şimdi bunu daha yakından inceleyeceğiz. Bu inceleme sırasında bir sayısını ve birle arttırmayı da irdelemenin gerekli olduğunu biliyoruz; bunun sonucunda da tikel sayıların tanımlarının tamamlanmasını umuyoruz.

§ 19. Bu noktada, sayıyı, uzunluklar ya da yüzeyler arasındaki soyut oranlar olarak gören geometrik temsil fikrine karşı çıkmak istiyorum. Elbette ki bu girişimin ardında yatan düşünce, aritmetik ve geometrinin temel bilgilerini daha başlangıçta yakın bir bağlantı içinde ele alarak aritmetiğin geometriye uygulanmasını kolaylaştırmaktı.

Newton, sayı deyince, pek de öyle bir büyüklükle, birim olarak alınmış aynı türden bir başka büyüklük arasındaki soyut oranı anlamıyordu.[32] Bunun geniş anlamda sayının uygun bir tanımlaması olduğu kabul edilebilir, bu tanımlama tamsayıların yanı sıra rasyonel ve irrasyonel sayıları da içermektedir; ancak bu tanım, büyüklük ve büyüklük oranı kavramlarını önvarsaymaktadır. Buna göre, sayının dar anlamdaki bir açıklaması, yani sayal sayı hakkmdaki açıklama gereksiz değildir; çünkü Eukleides, uzunluklar arasındaki iki oranın aynılığını [*Gleichheit*] tanımlamak için eşit katlar [*Gleichvielfachen*] kavramını kullanmaktadır* ve eşit katlar bizi bir kez daha sayısal eşitliğe getirmektedir. Doğrusu, uzunluklar arasındaki oranların aynılığı, sayı kavramından bağımsız olarak da tanımlanabilir. Böyle olsa bile, geometrik olarak tanımlanan sayının, günlük yaşamdaki sayıyla ne şekilde bağlantılı olduğu konusunda ciddi bir kuşku duymalıyız. Bu haliyle bilimle bağı da kopmaktadır. Yine de sayıyla ilgili her uygulamada, aritmetikten, her ne kadar uygulamanın kendisi aritmetiğin asli işi olmasa da, sayılarının kullanılmaya uygun olmasını isteme hakkımız vardır. Bildik hesaplama işleminin temellendirilmesi de bilimin içinde yer almalıdır. Ayrıca, özellikle bir denklemin köklerinin sayal sayısı veya verilen bir sayıdan küçük ve görece asal sayılar hakkında düşündüğümüzde, acaba aritmetiğin kendisi geometrik bir sayı kavramıyla yetinebilir mi sorusu ortaya çıkıyor. Öte yandan "kaç tane" sorusuna yanıt olan sayı, "bir uzunlukta kaç tane birim içerilmiştir", sorusuna da yanıt olabilir. Ve eksi, rasyonel veya kesirli ve irrasyonel sayılarla yaptığımız hesaplama işlemlerinin tümü doğal sayılarla yapılan işlemlere dayandırılabilir. Belki Newton'un, sayıyı, büyüklükler arasındaki oran olarak tanımladığında büyüklük teriminden anladığı yalnızca geometrik büyüklükler değil, ayrıca kümelerdi de. Bu durumda, "bir kümeyle kümenin birimi arasındaki oran" dilegetirişi [*Ausdruck*], "bir kümenin onun aracılığıyla belirlendiği sayı" dilegetirişinden daha fazlasını bize söylemediği için, Newton'un tanımı bizim amaçlarımız açısından kullanışsızdır.

32 Baumann, a.g.y, Cilt I, s. 475 [*Aritmetika Universalis*. c. I, böl. ii, 3]

* *Elemanlar*, Kitap V, Tanım 5 (ç.n.)

§ 20. Şimdi yanıtlamamız gereken ilk soru, sayının tanımlanabilir olup olmadığıdır. Hankel[33] sayının tanımlanabilir olmadığını söylüyor: "Bir nesneyi bir kez, iki kez, üç kez, vb. düşünmek ya da ortaya koymanın [*setzen*] ne anlama geldiği, 'ortaya koyma' kavramının ilkece basitliği nedeniyle tanımlanamaz." Ancak buradaki konu, kesinlikle bir kez, iki kez, üç kez ortaya koyma konusu değil. Eğer bu tanımlanabilseydi, ortaya koymanın tanımlanamazlığı bizi pek de kaygılandırmazdı. Leibniz sayıyı upuygun [*adaequate*] bir idea gibi görme eğilimindeydi, yani öylesine açık bir idea ki, onda içerilen her unsur da o derece açıktır ya da en azından upuygun bir idea kadar açıktır.

Eğer genel eğilim çoğunlukla sayal sayının tanımlanamaz olduğu yönündeyse, bu, sayal sayının tanımlanamaz bir şey olması gerektiği konusunda herhangi bir şeyin keşfedilmiş olmasından çok, sayal sayıyı tanımlama girişimlerinin başarısızlığa uğramış olması yüzündendir.

Sayal Sayı Dışsal Şeylerin Bir Özelliği midir?

§ 21. En azından sayal sayıya kavramlarımız arasındaki doğru yeri vermeyi deneyelim. Sayılar, dilde daha çok sıfat biçiminde ve niteliksel bağlantıda görünürler, tıpkı sert, ağır veya kırmızı sözcüklerinin dışsal şeylerin özelliklerine göndermeleri gibi. Tekil sayıları da böyle özellikler olarak düşünüp düşünemeyeceğimizi ve buna göre sayal sayı kavramının da renk kavramı gibi sınıflandırılıp sınıflandırılamayacağını sormak doğaldır.

Bu yaklaşım M. Cantor'un[34] görüşüne benzemekte; M. Cantor matematiği dış dünyanın nesnelerinin gözlemiyle başlayan deneysel bir bilim [*Erfahrungswissenschaft*] olarak değerlendirir. Ona göre sayı, yalnızca nesnelerden soyutlama yoluyla elde edilmiştir.

E. Schröder için sayı, fiili gerçekliğe [*Wirklichkeit*] göre türetilmiş, ondan alınmıştır;[35] yani sayı, birimlerin birlerle kopyalan-

33 A.g.y., s. 1.

34 *Grundzüge einer Elementarmathematik*, s. 2, Par. 4. Benzer olarak Lipschitz, a.g.y., s. 1.

35 *Lehrbuch der Arithmetik und Algebra*, Leipzig, 1873, s. 6, 10 ve 11.

masıyla türetilmiştir. Schröder buna, sayının soyutlaştırılması adını verir. Bu kopyalamada birimler yalnızca sıklıkları açısından temsil edilirler, söz konusu şeylerin renk veya şekil gibi tüm diğer özellikleri gözardı edilir. Burada sıklık, sayal sayının yalnızca başka bir biçimde dile getirilişidir. Dolayısıyla bundan, Schröder'in sıklık ya da sayal sayıyı renk ve şekille aynı düzeyde değerlendirdiği ve sayal sayıyı şeylerin bir özelliği olarak ele aldığı sonucu çıkmaktadır.

§ 22. Baumann[36] sayıların dışsal şeylerden çıkarılan kavramlar olduğu görüşünü reddediyor: "Bunun sebebi, dışsal şeylerin kendilerini bize kesin birimler olarak sunmamasıdır; dışsal şeyler yalıtılmış öbekler ya da duyusal noktalar halinde kendilerini bize sunarlar, ancak bunlardan her birini çokluk olarak değerlendirme özgürlüğüne sahibiz." Aslında, bir şeyi sadece farklı şekillerde düşünerek onun rengini veya katılığını hiçbir şekilde değiştiremediğim halde, İlyada destanını tek bir şiir olarak ya da 24 kitap olarak veya çok sayıda (sayal) dize olarak düşünebilirim. Bir ağaçtan söz ederken onun 1000 yaprağı olduğunu söylediğimizde, yeşil yaprakları olduğunu söylediğimiz zamankinden tümüyle farklı anlamlarda konuşmuyor muyuz? Her bir yaprağa yeşil rengini atfettiğimiz halde, 1000 sayısını atfetmiyoruz. Eğer bir ağacın bütün yapraklarını birarada düşünürsek ona ağacın örtüsü adım verebiliriz. Bu da yeşildir, ama 1000 değildir. Öyleyse 1000 özelliği gerçekten neye aittir? Bu özellik ne yapraklardan herhangi birine, ne de onların tümüne aitmiş gibi gözüküyor; acaba dış dünyadaki şeylere gerçekten ait olmaması olanaklı mıdır? Eğer "Bu taşın ağırlığını bulun" diyerek birine bir taş verirsem, bu nesneyi ona tam da incelemesi için vermiş olurum. Ama, eğer bir tomar oyun kağıdını "Bunların sayal sayısını bulun" diyerek ona verirsem, bu ona, oyun kâğıtlarının sayısını mı, kaç deste oyun kâğıdı mı olduğunu, yoksa tomardaki majörlerin sayısını mı bilmek istediğim konusunda bir şey söylememektedir. Onun eline oyun kâğıdı tomarını vermekle inceleyeceği nesneyi henüz tümüyle vermiş olmuyorum; bunu yapmak için başka sözcükleri de: kâğıtları, desteleri veya

36 A.g.y. Cilt II, s. 669.

majörleri de isteğime eklemem gerekir. Bu durumda farklı renklerin aynı şeyde yan yana durmaları gibi farklı sayıların da yan yana varolduklarını söyleyemeyiz. Her bir tekil renk lekesine, rengin adını söylemeden parmağımla işaret edebilirim, ama aynı şeyi tekil sayılarla yapamam. Eğer bir nesneyi haklı olarak kırmızı ve yeşil diye niteleyebiliyorsam, bu, bu nesnenin yeşilin asıl taşıyıcısı olmadığının kesin işaretidir. Bunun için yalnızca yeşil olan bir yüzeyin olması gerekir. Aynı şekilde, farklı sayılar yükleme hakkına sahip olduğum bir nesne de, bir sayının asıl taşıyıcısı değildir.

Dolayısıyla renk ile sayal sayı arasında önemli bir fark ortaya çıkıyor; mavi gibi bir renk bizim seçimimizden bağımsız olarak bir yüzeye aittir. Mavi rengin bazı dalga boylarındaki ışığı yansıtma, başka dalga boylarında değişken ölçüde soğurma gücü vardır; bizim ona bakma tarzımız ya da bakış açımız onda hiçbir değişikliğe yol açmaz. Öte yandan 1 veya 100 sayal sayısının ya da herhangi bir sayal sayının bir tomar oyun kağıdına kendiliğinden ait olduğu söylenemez; ancak bizim seçtiğimiz bir bakış açısına göre sayal sayı o nesneye ait olur; yine de sayal sayıyı, o nesneye bir yüklem olarak bu şekilde yükleyemeyiz. Tam bir deste oyun kağıdı dediğimiz şey keyfi olarak belirlenmiştir ve bir tomar kağıdın bundan hiç haberi yoktur. Ancak tomarı bu karar ışığında incelediğimizde, belki de onu iki deste oyun kağıdı olarak adlandırabileceğimizi keşfedebiliriz. Tam bir oyun kağıdı destesinin ne olduğunu bilmeyen biri olasılıkla tomarda iki dışında bir sayal sayı bulacaktır.

§ 23. "Sayının bir özellik olarak ait olduğu şey nedir?" sorusuna Mill[37] şöyle yanıt veriyor: Bir sayının adı "doğal olarak bu adla adlandırdığımız şeylerin yığışımına [*Aggregat*] ait belli bir özelliği" çağrıştırmaktadır; "bu özellik, yığışımın parçalardan meydana gelmesi ve parçalara ayrılmasının karakteristik yanıdır."

Burada "karakteristik yan" ifadesindeki belirli tanımlık [*Artikel*] bir hatadır; çünkü bir yığışım çok değişik biçimlerde parçalarına ayrılabilir ve bunlardan yalnızca birinin karakteristik olduğu söylenemez. Örneğin bir saman demetini, bütün saman

37 A.g.y., Kit. III, Böl. xxiv, § 5.

çöplerini ikiye bölerek veya saman çöplerini tek tek ayırarak ya da demeti ikiye ayırarak parçalara ayırmak mümkündür. Dahası, 100 adet kum tanesinden oluşan bir tepecik, 100 saman çöpünden oluşan demetle tamamıyla aynı şekilde mi biraraya getirilmiştir? Sayı yine de aynıdır. "Bir saman çöpü" ifadesindeki "bir" sözcüğü, samanın hücrelerden ve moleküllerden nasıl yapılmış olduğunu dile getirmemektedir. Sıfır sayısı daha büyük bir güçlük oluşturmaktadır. Ayrıca saman çöplerinin sayılabilmeleri için mutlaka bir demet oluşturmaları mı gerekir? "Alman İmparatorluğu'ndaki körlerin sayısı" dilegetirişinin bir anlamının olabilmesi için, Almanya'daki tüm körlerin biraraya toplanması mı gerekir? Bin buğday tanesi, bir kez tarlaya ekildiğinde, artık bin buğday tanesi değil midir? Bir teoremin kanıtlamalarının yığışımıyla, olayların yığımları benzer midir? Oysa bunlar yine de sayılabilir. Bu saymada olayların aynı anda mı, yoksa bin yıllık bir arayla mı meydana geldikleri hiç fark etmez.

§ 24. Bu, sayıyı renk ve katılıkla aynı şekilde sınıflandırmayı reddetmek için başka bir gerekçe sağlıyor; sayı daha geniş bir alana uygulanabilir.

Mill[38] "parçalardan oluşan şeyler, o parçaların parçalarından oluşmuştur" gerçeğinin her türden doğal görüngü için sağlandığı, çünkü bunların tümünün sayılabildiği görüşündedir. Ancak, daha fazlası da sayılamaz mı? Locke[39] şunları söylüyor: "Sayı insanlara, meleklere, eylemlere, düşüncelere –varolmayan veya hayal edilebilir her şeye– uygulanabilir." Leibniz[40] Skolastik dönem düşünürlerinin sayının cisimsel olmayan şeylere uygulanamaz olduğu düşüncesine karşı çıkıyor ve sayıyı, her türlü şeyin biraraya gelmesinden ortaya çıkan bir tür cisimsel olmayan şekil olarak adlandırıyor; örneğin Tanrı, bir melek, bir insan ve hareket, hep birlikte alındıklarında dört ederler. Bu sebepten dolayı sayının en üst genelliği olduğunu ve metafiziğe ait olduğunu ifade ediyor. Başka bir yerde[41] şunları söylüyor: "Kuvvetle-

38 A.g.y., Kit. III, Böl. xxiv, § 5.
39 Baumann, a.g.y., Cilt. I, s. 409.
40 Baumann, a.g.y., Cilt. II, s. 2-3.
41 Baumann, a.g.y., Cilt. II, s. 56.

ri ve güçleri olmayan şeyler tartılamaz; parçaları olmayan şeyler ölçülemez; ancak sayı atfedilemeyecek hiçbir şey yoktur. Dolayısıyla sayı, adeta bir tür metafiziksel şekildir."

Eğer dışsal şeylerden soyutlanan bir özellik hiçbir anlam değişikliğine uğramadan olaylara, tasarımlara ve kavramlara aktarılabilseydi, bu, gerçekten de harika olurdu. Sanki eriyen bir olay, mavi tasarımlar, tuzlu kavramlar ya da kaya gibi yargılardan söz ediliyormuş gibi olurdu.

Doğası itibariyle duyusal olan bir şeyin duyusal olmayanda bulunmasının hiçbir anlamı yoktur. Mavi bir yüzey gördüğümde, "mavi" sözcüğüne karşılık gelen tek çeşit bir izlenimimiz var; başka bir mavi yüzey gördüğümüzde bu izlenimi yeniden ediniriz. Bir üçgene baktığımızda da aynı şekilde "üç" sözcüğüne duyusal bir şeyin karşılık geldiğini varsaymak için, üç kavramda da aynı şeyi bulacağımız konusunda kendimizi bağlamamız gerekir ki, bu sayede duyusal olmayan bir şeyde duyusal olan bir şey bulunabilsin. "Üçgen" sözcüğüne bir tür duyusal izlenimin karşılık geldiği kesinlikle kabul edilebilir, ancak sözcük bu durumda bir bütün olarak alınmalıdır. Onun içindeki üçü doğrudan görmeyiz; bunun yerine, bizi, içinde 3 sayısının geçtiği bir yargıya götüren zihinsel etkinliğe bağlanabilecek bir şey görürüz. Örneğin, Aristoteles tarafından ortaya konan tasımların kalıp (sayal) sayısı hakkında nasıl bilgi sahibi olabiliriz? Gözlerimiz yardımıyla belki? Gördüklerimiz tasımların kalıpları hakkında verilen bazı göstergelerdir, kalıpların kendileri değil. Eğer onların kendileri görülmez ise, sayal sayılarını nasıl görebiliriz? Bununla birlikte göstergeleri görmenin yeterli olduğu öne sürülebilir; onların sayıları kalıpların sayısıyla aynıdır. Ama bunun böyle olduğunu nasıl biliyoruz? Bunun için, kalıpların sayısını başka bir yolla ortaya çıkarmamız gerekirdi. Acaba "Tasım kalıplarının (sayal) sayısı dörttür" tümcesi, "Tasım kalıplarının göstergelerinin (sayal) sayısı dörttür" tümcesinin başka türlü söylenmesi midir? Elbette değildir. Burada göstergeler hakkında herhangi bir şey dile getirmek gibi bir niyet bulunmamaktadır; hiç kimse bununla ilgilenmemektedir; hiç kimse göstergeler hakkında, onların sahip olduğu bazı özelliklerin, gösterdikleri şeylerdeki bazı özelliklerin

doğrudan yansıtılması dışında bir şey bilmek istememektedir. Üstelik aynı şey, hiçbir mantıksal hata olmadan birçok başka göstergeyle gösterilebilir, öyle ki, gösterilen şeylerin sayısıyla gösterge sayısının çakışması bile gerekmez.

§ 25. Mill için sayı fiziksel bir şeyken, Locke ve Leibniz için yalnızca bir idea olarak vardır. Mill iki elmanın üç elmadan, iki atın bir attan farklı olduğunu söylerken elbette son derece haklıdır;[42] bunlar görülebilir ve dokunulabilir görüngülerdir [*Phänomen*].[43] Ancak bundan, onların ikiliklerinin [*Zweiheit*] ve üçlüklerinin de fiziksel bir şey olduğu sonucunu çıkarsayabilir miyiz? Bir çift çizme, iki çizmeyle aynı görülebilen ve dokunulabilir olgu olabilir. Burada hiçbir fiziksel farkın karşılık gelmediği sayısal bir fark söz konusudur; çünkü "iki" ve "bir çift" hiçbir şekilde, Mill'in tuhaf bir biçimde inanıyor göründüğü gibi, aynı şey değildir. Nihayet, iki kavramın fiziksel olarak üç kavramdan ayırt edilebilir olması nasıl olanaklıdır?

Berkeley şöyle diyor:[44] "Düşünülmelidir ki, ... sayı şeylerin içinde gerçekten varolan sabit ve saptanmış bir şey değildir. Tümüyle, kendinde bir ideaya ya da bir idealar kombinasyonunu incelerken onlara bir ad veren ve böylelikle onları bir birim olarak gören zihnin bir ürünüdür. Zihnin, idealarını çeşitli şekillerde biraraya getirmesine göre, birim değişmektedir; ve birim gibi, yalnızca birimlerin biraradalığı olan sayı da değişmektedir. Bir pencereyi bir, bir bacayı da bir olarak adlandırıyoruz, ama birçok penceresi, bacası olan evin de aynı derecede bir olarak adlandırılma hakkı vardır; böylelikle birçok ev de tek bir kenti meydana getirecektir."*

42 A.g.y., Kit. III, Böl. xxiv, §. 5.

43 Daha açıklayıcı olması için şunu eklememiz gerekir: Bunların tamamen bir görüngü olmaları koşuluyla. Çünkü, eğer bir kişinin Almanya'da bir ve Amerika'da bir atı varsa (ve başka atı yoksa), bu durumda iki ata sahip demektir; ancak bu iki at bir görüngü oluşturmaz, yalnızca bu ikisinden her birinin kendi başlarına birer görüngü olduğu söylenebilir.

44 Baumann, a.g.y., Cilt. II, s. 428 [*New Theory of Vision, § 109*].

* İngilizce özgün metinde bu şekilde yer alan cümleyi Frege, Baumann'm çevirisiyle şöyle aktarmıştır: "Bir pencere = 1; içinde birçok pencere bulunan ev = 1; çok sayıda ev bir kenti oluştururlar." [Ein Fenster = 1; ein Haus, in dem viele Fenster sind = 1; viele Häuser machen Eine Stadt aus.] (ç.n.)

Sayı Öznel Bir Şey midir?

§ 26. Bu şekilde düşünmek bizi kolaylıkla sayının öznel bir şey olduğu görüşüne getirebilir. Sayının bizde ortaya çıkma tarzı sanki onun doğası hakkında bilgi veriyormuş gibi görünüyor. Bu durumda bir psikolojik incelemeye varıyoruz öyleyse. Bu, tam da Lipschitz'in şunları yazarken düşündüğü şeydir:[45] "Bazı şeyler hakkında toplu bir bakış edinmek isteyen bir kişi, belirli bir şeyden başlayacak ve daha önce seçilmiş olana hep bir yenisini ekleyerek devam edecektir." Bu sözler, sayıyı nasıl inşa ettiğimizi açıklamaktan çok, bir takımyıldızın görüsünü nasıl edindiğimizi betimliyor gibidir. Asıl olan, toplu bir bakış edinmek niyeti değildir; çünkü bir sürünün kaç baş hayvandan oluştuğu öğrenildiğinde bir sürünün toplu bir görüntüsünün elde edilmiş olacağını söylemek zordur.

Zihinsel süreçlerin sayı yargısının [*Zahlurtheils*]* oluşmasını önceleyen bu tür bir betimlemesi, içinde doğruluk da barmdırsa, gerçek bir kavramsal belirlenimin yerini hiçbir zaman alamaz. Bu, bir aritmetik önermesinin kanıtlanmasında, hiçbir zaman öne sürülemez; ve sayıların özellikleri ile ilgili bize hiçbir şey kazandırmaz. Çünkü sayı, ancak Kuzey Denizi'nin olduğu kadar bir psikoloji nesnesidir ya da psişik süreçlerin ürünüdür. Kuzey Denizi'nin nesnelliği, dünya yüzeyindeki hangi su parçasının bizim keyfi kararımıza göre seçilerek işaretlenmesi ve "Kuzey Denizi" adı verilmiş olmasından etkilenmemektedir. Bu, Kuzey Denizi'ni psikolojik yöntemlerle incelemek istememiz için bir neden değildir. Sayı da, aynı şekilde nesnel bir şeydir. Eğer "Kuzey Denizi'nin alanı yaklaşık 10 000 mil karedir" diyorsam, ne "Kuzey Denizi" ile ne de "10 000" ile bendeki içsel (zihinsel) bir sürece başvuruyorumdur; aksine bizim tasarımlarımızdan ve benzer her şeyden bağımsız olan, son derece nesnel bir şey ileri sürüyorumdur. Eğer başka bir defa Kuzey Denizi'nin sınırlarını farklı bir şekilde belirlemek istersem ya da "10 000"den

45 A.g.y., s. 1. Bununla Lipschitz'in içsel (zihinsel) süreçlere gönderme yaptığını kabul ediyorum.

* *Sayı yargısı* dilegetirişi, sayı tümcesi [*Zahlangabe*] dilegetirişinde olduğu gibi, bir şeyin "kaç tane" olduğunu bildiren dilegetiriştir. (ç.n.)

başka bir şey anlarsam, bu, daha önce doğru olan içeriği yanlış kılmayacaktır; tersine, doğru bir içeriğin yerini belki yanlış bir içerik alacak, ama bu durumda ilk içeriğin doğruluğu kesinlikle ortadan kalkmış olmayacaktır.

Bir bitkibilimci, bir çiçeğin taç yapraklarının sayısını (sayal sayısını) verirken, onun rengini verdiğinde olduğu kadar olgusal bir şeyi ortaya koymayı istemektedir. Ne biri ne de diğeri bizim keyfimize bağlıdır. Demek ki, sayal sayıyla renk arasında belirli bir benzerlik vardır; ancak bu benzerlik, ikisinin de duyular yoluyla dışsal nesnelerden algılanabilir olmasından değil, ikisinin de nesnel olmasından ileri gelir.

Nesnel olanı, dokunulabilir, uzaysal veya fiili gerçek [*Wirklichen*] olandan ayırıyorum. Yeryüzünün ekseni, Güneş Sisteminin kütle merkezi nesneldir, ancak bunlara Yeryüzünün kendisi gibi fiili gerçek diyemem. Ekvator çizgisinden genellikle hayali bir çizgi olarak söz ederiz; ancak onu uydurulmuş bir çizgi olarak adlandırmak yanlış olacaktır; ekvator çizgisi düşünce yoluyla bilinmiş ve kavranmış olsa da, düşünce yoluyla ortaya çıkmış değildir, bir ruhsal süreç ürünü değildir. Eğer bilinmek ortaya çıkmak demek oluyorsa, onun öne sürülen bilinme tarihinden önce ekvatorla ilgili olumlayıcı hiçbir şey söylememiz gerekir.

Kant'a göre uzay, görünüşlere (tezahürlere-*Erscheinung*) aittir. Uzayın, diğer akıl sahibi varlıkların gözünde bizimkinden çok farklı bir biçimde görünme olanağı vardır. Aslında uzayın bir insana bir başka insana göründüğü gibi mi göründüğünü bile bilemeyiz; çünkü bunu karşılaştırabilmek için gerekli olan, bir insanın uzay görüsünün, bir başkasınmkiyle yan yana konulması işlemini hiçbir zaman yerine getiremeyiz. Yine de bunda nesnel bir şey vardır; herkes aynı geometrik aksiyomları bilmektedir, yalnızca eylem yoluyla da olsa, dünyada yolunu bulabilmek için böyle yapmak zorundadır. Bunda nesnel olan, yasalara tâbi olan, kavranabilir ve yargıda bulunulabilir olan, sözcüklerle ifade edilebilir olandır. Saf görüsel olan, iletilebilir değildir. Bunu açık kılabilmek için üç noktanın bir doğruda, dört noktanın bir düzlemde yer alması gibi yalnızca izdüşümsel özellik ve bağıntıların görüsünü edinebilen iki akıl sahibi varlık olduğunu varsayalım; birinin düzlem olarak görüsünü edindiğinin, diğe-

rine nokta olarak gözüktüğünü ve bunun tersini de varsayalım, öyle ki, biri için iki noktayı birleştiren bir çizgi olan, diğeri için iki düzlemin kesişme çizgisidir; böylelikle birinin görüsü diğeri için her zaman düal* niteliktedir. Bu koşullar altında gayet güzel anlaşırlar ve görüleri arasındaki farkı hiçbir zaman anlamazlar; çünkü izdüşümsel geometride her teoremin düal bir karşılığı vardır, estetik değerlendirme açısından herhangi bir sapma, kesin bir sonuca götürmeyecektir. Tüm geometrik teoremler üzerinde tam bir uyuşma olacaktır, yalnızca kendi görülerine göre sözcükleri farklı yorumlayacaklardır. Örneğin "nokta" sözcüğüyle biri bir görüyü, diğeri ise başka bir görüyü birleştirecektir. Yani onlar için bu sözcüğün nesnel bir gönderiminin olduğundan söz edebiliriz; ancak şu koşulla ki, bu gönderimle onların kendi görülerinin hiçbir özelliğini anlamayalım. Ve bu anlamda Yeryüzünün ekseni de nesneldir.

"Beyaz" sözcüğü genellikle bize belli bir duyumu düşündürür ki bu, tamamıyla özneldir; ancak gündelik konuşma dilinde bile çoğunlukla nesnel bir anlam da taşıdığını düşünüyorum. Kar beyazdır dediğimde, olağan gün ışığında, belli bir duyumla bildiğim nesnel bir niteliğe gönderme yapıyorumdur. Eğer kar, renkli bir ışık altında görülürse, bunu yargılarımızda dikkate alır ve belki "şimdi kırmızı görünüyor, ama beyazdır", deriz. Renk körü bir adam bile, duyumlarında bu renkler arasında bir ayrım yapmamasına rağmen yeşil ve kırmızıdan söz edebilir. O bu ayrımı diğerlerinin yapmış olmasından dolayı ya da belki bir fiziksel deneyle biliyordur. Öyleyse bir renk sözcüğü, başka birinin duyumuyla uyuşup uyuşmadığını bilemediğimiz halde (şeyleri aynı şekilde adlandırmamızın bunu sağlamadığı açıktır) genelde bizim öznel bir duyumumuza işaret etmemektedir; buna karşılık nesnel bir özelliğe işaret etmektedir. Nesnellikten, bizim hissetmemizden, görü edinmemizden ve tasarımlamamızdan ve de belleğimizde yer alan önceki duyumlarımızdan meydana gelen içsel imgelerden bağımsız olmayı anlıyorum; ancak akıldan bağımsız olmayı değil; çünkü hangi şeylerin akıldan bağımsız olduğu sorusuna yanıt vermek, yargıda bulunmadan yargıda bulunmak ya da postu ıslatmadan yıkamak gibi bir şeydir.

§ 27. Bu nedenle, sayıyı bir nesnenin bir dizi içindeki konumunun tasarımı olarak tanımlayan Schloemilch'le[46] de uyuşamam.[47] Eğer sayı bir öznel tasarımsa, bu durumda aritmetik psikoloji olacaktır. Ancak aritmetik, gökbilimin olduğundan daha fazla psikoloji değildir. Nasıl ki gökbilim, gezegenlerin öznel tasarımlarıyla değil, gezegenlerin kendileriyle uğraşıyorsa, aynı şekilde aritmetiğin nesneleri de öznel tasarım değildir. Eğer iki sayısı bir öznel tasarım olsaydı, yalnızca bana özel bir şey olurdu. Başka bir insanın öznel tasarımı da, işte bundan dolayı, başka bir tasarım olacaktır. Eğer böyle olsaydı, elimizde milyonlarca iki olması gerekirdi. Böylece benim ikim, senin ikin, diye konuşabilirdik; bir ikiden ve tüm ikilerden söz edebilirdik. Eğer gizli ya da bilinçdışı tasarımları kabul ediyorsak, diğerleri arasında daha sonra bilince çıkacak olan bilinçdışı ikilerin de olması gerekirdi. Nasıl yeni kuşak çocuklar büyüyorlarsa, yeni kuşak ikiler de sürekli olarak büyüyeceklerdi ve önümüzdeki bin yıllarda öyle bir evrim olabilirdi ki, 2 X 2 = 5 olabilirdi. Yine de, genellikle varsaydığımız gibi sayıların sonsuz sayısının olup olmadığı kuşkulu olurdu. 10^{10} belki de yalnızca boş bir göstergedir ve bu ada karşılık oluşturacak hiçbir tasarım varolmamaktadır.

Sayının bir tasarım olduğu düşüncesi biraz daha geliştirildiğinde ne tür tuhaflıklara varıldığını görüyoruz. Ve böyle-

46 *Handbuch der algebraischen Analysis*, s. 1.

47 Buna karşı, aynı sayının her karşımıza çıkışında, bir sıralı dizideki hep aynı konumun tasarımının ortaya çıkması gerektiği itirazı yöneltilebilir ki, bu açıkça yanlıştır. Eğer Schloemilch, tasarımdan nesnel bir ideayı [*Idee*] anlıyorsa, benim uslamlamalarım isabetsiz olacaktı; ancak bu durumda da konumun tasarımı ile konumun kendisi arasındaki fark ne olacaktı?
Öznel anlamda bir tasarım, psikolojik çağrışım yasalarını ilgilendiren bir şeydir; duyusal, resimsel bir yapısı vardır. Nesnel anlamda tasarım, mantığa aittir ve ilkece duyusal değildir; her ne kadar nesnel bir tasarıma gönderen sözcüğe, genellikle öznel bir tasarım eşlik ediyor olsa da, bu onun gönderimi değildir. Öznel tasarımlar, çoğu zaman gösterilebilir ki, farklı insanlarda birbirlerinden farklıdır; nesnel tasarımlar ise tüm insanlarda aynıdır. Nesnel tasarımlar nesnelere ve kavramlara ayrılabilir. Karışıklığı önlemek için, ben "tasarım" sözcüğünü yalnızca öznel anlamında kullandım. Kant, bu sözcüğe her iki anlamı da [*Bedeutung*] verdiği için öğretisinin, öznel, idealist bir yan taşıdığı varsayılmış ve bu, gerçek görüşünün anlaşılmasını zorlaştırmıştır. Burada göz önünde tutulan ayrım, psikoloji ile mantık arasında yapılan ayrım kadar haklı bir ayrımdır. Bunları her zaman keskin bir şekilde birbirlerinden ayırmak gerekir.

ce sayının ne Mill'in çakıltaşı yığınları ve zencefilli çörekleri gibi uzaysal ve fiziksel olduğunu, ne de tasarımlar gibi öznel olduklarını, ama duyusal olmayan ve nesnel şeyler oldukları sonucuna varıyoruz. Şimdi nesnellik, doğaldır ki, ruhumuzun etkilenimi olarak tümüyle öznel olan duyu izlenimlerine dayandırılamaz, görebildiğim kadarıyla yalnızca akla dayandırılabilir.

Tüm bilimlerin en kesin olanının, hâlâ güvensizce ilerleyen psikolojiden destek almaya çalışması doğrusu garip olurdu.

Küme Olarak Sayal Sayı

§ 28. Bazı yazarlar sayal sayıyı, aynı türden çokluk [*Vielheit*] veya farklı türden çokluk [*Mehrheit*] olan bir küme olarak tanımlıyorlar. Tüm bu görüşlerin önündeki engel, bu şekilde tanımlanan sayal sayı kavramının 0 ve 1 sayılarını kapsamamasıdır. Ayrıca bu dilegetirişler son derece belirsizdir; bazen uzayda yanyanalığı belirten "yığın", "öbek" veya "kümelenme" gibi kavramların gönderimlerine yaklaşıyorken, bazen de sayal sayıyla adeta aynı, ama daha belirsiz bir anlamda kullanılıyorlar. Yani sayal sayı kavramının çözümlenişi bu tür bir açımlama yoluyla yapılamaz. Thomae[48] sayının ortaya konması için farklı nesne kümelerine [*Objectenmengen*] farklı adların verilmesi gerektiğini öne sürüyor. Thomae bu görüşüyle açıkça söz konusu kümelerin daha kesin olarak belirlenmesine işaret etmektedir ki, bunlara bir ad vermek yalnızca dışsal bir göstergeden ibarettir. Burada sorun, bu belirlemenin ne tür bir belirleme olduğudur. Şurası besbelli ki, eğer "3 yıldız", "3 parmak" ve "7 yıldız" yerine, tanınabilir ortak öğeleri olmayan adları gündeme getirmeyi denersek buradan bir sayı ideası çıkmayacaktır. Sorun ad vermek değil, sayısal öğeye uygun bir gösterge vermektir. Bunun için de, bu öğenin kendine özgü özellikleri bilinmelidir.

48 *Elemantare Theorie der analytischen Functionen*, s. 1.

Ayrıca şu farklılığa dikkat etmek gerekir. Bazıları sayıyı bir şeyler ya da nesneler kümesi olarak adlandırmaktadır; Eukleides'i izleyen diğerleri, sayıyı birimlerin [*Einheiten*] kümesi olarak tanımlamaktadır.[49] Bu son dilegetiriş ayrıca irdelenmeyi gerektirmektedir.

49 Μονάς εστι, καθ' ἣν ἕκαστον τῶν όντων ἐν λέγεται. 'Αριθμὸς δε τὸ ἐκ μονάδων συγκείμενον πλῆθος. [Bir birim, varolan şeylerden her birinin onun sayesinde "bir" olarak adlandırıldığı şeydir.]

III. Birlik (Birim) ve Bir Üzerine Görüşler

Sayı Sözcüğü Olarak "Bir", Nesnelerin Bir Özelliğini mi Dile Getirmektedir?

§ 29. Eukleides "Elemanlar"ın VII. Kitabının başında verdiği tanımlarda, "μονάς" sözcüğüyle bazen sayı atfedilecek bir nesneyi, bazen böyle bir nesnenin özelliğini, bazen de bir sayısını gösteriyor gibi görünmektedir. Biz bunu Almancaya ancak "Einheit" (birlik ya da birim) olarak çevirebiliriz, çünkü bu sözcüğün kendisi de aynı gönderim değişkenliği üzerinde gidip gelmektedir.

Schröder'e göre;[50] "Sayı atfedilecek her bir şeye birlik (birim) denir". Şeylerin neden önce birlik kavramı altında toplanması gerektiği ve basitçe, niye "sayı, bir şeyler kümesidir," diye açıklanmadığı tartışmalıdır ki, bu bizi, bir önceki tartışmaya götürür. İlk bakışta, şeyleri birlikler olarak adlandırmakla, onların belirlenimine bir katkıda bulunulduğu düşünülebilir; ve dilsel biçim dikkate alınarak "bir" sözcüğü bir sıfat görülerek, örneğin "bir kent", tıpkı "bilge adam" gibi ele alınabilirdi. Bu durumda, birim, "bir" özelliğiyle nitelenen bir nesne olacaktır ve "bir"le olan ilişkisi, "bir bilge" [ad olarak kullanıldığında] deyişinin "bilge" sıfatıyla olan ilişkisiyle aynı konumda olacaktır. Sayıyı şeylerin bir özelliği olarak kabul eden görüşe karşı yukarıda ortaya konulan nedenlere burada birkaç özel neden daha

50 A.g.y. s. 5.

eklenmektedir. Öncelikle tek tek her bir şeyin bu özelliğe sahip olması dikkatimizi çekmeli. Bu özelliği bir şeye neden açıkça tekrar yüklediğimiz anlaşılır değil. "Solon'un bilge olduğu" iddiası, ancak bir şeyin bilge olmaması olasılığı ile bir anlam kazanır. Bir kavramın içeriği onun kaplamı çoğaldığında azalır; eğer o kavramın kaplamı her şeyi içine alırsa, onun içeriği tümüyle boşalacaktır. Dilin, nasıl olup da herhangi bir nesnenin daha iyi betimlenmesinde hiç işe yaramayacak bir sıfat sözcüğünü icat edebileceğini düşünmek pek kolay değil.

Eğer "bir insan"ı, "bilge insan" gibi ele almak doğru olsaydı, bu durumda "bir"in yüklem olarak da kullanılabileceğini düşünebilirdik ve "Solon bilgeydi" der gibi, "Solon birdi" ya da "Solon biriydi" diyebilirdik. Bu sonuncu dilegetirişin gerçekten kullanıldığı doğrudur, ancak kendi başına alındığında pek de anlaşılır değildir. Örneğin, eğer geçtiği bağlam içinde "bilge"nin bütünlenmesi gerekiyorsa, "Solon bilge biriydi" denebilir. Ancak tek başına, "bir", bir yüklem olamaz.[51] Çoğulunu aldığımızda bu daha da açık olacaktır. "Solon bilge bir kişiydi" ve "Thales bilge bir kişiydi" tümcelerini birleştirerek "Solon ve Thales bilge kişilerdi" diyebildiğimiz halde, "Solon ve Thales birlerdi" diyemeyiz. Ama eğer "bir", "bilge"nin olduğu gibi hem Solon'un ve hem de Thales'in özelliği olsaydı, bunun niye olanaksız olduğunu görmek zor olurdu.

§ 30. Şimdiye kadar hiç kimsenin "bir" özelliğinin bir tanımını verememesi de bununla bağlantılıdır. Leibniz,[52] "Kavrama yetisinin [*Verstand*] bir fiiliyle yakaladığımız şey, birdir" derken, "bir"i kendi kendisiyle açıklıyor. Kavrama yetisinin bir fiiliyle çok olanı da yakalayamaz mıyız? Leibniz aynı yerde bunu kabul etmektedir. Baumann[53] da benzer bir şey söylüyor: "Bir olan, bir olarak kavradığımızdır;" ve devam ediyor: "Nokta olarak aldıklarımıza ya da daha fazla bölünmesini istemediklerimize

51 Bununla çelişir görünen kullanımlar görülmektedir; ancak daha yakından baktığımızda bir kavram-teriminin orayı doldurması gerektiğini ya da "bir"in bir sayı sözcüğü olarak kullanılmadığını, yani biriciklikten değil, birlikli (birimli) olmaktan söz edildiğini görürüz.

52 Baumann, a.g.y., Cilt II, s. 2.

53 A.g.y., Cilt II, s. 669.

bir olarak bakıyoruz; ancak ister deneysel ister saf olsun, dışsal görümüzden her birine çok olarak da bakabiliriz. Her tasarım, bir diğeri karşısında sınırlandırıldığında birdir; ancak yine de kendi içinde çok olana ayrıştırılabilir." Bu tavır, olguların doğası tarafından kavrama dayatılan bütün sınırlamaları ortadan kaldırmakta ve her şeyi bizim ele alışımıza bağımlı kılmaktadır. Bir kez daha soruyoruz: Herhangi bir nesneye "bir" özelliğini atfetmek (yüklemek), her nesne bizim ele alışımıza göre bir olacak ya da olmayacaksa nasıl bir anlam ifade edebilir? Nasıl olur da, ününü olabildiğince kesin ve sağlam olma savma dayandıran bir bilim, bu kadar bulanık bir kavram üzerinde temellenir?

§ 31. Şimdi, her ne kadar Baumann[54] "bir" kavramını içsel görüye dayandırıyorsa da, yukarıda verilen alıntıda bölünmez olma ve yalıtılmış olma ya da sınırlandırılmış olma vasıflarından [*Merkmale*] söz ediyor. Eğer bu doğru olsaydı, hayvanların da bir tür birlik tasarımına sahip olabilmeleri beklenirdi. Aya bakan bir köpeğin, bizim "bir" sözcüğüyle adlandırdığımız şeye ilişkin, iyi tanımlanmamış bile olsa, bir tasarımı olabilir mi? Bu pek inanılabilecek bir şey değil, ama yine de tekil nesneleri ayırt ettiği kesindir: Başka bir köpeği, sahibini, oynadığı taşı, kesinlikle bizim gibi yalıtılmış olarak, kendi içinde, bölünmemiş olarak görmektedir. Kuşkusuz, kendini birden fazla köpeğe karşı savunmak zorunda oluşuyla, bir köpeğe karşı savunmak zorunda oluşu arasında bir ayrım olduğunu fark edecektir, ama bu, Mill'in fiziksel fark dediği şeydir. Şunu özellikle bilmek istiyoruz: Köpek, daha büyük başka bir köpek tarafından ısırıldığında ve bir kediyi kovaladığında, iki durum arasında bizim "bir" sözcüğüyle ifade ettiğimiz ortak bir nokta olduğunun, bulanık bir biçimde de olsa, bilincinde midir? Bu bana pek mümkün gözükmüyor. Dolayısıyla, birlik ideasının, Locke'un[55] düşündüğü gibi "bizim dışımızdaki her nesne ve içimizdeki her idea tarafından kavrama yetisine sunulduğu" sonucunu çıkarsamıyorum, tersine insanları hayvanlardan ayıran yüksek zihinsel yetiler aracılığıyla bizim için bilinebilir olduğunu kabul ediyorum. So-

54 A.g.y., Cilt II, s. 669.
55 Baumann, a.g.y., Cilt I, s. 409.

nuç olarak, bizim algıladığımız kadar hayvanların da algıladığı, şeylerin sınırlandırılmış olma ve bölünmemiş olma gibi özellikleri bizim kavramımız açısından özsel olanı oluşturamaz.

§ 32. Yine de onunla belirli bir bağlantısı olduğu tahmin edilebilir. Dilde, "birleşmiş olma"mn, "bir"den türemesi buna işaret ediyor. Bir şeyin kendi içindeki farklılıkları, o şeyin ortamıyla arasındaki farklılıklara göre önemsizleştikçe ve bu şeyin içsel bağlamı, ortamıyla olan bağlamına ağır bastıkça, bu şeyin "seçik" bir nesne olarak ele alınması daha uygun olur. Çünkü bir şeyin "birleşmiş" olması, bizim o nesneyi ortamından koparılmış ve kendi başına ele almamıza olanak veren bir özelliğe sahip olduğu anlamına gelmektedir. Fransızcadaki "uni" önekinin nasıl "dümdüz" veya "düzgün" anlamına geldiğini de aynı şekilde açıklayabiliriz. "Birlik" sözcüğü de, bir ülkenin siyasi birliğinden veya bir sanat yapıtının birliğinden söz ederken aynı şekilde kullanılmaktadır.[56] Ancak bu anlamdaki "birlik" artık "birleşmiş olma" veya "üniter" olmayla bağlantısındaki kadar "bir"le bağlantılı değildir. Çünkü, "Yeryüzünün bir Ay'ı* vardır" denildiğinde, bununla sınırlandırılmış ya da bölünmemiş bir Ay anlatılmak istenmemektedir, tersine, bununla Yeryüzünün uydu düzeninin, Venüs'ünkü veya Mars'ınki ya da Jüpiter'inkiyle karşıt olduğu söylenmektedir. Sınırlandırılmış olmaları ya bölünmemiş olmaları açısından, Jüpiter'in uyduları da bizim uydumuzla karşılaştırılabilirler ve bu anlamda birliklidirler.

§ 33. Bazı yazarlar daha da ileri giderek, bir şeyin yalnızca bölünmemiş olmasını değil, bölünemez olmasını da talep etmişlerdir. G. Köpp[57] kendi içinde bütün ve parçalara ayrılamaz olarak düşünülen şeye, o şeyin bilgisine ister duyular yoluyla ister başka bir şekilde ulaşalım, bir tekil demektedir; ve sayı verilecek olan tekilleri, "bir"ler olarak adlandırmaktadır, doğal olarak burada "bir"i birim anlamında kullanmaktadır. Baumann da, dış-

56 Birim" sözcüğünün tarihi üzerine karş. Eucken, Geshichte der philosophischen Terminologie, 2, s. 122-23, s. 136, 220.

* Almancada "Mond", özel ad olarak hem Yeryüzünün uydusu olarak Ay, hem de genel ad olarak "uydu" anlamına geliyor. (ç.n.)

57 Schularithmetik, s. 5-6, Eisenach 1867.

sal şeylerin bize kendilerini kesin birlikler olarak sunmadıkları görüşünü, onları çok olarak da değerlendirmekte özgür olduğumuzla temellendirirken, parçalara ayrılamamayı kesin bir birliğin vasfı olarak veriyordu. Besbelli ki, bu yazarlar, kendi birimleri için onların içsel biraradalığını sınırsızca sıkılaştırarak, bizim onları keyfi bir şekilde değerlendirmemizden bağımsız bir ölçüt bulmayı ummaktadırlar. Bu girişim, pratik olarak birim olarak adlandırılabilecek ve sayı atfedilebilecek hiçbir şey kalmayacağından başarısızlığa uğramaktadır. Bu yüzden hemen, şeyin kendisinin gerçekte parçalara ayrılmaması değil de, bizim onu böyle düşünmemiz ölçüt alınarak bir adım geri atılmıştır. Bu da bizi "görüş açısı" gibi kararsız durumlara geri götürmektedir. Şeyleri olduklarından farklı düşünmenin gerçekten bir yararı var mıdır? Aksine, yanlış bir kabulden yanlış sonuçlar çıkabilir. Parçalara ayrılamamak özelliğinden bir sonuç çıkarılmayacaksa, bu özellik neye yarar? Kavramın kesinliğini biraz azaltmakta bir sakınca yoksa, hatta bunu yapmak gerekiyorsa, bu kesinliğe ne gerek var? Belki de parçalara ayrılabilme özelliğini hiç düşünmemek gerekiyor. Sanki düşünce eksikliği bizi bir yere vardırabilirmiş gibi! Ne var ki, parçalara ayrılabilme özelliğini düşünmekten kaçınamayacağımız durumlar vardır; bir sonucun birimlerin birleştirilmesine dayandığı durumlarda, örneğin şu soruda olduğu gibi: Eğer bir günde 24 saat varsa, 3 günde kaç saat vardır?

Birimler Birbirleriyle Aynı mıdır?

§ 34. "Bir"i bir özellik olarak tanımlayan tüm girişimler başarısızlığa uğradığından, son olarak bir şeyi bir birim (birlik) olarak adlandırırken onu daha iyi belirlediğimiz görüşünü de bir kenara bırakmamız gerekir. Şimdi bir kez daha şu sorumuza geri döndük: Eğer "birim" şeyin yalnızca bir diğer adıysa, eğer herhangi bir şey ya da her şey birlikse veya birlik olarak ele alınabiliyorsa şeyleri niye birimler olarak adlandırıyoruz? E. Schröder[58] gerekçe olarak, sayma nesnelerine atfedilen aynılığı [*Gle-*

58 A.g.y., s. 5.

ichheit] göstermiştir: Öncelikle, "şey" ve "nesne" sözcüklerinin de neden buna işaret edemeyecekleri anlaşılamıyor. Sonra şunu sormak gerekir: Sayılacak nesnelere niye aynılık atfediliyor? Aynılıkları onlara sadece atfedilmiş midir, yoksa onlar gerçekten aynı mıdırlar? Ne olursa olsun, iki nesne hiçbir zaman tamamıyla aynı değildir. Öte yandan, herhangi iki nesnenin birbirleriyle örtüştükleri bir nokta her zaman bulunabilir. Ve böylelikle de bir kez daha şeylere keyfi olarak bakma durumuna geri dönüyoruz – şeylere, gerçekte sahip olduklarının ötesine giden bir aynılığı yüklemeye istekli olmadığımız sürece. Aslında birçok yazar birimlerin aynılığını hiçbir sınırlamada bulunmadan kabul etmektedir. Hobbes[59] şunları yazmıştır: "Matematikte mutlak anlamda sayı, onlardan biçimlendiği birimlerin birbirleriyle aynılığını önvarsaymaktadır." Hume[60], sayıyı ve niceliğin oluşturucu parçalarını tümüyle benzer kabul etmiştir. Thomae,[61] kümenin bir bireyini bir birim olarak adlandırmakta ve "Birimler birbirleriyle aynıdır" demektedir. Gerçi kümenin bireylerinin birbirlerinden farklı olduğunu da rahatlıkla ya da daha doğru olarak söyleyebiliriz. Şimdi bu söz konusu aynılığın sayılarla olan ilgisi nedir? Şeyleri birbirlerinden ayırmaya yarayan özellikler, onların sayal sayılarını dikkate aldığımızda önemsiz ve konu dışıdır. Bu nedenle bu özellikleri sayının dışında tutmak istiyoruz. Ancak şu anda bulunduğumuz çizgide bunu pek de başaramayacağız. Çünkü varsayın ki, Thomae'nin istediği gibi "nesneler kümesinin bireysel üyelerinin kendine özgü özelliklerini soyutladık" ya da "farklı şeyleri ele alırken onları ayırmaya yarayan özellikleri dikkate almamayı" başardık. Bu durumda geriye, Lipschitz'in düşündüğü gibi "söz konusu şeylerin sayal sayısının kavramı" kalmaz; burada elde ettiğimiz, söz konusu şeylerin altına düştüğü genel bir kavramdır. Şeylerin kendileri, böylelikle özelliklerinin hiçbirini kaybetmezler. Örneğin, siyah ve beyaz olan iki kediyi ele alırken, onları ayırt eden özellikleri dikkate almazsam, "kedi" kavramına aşağı yukarı ulaşırım. Eğer her ikisini de bu kavramın altına getirsem ve onları, varsa-

59 Baumann, a.g.y., Cilt I, s. 242.
60 Baumann, a.g.y., Cilt II, s. 568.
61 A.g.y., s. 1.

yalım, birim olarak adlandırsam bile, beyaz olanı hep beyaz ve siyah olanı da hep siyah olarak kalır. Onların renkleri hakkında düşünmesem ya da onların farkları konusunda bu bakımdan bir çıkarım yapmasam bile kediler renksiz olamazlar ve daha önce oldukları gibi farklı kalırlar. Soyutlama yoluyla ulaştığımız "kedi" kavramı gerçi bu özelliklere sahip değildir, ama işte tam da bu yüzden bir kavramdır.

§ 35. Yalnızca kavramlarla yapılan işlemler aracılığıyla farklı şeyleri aynı kılamayız. Ama bunu yapabilsek bile, artık elimizde farklı şeyler değil, yalnızca tek bir şey olacaktır; çünkü Descartes'm[62] söylediği gibi şeylerde sayı ya da çokluk onların çeşitliliğinden kaynaklanmaktadır. Ve E. Schröder'in[63] haklı olarak öne sürdüğü gibi: "Şeylere sayı yüklenmesi gereği, ancak birbirlerinden açıkça ayırt edilebilir, örneğin uzaysal ve zamansal olarak ayrılmış ve birbirlerine karşı sınırlandırılmış nesnelerin var olması durumunda akla yakın bir istektir." Zaman zaman çok büyük benzerliklerin, örneğin bir parmaklığın tepe oklarının benzerliğinin sayı yüklemeyi güçleştirmesi söz konusudur. W. Stanley Jevons[64] bu noktayı oldukça berrak bir şekilde ortaya koyuyor: "Sayı, farklılığın bir diğer adından başka bir şey değildir. Tam özdeşlik [*Identität*] birliktir ve farklılıktan, farklı cinsten çokluk [*Mehrheit*] çıkar." Ve devam ediyor (s. 157): "Genellikle birimlerin, birbirleriyle tam anlamıyla benzer olmaları itibariyle birim oldukları söylenmiştir; ancak bazı bakımlardan tam anlamıyla benzer olsalar da, en az bir noktada farklı olmaları gerekir, aksi takdirde çokluk kavramı onlara uygulanamazdı. Üç para aynı mekânı aynı zamanda kaplayacak kadar benzer olsaydı, ortada üç madeni para değil, tek bir madeni para olurdu."

§ 36 Bununla birlikte, birimlerin farklı olmaları gerektiği görüşü, birazdan görüleceği gibi yeni güçlükleri de beraberinde getirmektedir. Jevons diyor ki: Bir birim (unit) aynı problemde

62 Baumann, a.g.y., Cilt I, s. 103.
63 A.g.y., s. 3.
64 *The Principles of Science*, 3. baskı, s. 156.

bir birim olarak değerlendirilen her diğer nesneden ayırt edilebilen bir düşünce nesnesidir." Ancak burada, birim kendi kendisiyle açıklanmıştır ve "her diğer nesneden ayırt edilebilen" yan tümcesi onu daha açıkça betimleyememektedir, çünkü bu kendiliğinden anlaşılır bir tümcedir. Nesnelere, basitçe ve yalnızca ilk söylenilen nesneden ayırt edebildiğimiz için diğer nesneler adını vermekteyiz. Jevons şöyle devam ediyor:[65] "5 simgesini her yazışımda aslında söylemek istediğim

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1\text{'dir;}$$

ve her bir birimin bir diğerinden farklı olduğu tamamıyla açıktır. Gerekirse bunları şöyle de yazabilirim:

$$1' + 1'' + 1''' + 1'''' + 1'''''$$

Eğer farklılarsa, onları farklı şekilde işaretlemek kesinlikle gereklidir; aksi takdirde büyük bir karışıklık doğacaktır. Çünkü eğer, yalnızca 1'in bulunduğu konumdaki bir fark, birimdeki bir farkı kendiliğinden gösterseydi [*bedeuten*], o zaman bunun hiçbir istisnası olmayan bir kural olarak ortaya konması gerekirdi, yoksa 1 + 1'in 2'yi mi, yoksa 1'i mi gösterdiğini asla bilemezdik. Buna göre, 1 = 1 eşitliğinden vazgeçmemiz gerekirdi ve aynı şeyi, asla iki kez işaretleyememenin sıkıntısına düşerdik. Belli ki bu mümkün değildir. Bununla birlikte farklı şeylere farklı simgeler yüklemeyi, simgelerimizde ortak bir öğeyi niye hâlâ tuttuğumuzu görmek zorlaşır; niye

$$1' + 1'' + 1''' + 1'''' + 1''''' \text{'in}$$

yerine

$$a + b + c + d + e\text{'yi}$$

yazmayalım?

Ancak aynılık [*Gleichheit*] bir kere ortadan kalkmıştır ve belirli bir benzerliğin gösterilmesi işe yaramamaktadır. Böylece bizim bir'imiz, ellerimizin arasından kayıp gitmektedir; kendine özgü nitelikleri içindeki nesnelerle baş başa kalmış oluyoruz.

$$1', 1'', 1'''$$

göstergeleri sıkıntımızı açıkça ifade etmektedir. Aynılığa sahip olmamız gerekir, dolayısıyla elimizde 1 var; ama farklılığa da sa-

65 A.g.y., s. 162.

hip olmamız gerekir, dolayısıyla elimizde tırnak işaretleri var ve bunlar ne yazık ki aynılığı yeniden ortadan kaldırmaktadır.

§ 37. Diğer yazarlarda da aynı güçlükle karşılaşıyoruz. Locke diyor ki:[66] "Bir birim idesinin* yinelenmesiyle ve onu başka bir birime eklemekle, iki sözcüğüyle gösterilen bileşik bir ide yapmış oluyoruz. Ve kim bunu yapabilir ve böyle devam edebilirse, herhangi bir sayı hakkındaki son bileşik ideye bir tane daha ekler ve ona da bir ad verirse, sayabilir". Leibniz[67] sayıyı 1 ve 1 ve 1 veya birlikler olarak tanımlıyor. Hesse[68] ise şunları yazıyor: "Cebirde 1 göstergesi ile ifade edilen birim idesini tasarlayabilen herhangi biri, ..., birincisi kadar iyi bir şekilde bir ikinci birim tasarlayabilir ve aynı türden diğer birimlerle bunu sürdürebilir. İkincinin birinciyle biraraya gelerek tek bir bütün oluşturması 2 sayısını verir."

Yukarıda alıntılanan bölümlerde, "birlik" ve "bir" sözcüklerinin gönderimleri arasındaki bağıntıya dikkat edilmelidir. Leibniz birlik kavramıyla bu birin, şu birin ve diğer birin altına düşeceği bir kavramı anlamaktadır ya da onun ifadesiyle "Bir'in soyutu birliktir".** Locke ve Hesse'nin birim ve bir'i aynı gönderimde kullandıkları anlaşılıyor. Aslında Leibniz de bunu yapıyor; çünkü birlik kavramının altına düşen tekil nesnelere topluca bir derken, bu sözcükle tekil nesneyi değil, ama hepsinin altına düştüğü kavramı betimliyor.

§ 38. Bununla birlikte, eğer karışıklığın içinden çıkılmaz bir hale gelmesi istenmiyorsa, birlikle bir arasında kesin bir ayrımı korumak daha iyi olacaktır. "Bir sayısı"ndan söz ettiğimizde, belirli tanımlık yoluyla bilimsel incelemenin belirli ve tekil bir nesnesine işaret etmiş oluyoruz. Çeşitli bir sayıları yoktur, yalnızca bir tane vardır. 1'de, "Büyük Frederick" veya "altın elementi"nin çoğul kabul etmediği gibi çoğul kabul etmeyen bir özel ad söz konusudur. 1'i herhangi bir tırnak işareti kullanmadan yazma-

66 Baumann, a.g.y., Cilt I, s. 410-11.

* Burada, Locke'un felsefi yaklaşımına uygun olması açısından *"Idee"* sözcüğünü "ide" olarak çeviriyoruz. (ç.n.)

67 Baumann, a.g.y., Cilt II, s. 3.

68 Vier Species, s. 2.

** "Abstractum ab uno est Unitas"

mız bir rastlantı değildir ya da bunda notasyondan kaynaklanan bir eksiklik yoktur. Jevons aşağıdaki

$$3 - 2 = 1$$

denklemini, herhalde şöyle yazardı:

$$(1' + 1'' + 1''') - (1'' + 1''') = 1'$$

Ama bu durumda aşağıdaki çıkarma işleminin sonucu ne olacaktır?

$$(1' + 1'' + 1''') - (1'''' + 1'''''')$$

Kesinlikle 1' değil. Dolayısıyla, Jevons'un görüşüne göre yalnızca farklı birler değil, farklı ikiler vb. vardır; çünkü 1'''' ve 1'''''', 1'' ve 1''' 'ün yerine konamazlar. İşte bu, sayının şeylerin birarayа yığılması olmadığını kesin olarak görmemizi sağlıyor. Her zaman aynı olan bir sayısının yerine, göstergeleri ne kadar benzer olursa olsun farklı şeyler koymayı denediğimizde aritmetik ortadan kaldırılmış olur; çünkü bu farklı göstergeleri aynı kabul etmek yanlış olacaktır. Aritmetiğin en büyük gereksiniminin hatalı bir notasyon olduğunu ise kesinlikle kabul edemeyiz. Öyleyse 1'i, İzlanda, Aldebaran, Solon vb. gibi farklı nesneler için bir gösterge olarak görmek olanaksızdır. Bu saçmalık, en iyi şekilde, diyelim 2, 5 ve 4 gibi üç kökü olan bir denklem göz önüne alınarak gösterilebilir. Şimdi Jevons'la birlikte 3 için şunu yazdığımızı varsayalım:

$$1' + 1'' + 1''';$$

ve 1' ve 1'' ve 1''' 'ü birimler olarak, yani halen Jevons'ı izleyerek söz konusu nesneler olarak alalım. Bu durumda 1' , 2'yi, 1'', 5'i ve 1''' de 4'ü gösterecektir. Öyleyse

$$1' + 1'' + 1'''$$

yerine

$$2 + 5 + 4$$

yazmak daha akla yakın olmaz mıydı?

Bir çoğul yalnızca kavram-terimlerine uygulanabilir. Dolayısıyla eğer "birim"lerden söz edeceksek, bu sözcüğü özel ad olan "bir"e eşdeğer olarak değil, kavram-terimine eşdeğer olarak kullanmalıyız. Eğer bu "birim", "sayı verilecek (sayılacak) nesne"ye gönderme yapıyorsa, bu durumda sayı birim olarak

tanımlanamaz. Ama eğer "birim" ile, altında bir sayısından başka hiçbir şeyi toplamayan bir kavramı anlıyorsak, bu durumda çoğulun bir anlamı yoktur, böylelikle Leibniz'in yaptığı gibi sayıyı birimler ya da 1 ve 1 ve 1 olarak tanımlamak bir kez daha olanaksız olmaktadır; çünkü, eğer "ve", "Bunsen ve Kirchhof"ta olduğu gibi kullanılıyorsa, öyleyse tıpkı altın ve altın ve altın'm, altından başka bir şey olmayışı gibi, 1 ve 1 ve 1 de 3 değil, ama 1'dir. Dolayısıyla

$$1 + 1 + 1 = 3$$

denkleminde artı işareti, bir topluluğu ya da "bileşik ideleri" göstermek için kullandığımız "ve"den farklı olarak yorumlanmalıdır.

§ 39. Demek ki, aşağıdaki güçlükle karşı karşıyayız: Eğer sayıyı çeşitli farklı nesneleri yan yana getirerek oluşturmak istersek, elde ettiğimiz sonuç, içindeki nesnelerin, onları birbirlerinden ayırmaya yarayan özellikleriyle içerildikleri bir yığılmadır ve bu da sayı değildir. Öte yandan bunu, aynı olanları biraraya getirerek oluşturmayı denersek, hep bire ulaşırız ve bir çokluğa hiçbir zaman ulaşamayız.

Eğer 1 ile sayılacak nesnelerin her birini betimlersek, aynı göstergeyi farklı şeylere yüklemek gibi bir hata yapmış oluruz. Ancak 1'i de farklılaştırıcı tırnak işaretleriyle donattığımızda aritmetik için kullanılamaz hale gelir.

"Birim (birlik)" sözcüğü, bu güçlüğü gizlemek için çok uygundur; ve "birim" sözcüğünü "nesne" ya da "şey" sözcüklerine tercih etmemizin gerçek sebebi, –bilinçaltında olsa da– budur. Sayı verilecek şeyleri "birlik" diye adlandırmaya başlarken, bunu onların farklılıklarına bir zarar getirmeden yapıyoruz; böylece biraraya getirme, toplama, birleştirme, ekleme ya da ona ne dersek diyelim, kendini aritmetiksel toplamaya dönüştürürken, "birim (birlik)" kavram-terimi de fark edilmeden özel ad olan "bir"e dönüşüyor. Eğer u harfine, önce bir n ve sonra da bir d eklersem, bunun 3 sayısı olmadığını herkes kolaylıkla görebilir. Bununla birlikte, eğer u, n ve d harflerini "birim" kavramı altına getirirsem, diyelim "bir birim ve bir birim ve bir başka birim" ya da "1 ve 1 ve 1" yerine, "u ve n ve

d"nin, bunun bize 3 sayısını verdiğine inanmaya son derece hazırız. Buradaki güçlük, "birim" sözcüğünün altında öylesine gizlenmiştir ki, onun varlığından haberi olan pek az kişi olsa gerek.

Burada, Mill haklı bir kınamayla, dilin ustaca bir manipülasyonundan söz edecektir; çünkü burada içsel düşünce sürecinin hiçbir dışsal tezahürü bulunmamaktadır; yalnızca bir yanılsama söz konusudur. Burada, eğer farklı olanı, sadece birim diye adlandırdığımızdan dolayı aynılaştırıyorsak, düşünceden yoksun sözcüklerin bazı gizemli güçler taşıması gerektiğini düşünüyoruz demektir.

Ortadaki Sorunun Üstesinden Gelme Girişimleri

§ 40. Şimdi bu güçlüğün üstesinden gelme girişimlerini temsil eden bazı ayrıntılı görüşleri ele alacağız; her ne kadar bunlar, bu amaç için açıkça bilincinde olunarak geliştirilmiş olmasalar da.

İlk öneri, zaman ve uzayın bazı özelliklerinin şu şekilde yardıma çağrılmasıdır. Kendi içinde ele alındığında uzayın bir noktası, bir diğerinden mutlak olarak ayırt edilemezdir, aynı şekilde bir doğru çizgi veya bir düzlem ya da örtüşen cisimler, alanlar ya da doğru parçaları için de bu böyledir; bunlar ancak tek bir görüde topluca biraraya geldiklerinde ayırt edilebilir olurlar. Yani burada aynılığı ayırt edilebilirlikle birlikte elde etmiş görünüyoruz. Aynı şey zaman bölümleri için de geçerlidir. Belki de Hobbes[69] bu yüzden birliklerin aynılığının, sürekliliğin [*Continuums*] bölünmesi dışında başka herhangi bir şeyden meydana gelebileceğini kabul etmenin zor olacağını düşünüyor. Thomae'nin[70] söylediği gibi: "Eğer uzayda bir bireyler kümesini veya birimleri göz önüne alır ve onlara birbirleri ardına sayı verirsek, ki bunun için zaman gereklidir, bu durumda ne kadar soyutlarsak soyutlayalım birliklerin ayırt edici özellikleri olarak geriye her zaman onların uzaydaki konumları ve zamandaki ardışıklık sıraları kalacaktır."

69 Baumann, a.g.y., Cilt I, s. 242.
70 A.g.y., s. 1.

Böyle bir görüş hakkındaki ilk kuşkumuz, sayılabilir olanın uzaysal ve zamansal olanlarla sınırlandırılmış olmasıdır. Leibniz,[71] uzun zaman önce Skolastik dönem düşünürlerinin, sayının sadece sürekliliğinin bölünmesinden çıktığı ve maddesel olmayan şeylere uygulanamayacağı yolundaki görüşlerine karşı çıkmıştı. Baumann[72] altını çizerek sayıyla zamanın birbirinden bağımsızlığını vurgulamakta, birlik kavramının zamandan ayrı olarak da düşünülebileceğini öne sürmektedir. St. Jevons:[73] "Üç madeni para, ister onları ardışık olarak sayalım, ister onları aynı anda görelim, üç madeni paradır. Birçok durumda farklılığın nedeni ne uzay ne de zamandır, yalnızca niteliktir. Örneğin, altının ağırlığını, eylemsizliğini ve sertliğini, bunlardan hiçbiri ne uzayda ne de zamanda birbirinden önce ya da sonra gelmese de, bunları üç ayrı nitelik olarak görürüz. Her ayırt etme aracı bir çokluk kaynağı olabilir." Buna şunu eklemek istiyorum ki, eğer sayı verilmiş nesneler gerçek durumda birbirlerini izlemiyorlarsa, yalnızca onlara birbirleri ardına sayı yüklenmişse, bu durumda zaman onları birbirlerinden ayırt etmenin zemini olamaz. Çünkü, onlara birbiri ardına sayı verebilmek için, zaten ayırt edici işaretlere sahip olmamız gerekir. Zaman, sayı verme ya da sayma için psikolojik bir gerekliliktir yalnızca, sayı kavramıyla hiçbir ilgisi yoktur. Uzaysal ve zamansal olmayan nesneleri, uzaysal ve zamansal noktalarla temsil ediyorsak, bunun, sayı verme işlemine bir yararı olabilir belki de; ancak burada ilkesel olarak sayı kavramının uzaysal ve zamansal olmayan nesnelere uygulanabilir olduğu varsayılmaktadır.

§ 41. Ancak bundan başka, uzay ve zaman dışında tüm ayırt edici işaretleri dikkate almadığımızı varsayarak, ayırt edilebilirlikle aynılığı biraraya getirme amacına gerçekten ulaşmış oluyor muyuz? Hayır! Çözüme bir adım daha yaklaşmış olmuyoruz. Eğer söz konusu nesneler, sonunda birbirlerinden ayrı tutulacaklarsa, bu nesnelerin az ya da çok benzer olmalarının fazlaca bir önemi yoktur. Burada tek tek noktaları ya da çizgileri veya her-

71 Baumann, a.g.y., Cilt II, s. 2.
72 A.g.y., Cilt II, s. 668.
73 A.g.y., s. 157.

hangi bir geometrik şekli, nasıl geometride bunların hepsini A olarak adlandıramazsam, aynı şekilde bunların tümünü de 1'le gösteremem; her iki durumda da önemli olan onları ayırt etmektir. Uzayın noktaları, yalnızca kendileri itibariyle, yani uzaysal ilişkileri dikkate alınmadığında birbirleriyle aynıdır. Ama eğer onları topluca düşüneceksem, bu durumda onları uzaydaki biraradalıklarıyla düşünmek durumundayım, yoksa onlar geri döndürülemez bir biçimde birin içinde kaynaşırlar. Noktalar biraraya gelince, bazen bir burç gibi bir motif oluşturabilir veya bir doğru çizginin üzerinde sıralanabilirler; ve aynı doğru parçaları, tek bir doğru parçası oluşturacak şekilde uç uca gelebilir ya da birbirlerinden ayrı durabilirler. Bu şekilde oluşan yapılanmalar, öğelerinin sayısı aynı kalırken tümüyle farklı görünümler alabilir. Böylelikle burada da karşımıza yine farklı beşler, altılar vb. çıkmaktadır. Zaman noktaları da, yine kısa ya da uzun, eşit ya da eşit olmayan zaman aralıklarıyla ayrılmışlardır. Bütün bunlar, sayıyla kesinlikle hiçbir ilişkisi bulunmayan bağıntılardır. Genel olarak hepsinde, sayının çok uzağındaki bir şey işe karışmaktadır. Tek bir anın bile, onu, örneğin uzayın bir noktasından ayırt etmeye yarayan bir kendine özgülüğü vardır; bunda ise sayı kavramından hiçbir iz bulunmaz.

§ 42. Bir diğer çıkış yolu, uzaysal ve zamansal sıralama yerine, daha genel bir sıralı dizi kavramını koymak da hedefe götürmemektedir; çünkü nesnelerin dizideki konumlarının, o nesnelerin ayırt edilebilme zemini olamaz; bu nesnelerin dizide düzenlenebilmeleri için zaten bir şekilde ayırt edilmiş olmaları gerekir. Böyle bir düzenleme, her zaman nesneler arasındaki, ister uzaysal, zamansal ya da mantıksal bağıntı olsun, ister ses aralıkları bağıntısı ya da başka bir şey olsun, bizi bir nesneden bir sonrakine götürmeye yardım eden ve onlar arasındaki ayırt edilebilirliği zorunlu olarak yerine getiren bağıntıları önvarsaymaktadır.

Hankel[74] bir nesneyi 1 kez ya da 2 kez ya da 3 kez düşünmemizden ya da ortaya koymamızdan söz ederken de, sayı verilecek şeylerde ayırt edilebilirlikle aynılığı biraraya getirme

74 A.g.y., s. 1.

girişiminde bulunmuş görünür. Ancak bunun da başarılı olmadığı hemen görülüyor; çünkü aynı nesne için bu tasarım ya da görülerin, eğer bunlar tek bir şeyde birarada toplanmayacaksa, bir şekilde birbirlerinden farklı olmaları gerekir. Üstelik düşünüyorum ki, ortalama bir Alman vatandaşını 45 milyon kez düşünmeden veya ortaya koymadan da (son derece dolambaçlı bir iş olurdu bu) 45 milyon Almandan söz etme hakkına sahibim.

§ 43. E. Schröder, olasılıkla St. Jevons'un ve her 1 göstergesinin sayılmış nesnelerden her birine göndermesini önerdiğinde ortaya çıkan güçlüklerden kaçınabilmek için, bu yöntemle nesnenin yalnızca resmedilmesini istemektedir. Schröder, bunun sonucu olarak sayının değil, yalnızca sayının göstergesinin, yani rakamın tanımını vermektedir. Schröder şunları söylüyor:[75] "Böyle birimlerden[76] *kaç tane* olduğunu ifade edebilecek bir göstergeye ulaşabilmek için, dikkatimizi sırayla bunlardan her birine yöneltiyor ve onu bir çizgiyle : 1 (bir "bir"le) resmediyoruz, bu bir'leri yan yana bir sıraya koyuyoruz ve bunu yaparken onları + (artı) simgesiyle birbirlerine bağlıyoruz, çünkü, aksi takdirde 1 1 1, bilinen sayı yazılımı gereği yüz on bir olarak okunabilir. Bu yolla şöyle bir gösterge elde ediyoruz:

$$1 + 1 + 1 + 1 + 1$$

ve bunların biraradalığını şöyle betimleyebiliyoruz:

"Bir doğal sayı birlerin bir toplamıdır."

Bu alıntı, sayının Schröder için bir *gösterge* olduğunu gösteriyor. Göstergenin ne ifade ettiği, yani benim sayı dediğim, "böyle birimlerden kaç tane olduğu" sözcükleriyle anlatılmıştır. Schröder, "bir" sözcüğüyle bile 1 göstergesini anlamaktadır, onun gönderimini değil. + göstergesini, kendiliğinden hiçbir içerik taşımadan yalnızca görülür bir işaret olarak, diğer göstergeleri birbirlerine bağlamak için kullanmıştır; toplamayı ise daha sonra tanımlamaktadır. Gerçekten de Schröder, sayılacak nesne kadar 1 göstergesini yan yana diziyoruz ve onları + göstergesiyle birbirlerine bağlıyoruz, diyerek ne demek

75 A.g.y., s. 5.
76 Sayı verilecek nesneler.

istediğini kısaca ortaya koyabilirdi. Sıfır ise hiçbir şey yazılmadan ifade edilebilirdi.

§ 44. St. Jevons sayılan şeylerin ayırt edici işaretlerini [*Kennzeichen*] sayıya taşımaktan kaçınmak için şunları söylüyor[77]: "Sayısal soyutlamanın açık bir temsilini oluşturmakta artık pek bir zorluk yok. Bunu yapmak için, çokluğu ortaya çıkartan farkın özelliğini soyutlamak ve yalnızca bu farkın olduğunu dikkate almak yeterlidir. *Üç adam*'dan söz ettiğimde, her birinin diğerinden ayırt edilmesini sağlayan ayırt edici işaretlere gereksinimim yok. Eğer bunlar gerçekten bir ve aynı adam değil de üç adam ise, bu işaretlerin varolması gerekir ve onlardan çokluk olarak söz ederken gerekli olan farkların varolduğunu belirtiyorumdur. Öyleyse belirlenmemiş sayı, *farklılığın boş biçimidir.*"

Şimdi bunu nasıl yorumlayacağız? Ya şeyleri bir bütün olarak birleştirmeden önce onları ayırt edici özelliklerinden soyutlayabiliriz, ya da önce bir bütün oluşturabiliriz ve sonra onu ayırt edici özelliklerinden soyutlarız. Birinci yöntemle şeyleri hiçbir zaman ayırt edemeyiz ve dolayısıyla farkların varolması gerçeğini de koruyamayız; ikinci yöntem Jevons'ın yöneldiği yöntemmiş gibi görünüyor. Ancak bana öyle geliyor ki, bu yöntemle biz hiçbir zaman 10000 gibi bir sayıya ulaşamayız, çünkü bu kadar çok sayıda farkı bir kerede yakalamak ve onların varolduğu gerçeğini korumak bizim gücümüzün çok ötesindedir; çünkü bu, ardışık olarak gerçekleşseydi, sayı hiçbir zaman tamamlanmazdı. Gerçi zaman içinde sayarız; ama bu bize sayının kendisini vermez, sadece sayılan sayıyı belirlemiş oluruz. Üstelik, bize nasıl soyutlayacağımızı söylemek, hiçbir durumda soyutlamanın ne olduğunun tanımını vermek demek değildir.

"Farklılığın boş biçimi" ifadesinden ne anlayacağız? Belki a ve b'nin belirsiz olarak bırakıldığı

"a, b'den farklıdır"

gibi bir tümceyi mi? Acaba bu tümce, diyelim 2 sayısı olabilir mi? Ama,

77 A.g.y., s. 158.

"Yeryüzünün iki kutbu vardır"

tümcesiyle

"Kuzey Kutbu Güney Kutbu'ndan farklıdır"

tümcesinin gönderimleri aynı mıdır? Açıkça değildir. İkinci tümce birinci doğru olmadan da doğru olabilir ve tersi. Ve 1000 sayısı için

$$\frac{1000 \times 999}{1 \times 2}$$

tane, her biri bir fark bildiren tümcelerin olması gerekirdi.

Jevons'ın söyledikleri özellikle 0 ve 1 sayılarıyla ilgili durumda işlemiyor. Gerçekte, örneğin Ay'dan 1 sayısını elde edebilmek için neyi soyutlamamız gerekir? Soyutlama yoluyla bazı kavramları gerçekten de elde ediyoruz, yani Yeryüzünün uydusu, bir gezegenin uydusu, kendinden ışıklı olmayan gök cismi, gök cismi, cisim, nesne kavramlarını. Ancak bu dizide 1'le karşılaşılmıyor; çünkü 1, Ay'ın altına düşebileceği bir kavram değildir. 0 durumunda ise, soyutlama sürecine başlayabileceğimiz hiçbir nesnemiz yoktur. 0 ve 1'in, 2 ve 3'ün olduğu anlamda sayı olmadıklarını söylemek de pek uygun değil. Sayı, "kaç tane?" sorusuna yanıt verir; ve eğer, örneğin "bu gezegenin kaç tane uydusu vardır?" diye sorduğumuzda, sorunun anlamını değişikliğe uğratmadan, nasıl 2 veya 3 tane diye yanıt verebiliyorsak, 0 ya da 1 tane diye de öyle yanıt verebiliriz. Kuşkusuz 0 ve 1 ile ilgili özel bir durum vardır; aslında bu, her tam sayı için ilkece doğrudur, ama sayı büyüdükçe bu durum daha az göze çarpmaktadır. Buradan yola çıkarak türlerdeki farklılığı öne sürmek son derece keyfi bir tutumdur. 0 ve 1 sayılarında yürümeyen bir şey, sayı kavramına esas oluşturamaz.

Son olarak, sayının bu şekilde ortaya çıktığını kabul etmekle, 5 sayısını aşağıdaki simgeleştirmeyle karşılaşılan güçlüğü de ortadan kaldırmış olmuyoruz:

$$1' + 1'' + 1''' + 1'''' + 1'''''$$

Bu yazım Jevons'ın sayının soyutlama yoluyla oluşturulmasıyla ilgili söyledikleriyle uyuşuyor; rakamların üstündeki tırnak işaretleri, hangi türden bir fark olduğunu belirlememekle birlikte bir farkın varolduğuna işaret ediyorlar. Ancak farkın

sadece varolması bile, daha önce gördüğümüz gibi Jevons'un görüşüne uygun olarak farklı birler, ikiler, üçler üretmek için yeterlidir ki, bunun aritmetiğin varlığıyla bağdaşır bir tarafı yoktur.

Sorunun Çözülmesi

§ 45. Şimdiye kadar nelerin ortaya konduğuna ve nelerin hâlâ yanıtsız kaldığına topluca bir bakalım.

Sayı, ne renk, ağırlık ve sertlikte olduğu gibi şeylerden soyutlanmıştır, ne de o özelliklerin olduğu anlamda şeylerin bir özelliğidir. Bir sayı tümcesinde ne hakkında bildirimde bulunduğumuz sorusu yanıtlanmadan kalmıştır.

Sayı fiziksel bir şey değildir, ama öznel bir şey, öznel bir tasarım da [*Vorstellung*] değildir.

Sayı şeylerin birbirine eklenmesiyle ortaya çıkmamaktadır. Her biraraya getirme fiilinden sonra yeni bir ad versek bile bir farklılık oluşmaz.

"Aynı cinsten çokluk" [*Vielheit*], "küme", "farklı cinsten çokluk" [*Mehrheit*] gibi terimler, kendi bulanıklıkları nedeniyle sayının tanımlanmasında uygun terimler değillerdir.

Bir ve birlik sözcüklerini ele alırken, şu soru yanıtsız kalmıştı: Şeyleri ele alışımızdaki keyfiliğin bir ve çok arasındaki her ayrımı bulanıklaştırmasını nasıl kısıtlandırabiliriz?

Sınırlandırılmış olmak, bölünmemiş olmak, parçalara ayrılması olanaksız olmak gibi deyimlerden hiçbiri "bir" sözcüğüyle ifade ettiğimiz şeyin işe yarar bir tanımlayıcı vasfı [*Merkmale*] olamaz.

Eğer sayı verilecek şeyleri birimler olarak adlandırırsak, bu durumda birimlerin aynı olduğu savı, eğer sınırlanmadan yapılmışsa, yanlıştır. Gerçi belirli bir açıdan bakıldığında aynı olmaları doğrudur, ama bunun bir değeri yoktur. Eğer elde edilen sayı 1'den büyükse sayılan şeylerin farklı olması üstelik zorunludur.

Öyle görünüyor ki, birimlere birbiriyle çelişen iki nitelik yüklemeye zorlanmış durumdayız; yani aynılık ve ayırt edilebilirlik [*die Gleichheit und die Unterscheidbarkeit*].

Bir ile birim arasında da bir ayrım yapmak gereklidir. Matematiksel araştırmanın bir nesnesinin özel adı olarak "bir" sözcüğü, bir çokluk kabul etmemektedir. Sonuç olarak, sayıları birlerin yan yana konulmasıyla elde etmenin bir anlamı yoktur. 1 + 1 = 2 sayısal ifadesinde artı simgesi böyle bir biraraya getirmeye göndermemektedir.

§ 46. Sayıyı, onun asli kullanım biçimini meydana çıkaran bir yargı bağlamında ele almak, konuya biraz ışık tutacaktır. Bir ve aynı dışsal görüngüye bakarak, örneğin "Bu bir ağaç grubudur" ve "Burada beş ağaç var" tümcelerinin ikisini de aynı doğrulukta söyleyebilirim ya da "Burada dört şirket biraradadır" ve "Burada 500 adam çalışıyor" tümcelerini de; şimdi burada bir yargıdan diğerine değişen ne tekil şeylerdir, ne de bütündür veya onların biraradalığıdır, değişen yalnızca benim adlandırmamdır. Bu ise, sadece bir kavramın yerine bir diğerinin konulduğunun bir göstergesidir. Böylelikle, önceki paragrafta yanıtsız bırakılan ilk soruya verilebilecek bir yanıt akla geliyor: Bir sayı tümcesi bir kavram hakkında bir bildirim içerir. Belki bu en fazla 0 sayısında açıkça bellidir. Eğer "Venüs'ün 0 uydusu var" dersem, demek ki, hakkında bir şey öne sürülecek herhangi bir uydu ya da uydular grubu varolmamaktadır; ama burada "Venüs'ün uydusu" kavramına bir özellik, yani o kavramın altına hiçbir şey düşmeme özelliği atfedilmiş* [*beilegen*] olmaktadır. Eğer "Kralın arabası dört at tarafından çekiliyor" dersem, "Kralın arabasını çeken at" kavramına dört sayısını atfetmiş olurum.

Bu açıklamaya şöyle karşı çıkılabilir: "Alman İmparatorluğu'nda yaşayanlar" gibi bir kavram, onun tanımlayıcı özellikleri hiç değişmeden kalsa da, yıldan yıla değişen bir özelliğe sahip olacaktır, tabii eğer orada yaşayanlar hakkmdaki sayı tümcesi onun bir özelliğini dile getiriyorsa. Buna, nesnelerin kendi özelliklerini değiştirebilecekleri olgusunun, bizim onları aynı nesne olarak tanımamıza engel olmadığını söyleyerek yanıt verilebilir. Bununla birlikte, bu durumda daha açık bir gerekçe vermemiz gerekir. "Alman İmparatorluğu'nda yaşayanlar" kavramı, bir de-

* Frege, sayıların sadece kavramlara *atfedileceğini* ifade ederken *beilegen* fiilini kullanıyor; kavramların nesnelere özellik yüklemesi konusuyla karıştırılmaması için, kavram ile sayı arasındaki ilişkiyi bu *atfetme* sözcüğüyle karşılıyoruz ve böylece *sayı verilen (sayılan) nesne* ifadesinden de ayırt etmiş oluyoruz. Krş. § 57.

ğişken öğe olarak zaman öğesini içermektedir ya da matematiksel olarak ifade edersek, bu kavram zamanın bir fonksiyonudur. "a Alman İmparatorluğu'nda yaşayan biridir" yerine "a Alman İmparatorluğu'nda yaşıyor" diyebiliriz ve bu da o andaki tarihe karşılık gelecektir. Dolayısıyla kavramın içinde zaten akışkan bir şey vardır. Öte yandan, "Berlin saatiyle 1883 yılbaşı günü Alman İmparatorluğu'nda yaşayanlar" kavramına ait olan sayı bütün zamanlar için aynıdır.

§ 47. Bir sayı tümcesinin, bizim şeyleri ele alışımızdan bağımsız olarak olgusal bir şey ifade ediyor olması, bir kavramın bir tasarım gibi öznel bir şey olduğunu düşünenleri şaşırtabilir yalnızca. Ancak bu görüş yanlıştır. Örneğin, cisim kavramını, ağırlığı olan kavramının altına getirirsek ya da balina kavramını memeli kavramı altına getirirsek, nesnel bir şey öne sürmüş oluruz. Ancak eğer kavramların kendileri öznelse, onların birbirleri arasındaki bağıntıları, birbirlerinin altında kapsanmaları da [*Unterordnung*]* tıpkı öznel tasarımlar arasındaki bağıntı gibi öznel olacaktır. Gerçi,

"Bütün balinalar memelidir"

tümcesi kavramlar hakkında değil de, hayvanlar hakkmdaymış gibi görünmektedir; ancak eğer hangi hayvandan söz ettiğimizi sorarsak, tek tek hiçbirine işaret edemeyiz. Karşımızda duran bir balina bile olsa, tümcemiz onun hakkında hiçbir bildirimde bulunmuş olmaz. Bu tümceden, karşımızda duranın bir memeli olduğu sonucunu, onun bir balina olduğu öncülünü tümceye eklemeden çıkarsayamam ve bizim tümcemiz bu konuda bir şey içermemektedir. Genel bir ilke olarak, bir nesneyi bir şekilde betimlemeden ya da adlandırmadan ondan söz etmek olanağı yoktur. "Balina" sözcüğü herhangi tekil bir yaratığın adı değildir. Buna karşılık olarak, sözünü ettiğimiz nesnenin, belirli tekil bir nesne değil de, belirlenmemiş bir nesne olduğu ifade edilirse, bu "belirlenmemiş nesnenin" yalnızca kavram için diğer bir terim olduğu kanısına vardığım gibi, bunun aynı zamanda zayıf ve kendiyle çelişik bir terim olduğunu da düşünüyorum. Bizim tümcemizin yalnızca bazı hayvanla-

* *Unterordnung*'la ilgili açıklama için bkz. Sunuş, s. 47-48. (ç.n.)

rın gözlemlenmesiyle gerekçelendirilebileceği doğru bile olsa, bu tümcenin içeriğine ilişkin hiçbir şey kanıtlamamaktadır. Tümcenin ne hakkında olduğu sorusu açısından, onun doğru ya da yanlış olduğunun ya da onu hangi nedenlerle doğru kabul ettiğimizin hiçbir önemi yoktur. Öyleyse, eğer bir kavram nesnel bir şeyse, bir kavram hakkındaki bildirim olgusal bir içeriğe sahip olabilir.

§ 48. Daha önce verilmiş olan birkaç örnekte, farklı sayıların aynı şeye ait oldukları yolunda yanlış bir izlenimin doğması, bu örneklerde nesnelerin, sayıların taşıyıcıları olarak kabul edilmiş olmalarından ileri geliyor. Taşıyıcılığı gerçek sahibine, yani kavrama verdiğimizde, sayıların birbirlerinden ayrı olma özelliğine, tıpkı renklerin kendi alanlarında olduğu gibi, sahip oldukları ortaya çıkar.

Şimdi sayıların şeylerden soyutlama yoluyla elde edilmesi görüşüne nereden varıldığını da görüyoruz. Bu yolla elde ettiğimiz aslında kavramdır ve biz de bunda sayıyı keşfederiz. Dolayısıyla, soyutlama aslında bir sayı yargısının oluşumunu öncelemektedir. Benzeş bir karışıklık, yangın tehlikesi kavramını elde etmenin, ahşap, sazdan çatısı ve kırık bacası olan bir ev inşa etmekle olanaklı olacağı düşüncesidir.

Kavramın, sentetik tamalgmın [*Apperzeption*] birleştirici gücünden çok daha fazla biraraya toplama gücü vardır. Tamalgı yoluyla Alman İmparatorluğu'nda yaşayanları tek bir bütün halinde biraraya getirmek olanaklı olmayacaktır; ancak onları "Alman İmparatorluğu'nda yaşayanlar" kavramı altına kesinlikle getirebilir ve onları sayabiliriz.

Sayının geniş uygulama alanı da şimdi açıklanabilir oluyor. Aynı şeyin dışsal (fiziksel) ve içsel görüngüler için ve uzaysal ve zamansal olanlar için olduğu gibi, uzaysal ve zamansal olmayanlar için de kullanılabilmesi aslında çok şaşırtıcı bir durumdur. Ama sayı tümcesinde durum kesinlikle bu değildir. Dışsal ve içsel olanlar, ayrıca uzaysal ve zamansal olanlar gibi uzaysal ve zamansal olmayanlar da kavramların altına getirilirken, sayılar sadece kavramlara atfedilir.

§ 49. Görüşümüzün bir onaylanışını Spinoza'da buluyoruz.[78] "Bir şey, salt varolması [*Existenz*] itibariyle bir ya da tek olarak adlandırılır, özü itibariyle değil, diye yanıtlıyorum; çünkü şeyleri, ancak ortak bir ölçüye indirgedikten sonra, sayıların altına yerleştiriyoruz. Örneğin elinde bir sesters ve bir imperial tutan bir adam, elindeki sestersi ve imperiali bir ve aynı adla, yani gümüş para ya da madeni para diye adlandırmadan iki sayısı hakkında düşünmeyecektir; ancak ondan sonra iki gümüş parası ya da iki madeni parası olduğunu öne sürebilir; çünkü gümüş para ya da madeni para adlarıyla yalnızca sestersi değil, imperiali de adlandırmaktadır." Ancak Spinoza sözlerini: "Bundan açıkça görülüyor ki, hiçbir sey, (söylendiği gibi) ona uygun düşen başka bir şey daha önce tasarlanmadan bir ya da tek olarak adlandırılmıyor", diye sürdürüyor ve Tanrı'yı doğru olarak bir ya da tek olarak adlandıramayacağımızı, çünkü O'nun özü hakkında soyut bir kavram oluşturamayacağımızı söyleyerek, bir kavramın ancak çok sayıda nesneden soyutlama yoluyla edinilebileceği görüşüyle de yanılgıya düşüyor. Aksine, biz bir kavrama, onun tanımlayıcı vasıflarından* [*Merkmalen*] yola çıkarak da ulaşabiliriz; ve böyle bir durumda onun altına hiçbir şey düşmeme olanağı da vardır. Eğer bu olmasaydı, varolmayı hiçbir zaman yadsıyamazdık ve böylece varolmanın olumlanması da tüm içeriğini kaybederdi.

§ 50. E. Schröder,[79] bir şeyin sıklığından söz edebilme durumunda, söz konusu şeyin adının her zaman cinse ait bir ad, genel bir kavram-terimi (*notio communis*) olması gerektiğine dikkat çekiyor: "Bir nesneyi bütün özellikleri ve tüm bağıntıları içinde tasarlar tasarlamaz, o nesne dünyadaki biricikliğini ortaya ko-

78 Baumann, a.g.y., Cilt I, s. 169. [*Epistolae doctorum quorundam vivorum*, No. 50, J. Jelles]

* Burada "vasıf" [*Merkmal*], bir kavramı oluşturan veya tanımlayan kavramlar anlamında kullanılmaktadır; örneğin "insan" kavramının vasıfları, memeli, iki ayaklı canlı, ussal, vb. olabilir. Öte yandan bu vasıflar, nesnelerin özellikleridir. Vasıflarla, kavramlar arasındaki bağıntılar, nesnelerin kavramların altına düşmesi gibi bir bağıntı değildir; vasıflar, ait oldukları kavramların altında kapsanırlar [*Unterordnung*]. Krş. § 53 ve § 88. Ayr. Bkz. Sunuş s. 47-48 (ç.n.)

79 A.g.y., s. 6.

yacak ve artık ona benzer başka bir nesne olmayacaktır. Bu nesnenin adı, bir *özel ad* (nomen proprium) niteliğini yüklenecektir ve nesnenin kendisi, sanki ondan birden çok varmış gibi düşünülemeyecektir. Ancak bu durum yalnızca *somut* nesneler için değil, genelde her şey için, hatta nesnesinin tasarımı soyutlamalar [*Abstractionen*] yoluyla elde edilenler için de geçerlidir, ama ancak, o tasarım söz konusu şeyi tümüyle belirlenmiş bir şey haline getirecek yeterli öğeyi kendinde taşıyor olması koşuluyla... [Bir şeyin sayılması için] önce, onu tüm diğer şeylerden ayırt eden kendine özgü nitelik ve bağıntılarını dikkate almamanın ya da onlardan soyutlamanın olanaklı olması gerekir; ancak böylelikle şeyin adı, birden çok şeye uygulanabilmesini sağlayan bir kavrama dönüşür."

§ 51. Bu açıklamada doğru olan, öyle çarpıtılmış ve yanıltıcı bir dil kullanımının arkasına gizlenmiştir ki, burada onu düzgün bir hale getirmek ve sapla samanı birbirinden ayırmak zorunda kalıyoruz. Önce, bir genel kavram-terimini, bir şeyin adı olarak ele almak uygun değildir. Çünkü bu, sayının bir şeyin özelliği olduğu yanılsamasına yol açıyor. Bir genel kavram-teriminin işi bir kavramı belirtmektir [*bezeichnet*]. Yalnızca belirli tanımlıkla veya işaret zamiriyle birleştiğinde bir şeyin özel adı sayılabilir, ama bu durumda da artık bir kavram-terimi olmaktan çıkar. Bir şeyin adı bir özel addır. Yine, bir nesne, birden fazla bulunmaz, ama birden çok nesne aynı kavramın altına düşer. Daha önce Spinoza'yı eleştirirken sözünü ettiğimiz gibi, bir kavram, yalnızca onun altına düşen nesnelerden soyutlama yoluyla elde edilmez. Buna ben, bir kavramın, altına bu kavramla belirlenen yalnızca tek bir şey düşmesinden dolayı kavram olmaktan çıkmadığını da ekliyorum. İşte, 1 sayısı, tıpkı 2 ve 3'ün sayı olması anlamında, bu türden kavramlara (örneğin, Yeryüzünün uydusu gibi) ait bir sayıdır. Bir kavram söz konusu olduğunda soru, onun altına düşen bir şey olup olmadığı, eğer düşüyorsa da onun ne olduğudur. Bir özel ad için ise bu tür soruların hiçbir anlamı yoktur. Dilin, Ay gibi özel adları kavram-terimi olarak veya tersi olarak kullanıyor olması olgusu bizi yanıltmamalıdır; bu, ikisi arasındaki ayrımı etkilemez. Bir sözcük belirsiz tanım-

lıkla ve hiçbir tanımlık olmadan çoğul olarak kullanılıyorsa, o bir kavram-terimidir.

§ 52. Sayıların kavramlara atfedildiği görüşünün başka bir teyidi deyimlerde bulunmaktadır; Almancada "üç fıçı"dan söz ettiğimiz gibi, "on adam"dan, "dört tip"ten vb. söz edebiliriz. Buradaki tekil kullanım, söz konusu olanın o şey değil, kavram olduğunu göstermektedir.* Bu anlatım biçiminin bir yararı özellikle 0 sayısıyla ilgili durumda fark edilmektedir. Yoksa, günlük dil sayıyı kavramlara değil nesnelere yüklüyor; "balyaların ağırlığı"ndan söz eder gibi "balyaların sayısı"ndan söz ediyoruz. Yani, görünüşe göre nesnelerden söz etmiş oluyoruz, oysa bir kavram hakkında bir bildirimde bulunma niyetindeyiz. Dilin bu kullanımı kafa karıştırıcıdır. "Dört safkan at" dilegetirişi tıpkı "safkan"m "at" kavramını nitelemesi gibi, "dört"ün de "safkan at" kavramını nitelediği aldanmasını doğuruyor. Oysa, yalnızca "safkan" böyle bir vasıftır; "dört" sözcüğü ise bir kavram hakkında bir bildirim için kullanılmıştır.

§ 53. Bir kavram hakkında öne sürülen özelliklerle [*Eigenschaften*], kavramı meydana getiren tanımlayıcı vasıfları [*Merkmale*] kastetmiyorum elbette. Bu vasıflar, kavramların özellikleri değil, kavram altına düşen şeylerin özellikleridir. Dolayısıyla "dik açılılık", "dik açılı üçgen" kavramının bir özelliği değildir; ama doğru çizgiyle yapılmış dik açılı eşkenar üçgen olmadığını dile getiren tümce, "doğru çizgiyle yapılmış dik açılı eşkenar üçgen" kavramının bir özelliğini dile getiriyor; ona sıfır sayısını atfediyor.

Bu bakımdan varolma [*Existenz*] ile sayı arasında bir benzeşim vardır. Varolmanın olumlanması aslında sıfır sayısının yadsınmasından başka bir şey değildir. Varolma, kavramların bir özelliği olduğundan, Tanrı'nın varlığının ontolojik kanıtı da bir sonuca ulaşmıyor. Ancak "bir olma veya vahdet" de [*Einzig-*

* Türkçede birden fazla nesne için kullanılan sayı sözcüklerinden sonra çoğul eki gelmez, "üç adam" gibi; ama Almancada her zaman çoğul eki kullanılır, "üç adamlar" gibi. Ancak deyimler söz konusu olduğunda bunun istisnaları oluyor, bundan da Frege, sayının nesnelere değil, kavramlara yüklendiğine dair başka bir örnek çıkarıyor. (ç.n.)

keit], varolma kavramı gibi "Tanrı" kavramının oluşturucu vasfı [*Merkmal*] değildir. Sağlamlık, ferahlık veya kullanışlılık kavramları, bir evin inşa edilmesinde kirişlerin, tuğlaların ve harcın yanında ne kadar kullanılabiliyorsa, "bir olma" da "Tanrı" kavramının tanımlanmasında o kadar kullanılabilir. Bununla birlikte, ilkece bir kavramdan, yani onun oluşturucu vasıflarından kavramın özelliği olan bir şey çıkarsamanın olanaksız olduğunu söylemek de yanlış olacaktır. Tıpkı bir evin dayanıklılığını onun yapımında kullanılan taşların tipinden çıkarsayabileceğimiz gibi bazı koşullarda bu olanaklıdır. Dolayısıyla, bir kavramın oluşturucu vasıflarından "bir olmayı" ya da varolmayı hiçbir zaman çıkarsayamayacağımız sonucuna varmak çok ileri gitmek olur; ancak, bir kavramın vasıflarını onun altına düşen nesneye bir özellik olarak yüklemek hiçbir zaman doğrudan doğruya gerçekleşmez.

Bununla birlikte, varolmanın ve bir olmanın, kavramların tanımlayıcı vasıfları olabileceğini yadsımak da yanlış olacaktır. Bunlar, sadece dili izleyerek kavramlara yüklenebilecek vasıflar değillerdir. Örneğin altına yalnızca tek nesne düşen kavramları bir tek kavram altında toplarsak, o zaman "bir olma" bu yeni kavramın oluşturucu vasfı olur. Bu kavramın altına, örneğin "Yeryüzünün uydusu" adı verilen gerçek gök cismi değil de, "Yeryüzünün uydusu" kavramı düşer. Bu yoldan bir kavramı, daha yüksek, deyim yerindeyse, ikinci dereceden bir kavramın altına düşürebiliriz. Bununla birlikte bu ilişki, türlerin cinslerin altında kapsanmasıyla [*Unterordnung*] karıştırılmamalıdır.

§ 54. Şimdi, birliğin/birimin doyurucu bir açıklamasını vermek olanaklı oluyor. E. Schröder sözü geçen kitabının 7. sayfasında şunları yazıyor: "Bu cinse ait ad ya da kavram, verilen yöntemle oluşturulan sayının adlandırılması olacaktır ve onun birliğinin/birimliğinin özünü oluşturur."

Aslında, bir kavramı birim diye adlandırmak, yani kavrama ait olan (sayal) sayıyla ilişkilendiren birim diye adlandırmak en uygunu olmaz mı? Böylece, birim hakkında dile getirilen, onun çevresinden yalıtılmış ve parçalarına ayrılamaz olduğu hakkındaki bildirimlerin bizim için bir anlamı olur. Çünkü kendisine

sayı atfedilen kavram genelde altına düşeni belirli bir biçimde sınırlandırır. "Zahl sözcüğündeki harfler" kavramı, Z'yi a'dan ayırır, a'yı h'den ayırır vb. "Zahl sözcüğündeki heceler" kavramı, sözcüğü bir bütün olarak ve hiçbir parçası artık "Zahl sözcüğündeki heceler" kavramının altına düşmeyecek şekilde parçalarına bölmeden ayırt eder. Bütün kavramlar bu niteliğe sahip değildir. Örneğin "kırmızı" kavramı altına düşen bir şeyi, onun parçalarının da aynı "kırmızı" kavramı altına düşmesini engel olmadan çeşitli yollardan parçalarına ayırabiliriz. Bu türden bir kavrama hiçbir sonlu sayı ait olmayacaktır. Böylece, birimlerin yalıtılmış ve bölünemez oldukları tümcesi aşağıdaki gibi dile getirilebilir:

Yalnızca altına düşen nesneyi belirlenmiş bir şekilde sınırlandıran ya da onun keyfi olarak parçalarına ayrılmasına izin vermeyen kavram, sonlu bir sayal sayı hakkmdaki bir birim olabilir.

Bununla birlikte buradaki "bölünemezlik"in özel bir gönderimi olduğu görülüyor.

Şimdi birimlerin aynılığıyla onların ayırt edilebilirliğinin nasıl bağdaştırılabileceği sorusunu kolaylıkla yanıtlıyoruz. "Birim" sözcüğü burada iki anlamda kullanılmıştır. Eğer sözcüğün yukarıda açıklanan gönderimi varsa birimler aynıdır. "Jüpiter'in dört uydusu vardır" tümcesinde birim, "Jüpiter'in uydusu"dur. Bu kavramın altına uydu I düştüğü gibi, uydu II, uydu III ve uydu IV de düşmektedir. Yani şunu söyleyebiliriz: I'in bağlı olduğu birimle, II'nin bağlı olduğu birim aynıdır, bunu benzer şekilde sürdürebiliriz. Bu da bize aynılığı [*Gleichheit*] verecektir. Ama birimlerin ayırt edilebilirliğini öne sürdüğümüzde, bundan, sayılan şeylerin ayırt edilebilir olduğunu anlıyoruz.

IV. Sayal Sayı Kavramı

Her Tekil Sayı Kendi Başına Varolan Bir Nesnedir

§ 55. Şimdiye kadar, bir sayı tümcesinin bir kavram hakkında bildirim içerdiğini gördüğümüz için, her tekil sayının Leibnizci tanımını 0 ve 1'in tanımlarını vererek tamamlamayı deneyebiliriz.

0 sayısını, altına hiçbir nesnenin düşmediği kavrama ait sayı olarak tanımlamak akla yatkın geliyor. Ancak burada, 0'm yerine aynı anlama gelen "yok" geçmiş görünüyor; bu yüzden şu şekilde tanımlamayı tercih ediyoruz: Eğer, *a* ne olursa olsun, *a*'nın bir kavram altına düşmediği tümcesi tümel olarak doğruysa, 0 sayısı bu kavrama aittir

Benzer biçimde, 1 sayısının F kavramına ait olduğunu söyleyebiliriz, eğer *a* ne olursa olsun, "*a*'nın F kavramının altına düşmediği" tümcesi tümel olarak doğru değilse ve

"*a* F'nin altına düşer" ve "*b* F'nin altına düşer"

tümcelerinden, *a*'mn ve *b*'nin aynı oldukları sonucu tümel olarak çıkıyorsa.

Şimdi geriye, herhangi verilmiş bir sayıdan bir sonraki sayıya geçmeyi sağlayacak genel bir tanım vermek kalıyor. Aşağıdaki şekilde ifade etmeyi deneyelim: Eğer F kavramının altına düşen bir *a* nesnesi varsa ve n sayısı da "F'nin altına düşen, ama a olmayan" kavramına ait olursa, (n+1) sayısı F kavramına ait olur.

§ 56. Bu tanımlar, bizim önceki sonuçlarımızın ışığı altında kendilerini öylesine rahat kabul ettiriyorlar ki, onların neden yeterli olarak kabul edilemeyeceklerinin gösterilmesi gerekiyor.

En fazla kuşkuya neden olan sonuncu tanımdır; çünkü açık konuşmak gerekirse "n sayısının ait olduğu G kavramı" dilegetirişinin anlamını, "(n+1) sayısının ait olduğu G kavramı" dilegetirişinin anlamını bildiğimizden daha fazla bilmiyoruz. Gerçi son iki tanımı birlikte kullanarak,

"1+1 sayısı F kavramına aittir"

diyebiliriz ve daha sonra bu tanımı kullanarak,

"1+1+1 sayısı F kavramına aittir"

dilegetirişini anlamlı kılabiliriz ve bu böylece sürdürülebilir; ancak bizim tanımlarımızı kullanarak, –kaba bir örnek verelim– Julius Caesar sayısının herhangi bir kavrama ait olup olmadığına ya da bu bilinen Galya Fatihinin bir sayı olup olmadığına hiçbir zaman karar veremeyiz. Bundan başka, yukarıda önerilen tanımlama çabalarımızın aracılığıyla, eğer *a* sayısı F kavramına ait ise ve *b* sayısı da aynı kavrama ait ise, $a = b$ 'nin zorunlu olduğunu kanıtlayamayız. Demek ki "F kavramına ait olan sayı" ifadesini doğrulayamayacağız ve dolayısıyla, belirgin bir sayıya ulaşmaktan çok uzak olduğumuzdan, bir sayısal aynılığı [*Zahlengleichheit*] kanıtlamak bizim için genelde olanaksız olacak. 0 ve 1'i tanımlamış olduğumuz da sadece bir yanılsamadır; aslında yaptığımız,

"0 sayısı ...'na aittir"

"1 sayısı ...'na aittir"

ifadelerinin anlamlarını saptamaktır; ancak bu durumda 0 ve 1'in kendi başına varolan, kendileri oldukları teşhis edilebilen* [*wiedererkennbare*] nesneler olduklarını ayırt etmeye hiçbir yetkimiz yoktur.

§ 57. Şimdi artık, "bir sayı tümcesinin bir kavram hakkında bir bildirim içerdiği" dilegetirişiyle ne anlatmak istediğimiz konusunda açık bir görüşe sahip olmanın zamanı gelmiştir. "0 sayısı F kavramına aittir" tümcesinde, 0 yalnızca yüklemdeki bir öğedir

* Bu ifade, 0'ın, 1'in, vb, her birinin ayrı ayrı kimliklerinin teşhis edilmesi anlamına geliyor. (ç.n.)

(F kavramını gerçek özne alırsak). Bu sebepten 0, 1 veya 2 gibi bir sayıyı bir kavramın özelliği olarak nitelemekten kaçındım. Tekil sayı, tam da, bildirimin sadece bir bölümünü oluşturmakla, kendi başına varolan bir nesne olarak görünmektedir. Daha önce, "1 sayısından" söz ettiğimizde belirli tanımlığın onu bir nesne olarak sınıflandırmaya yaradığına dikkat çekmiştim. Bu kendi başına varolma aritmetikte her yerde karşımıza çıkar, örneğin 1 + 1 = 2 eşitliğinde olduğu gibi. Şimdi burada amacımız, bilimin isteklerine uygun bir sayı tanımına ulaşabilmek olduğundan, günlük dilde sayının sıfat yapısında da kullanılıyor olması bizi engelleyemeyecek. Bu engelden kendimizi her zaman kurtarabiliriz. Örneğin, "Jüpiter'in dört uydusu vardır" tümcesi "Jüpiter'in uydularının sayısı dörttür" tümcesine çevrilebilir. Burada "...dır" sözcüğü "gökyüzü mavidir" tümcesindeki gibi koşaç [*Copula*] olarak alınmamalı. Bu, "Jüpiter'in uydularının sayısı dörttür" ya da "4 sayısıdır" diyebilmemizde görülüyor. Burada "...dır" 'ın anlamı "bir şeye eşittir" veya "bir şeyle aynıdır" anlamındadır. Böylece, "Jüpiter'in uydularının sayısı" dilegetirişinin, "dört" sözcüğüyle aynı nesneyi gösterdiğini öne süren bir eşitlik elde ediyoruz. Ve aritmetikteki egemen tümce biçimi, eşitliktir. "Dört" sözcüğünün, Jüpiter ya da uyduları hakkında hiçbir şey içermediğine yönelik bir itiraz bizi etkilemez. Aynı şekilde, Columbus dediğimiz kişiyle Amerika'nın kâşifi dediğimiz adam aynı olsalar da, "Columbus" ismi de keşif veya Amerika hakkında hiçbir şey içermemektedir.

§ 58. Dört veya Jüpiter'in uydularının sayal sayısı dediğimiz nesneler için onları kendi başına varolan bir şey yapabilecek herhangi bir öznel tasarım[80] oluşturamadığımız itirazı yöneltilebilir. Ancak bu, sayıya yüklediğimiz 'kendi başına varolma'nın bir kusuru değildir. Gerçi bir zarın üzerindeki dört nokta tasarımımızda "dört" sözcüğüne karşılık gelecek bir şeyler bulmak kolaydır; ama bu bir yanılsamadır. Yeşil bir çayır düşünelim; belirsiz tanımlığı "bir" sayı sözcüğüyle değiştirdiğimizde önceki tasarımımıza hiç yeni bir şey eklenmediğini, oysa "yeşil" sözcüğüne tasarımımızdaki bir şeyin karşılık düştüğünü görürüz. Eğer kâğıt üzerine basılı "Gold" sözcüğünü tasarımlarsak,

80 "Tasarım" imge türü bir şey anlamında. [Bkz. dipnot 47 (ç.n.)]

hemen onunla bağlantılı olan herhangi bir sayıyı düşünmeyiz. Bu sözcüğün kaç harften oluştuğunu soracak olursak, yanıt 4 sayısıdır; ama böylelikle tasarım daha belirgin olmamıştır, tersine tümüyle olduğu gibi kalabilir. Burada sayıyı bulduğumuz yer, yeni eklediğimiz "Gold sözcüğünün harfleri" kavramıdır. Zarm üzerindeki dört nokta durumunda konu biraz daha karanlıktır; çünkü kavram, noktaların benzerliğinden yararlanarak kendini öylesine dolaysız kabul ettirmektedir ki, onun araya girdiğini güçlükle fark ederiz. Sayının tasarımını ne kendi başına varolan nesne olarak ne de dış dünyadaki herhangi bir şeyin özelliği olarak oluşturabiliriz; çünkü sayı gerçekte ne hissedilebilir bir şeydir ne de dış dünyadaki bir şeyin bir özelliğidir. Bu, özellikle 0 sayısı durumunda son derece açıktır. İstenildiği kadar 0 görülebilir yıldız tasarımının oluşturulması denensin, boşunadır. Gerçi gökyüzünün tümüyle bulutlarla kaplı olduğu düşünülebilir; ancak bunda "yıldız" sözcüğüne ya da 0'a karşılık gelecek hiçbir şey yoktur. Olsa olsa, şu yargıya varılmasını sağlayabilecek bir durum tasarlanabilir: Şu anda görülebilecek yıldız yok.

§ 59. Her sözcük bize herhangi bir öznel tasarımı çağrıştırabilir, hatta "yalnızca" gibi bir sözcük bile; ancak bu öznel tasarımın sözcüğün içeriğine karşılık gelmesi gerekmez; bu, her insanda çok farklı olabilir. Örneğin, içinde bu sözcüğün geçtiği bir tümceyi çağrıştıran bir durum tahayyül edilebilir; veya söylenen sözcük, bize yazılı sözcüğü çağrıştırır.

Yalnızca tikel şeylerle ilgili bir durum değil bu. Hiç kuşku yok ki, Güneş'e olan uzaklığımızın hiçbir tasarımını oluşturamayız. Çünkü bir ölçüyü kaç kez çoğaltmamız gerektiği kuralını bilsek bile, istediğimize biraz yakın bir resim tasarlamayı yine de beceremeyiz. Ama bütün bunlar, uzaklığın bulunmasını sağlayan hesaplamanın doğruluğundan kuşkulanmamız için ne bir nedendir, ne de bu uzaklığı temel alarak başka sonuçlar çıkarmamıza bir engel oluşturur.

§ 60. Dünya gibi çok somut bir şeyi bile bildiğimiz şekliyle tasarımlamamız mümkün değildir; her ne kadar çok farklı olduğunu bilsek bile Dünya'nın simgesi olarak kullandığımız orta

büyüklükte bir küreyle işin içinden çıkarız. Tasarımımız istediğimize çoğunlukla hiç uygun düşmese de, Dünya gibi bir nesne hakkında büyüklük söz konusu olduğunda bile büyük bir kesinlikle yargılarda bulunabiliriz.

Düşünce sayesinde hayal edilebilir olanın sınırlarının ötesine geçebiliriz, bunu yaparken çıkarımlarımız için gerekli olan desteği de yitirmeyiz. Biz insanlar için öznel tasarımlarımız olmadan düşünmemiz olanaksızmış gibi görünse bile, onların düşünceyle bağlantıları tümüyle yüzeysel, keyfi ve uzlaşımsal olabilir.

Dolayısıyla bir sözcüğün içeriğinin tasarımını oluşturamamak, onun tüm gönderimlerini yadsımak veya onu dilde kullanımdan dışlamak için bir neden değildir. Aslında karşıt yöndeki aldanış, bir sözcüğün gönderimini tek başına, yalıtılmış olarak sormamızdan, böylelikle de öznel tasarımı bir gönderim olarak kabul etmemizden kaynaklanıyor. Bu açıdan, ona karşılık gelecek zihinsel bir imge bulamadığımız bir sözcüğün içeriği de yokmuş gibi görünüyor. Ancak göz önünde bulundurmamız gereken her zaman bütün bir tümcedir. Sözcüklerin yalnızca bir tümce içinde gerçekten bir gönderimi [*Bedeutung*] vardır. Zihinsel imgeler gözümüzün önünde uçuşuyor olabilir, ancak bunların yargıdaki mantıksal öğelere karşılık gelmesi gerekmez. Tümcenin, bir bütün olarak bir anlamının [*Sinn*] olması yeterlidir; böylelikle onun parçaları da kendi içeriklerini kazanmış olur.

Sanıyorum bu görüş, aralarında sonsuz küçük[81] gibi bir kavramın da bulunduğu bazı zor kavramlara ışık tutacak ve etki alanı elbette matematikle sınırlı kalmayacaktır.

Sayılar için öne sürdüğüm kendi başına varolma, sayı sözcüğünün tümcenin bağlamı dışında da bir şeye gönderdiği [*bedeuten*] anlamında alınmamalı; bunu öne sürmemin nedeni sayı sözcüklerinin, gönderimlerini değiştirecek şekilde yüklem ya da sıfat olarak kullanılmalarına engel olmaktır.

81 Buradaki sorun, düşünülebileceği gibi, iki nokta tarafından sınırlanmış uzunluğu dx olan bir doğru parçası göstermek değil, bunun yerine $df(x) = g(x)dx$ türündeki bir denklemin anlamını tanımlamaktır.

§ 61. Ama, belki şöyle de karşı çıkılabilir ki, Dünya her ne kadar tam olarak tasarımlanamasa bile dışsal bir şeydir, belirli bir yer işgal eder; ama 4 sayısı nerededir? Ne içimizdedir ne de dışımızda. Bu sözcükleri uzamsal anlamda aldığımızda bu doğrudur. 4 sayısının uzamsal yerini belirlemenin hiçbir anlamı yoktur; ama bundan çıkacak tek sonuç 4'ün uzamsal bir nesne olmadığıdır, hiçbir şekilde bir nesne olmadığı değil. Her nesnenin bir yeri yoktur ki. Bu anlamda tasarımlarımız[82] da bizim içimizde (yani derimizin altında) değildirler. Derimizin altında sinir düğümleri, kan yuvarları ve buna benzer şeyler vardır ama öznel tasarımlarımız yoktur. Uzamsal yüklemler onlara uygulanamaz; bir tasarım diğer bir tasarımın ne sağındadır ne de solunda; öznel tasarımlar arasında milimetre cinsinden verilebilir bir uzaklık yoktur. Eğer yine de onlar bizim içimizdedir diyorsak, bununla anlatmak istediğimiz onların öznel olmasıdır.

Öznel olanın uzayda herhangi bir konumunun olmadığını kabul etsek bile, nesnel olan 4 sayısının hiçbir yerde olmaması nasıl olanaklıdır? Şimdi burada hiçbir çelişki olmadığını öne sürüyorum. 4 sayısı, aslında, onunla uğraşan herkes için aynıdır; ama bunun uzam içinde olmakla hiç ilgisi yoktur. Her nesnel nesnenin [*objective Gegenstand*] yeri yoktur.

Sayal Kavramını Elde Edebilmek İçin, Bir Sayısal Eşitliğin [Zahlengleichung] Anlamını Saptamamız Gerekir.

§ 62. Eğer onun hakkında hiçbir öznel tasarımımız veya görümüz yoksa, bir sayı bize nasıl verilmiş olabilir? Sözcüklerin ancak tümce bağlamında gönderimleri [*Bedeutung*] vardır. Şu halde bizim sorunumuz, sayı sözcüğünün geçtiği tümcenin anlamını [*Sinn*] açıklamaktır. Bu, bize hâlâ geniş bir seçim olanağı veriyor. Ama sayı sözcüklerinin, kendi başına varolan nesnelerin yerine duran sözcükler olarak anlaşılması gerektiğini daha önce ortaya koymuştuk. Bu da bize, anlamlı olması gereken tümceler sınıfını, yani bir sayıyı kendisi olarak teşhis etmemizi sağlayacak tümcele-

82 Bu sözcük tümüyle psikolojik anlamda anlaşılmalı, psikofizik anlamda değil.

ri vermek için yeterli olmaktadır. Eğer *a* simgesi bir nesneyi gösteriyorsa, bütün durumlar için *b*'nin *a* ile aynı olup olmadığına karar verilebilecek bir ölçütümüzün olması gerekir; hatta bu ölçütü uygulayacak gücümüz her zaman olmasa bile. Konumuzla ilgili olarak, aşağıdaki tümcenin anlamını tanımlamamız gerekir:

"F kavramına ait olan sayı ile G kavramına ait olan sayı aynıdır";

bunu yapabilmek, yukarıdaki tümcenin içeriğini,

"F kavramma ait olan sayal sayı"

ifadesini kullanmaktan kaçınarak başka terimlerle yeniden üretmek demektir. Bunu yaparak sayıların aynılığı hakkında genel bir ölçüte ulaşmış olacağız. Böylece belirli bir sayıya ulaşacak bir araç elde ettiğimizde ve onu aynı olarak teşhis ettiğimizde, bu sayıya onun özel adı olarak bir sayı sözcüğü atfedebiliriz.

§ 63. Hume[83] böyle bir araçtan söz etmişti: "Eğer iki sayı, birinin bir birimi diğerinin her birimine karşılık gelecek şekilde biraraya gelmişlerse, onların eşit olduklarını söyleriz." Sayısal eşitliğin eşleme (karşılıklılık) [*eindeutigen Zuordnung*]* olarak tanımlanabileceği kanısı, son yıllarda matematikçiler arasında yaygın bir kabul görmüş gibi görünüyor.[84] Ancak, incelenmeden geçilmemesi gereken mantıksal kuşkular ve güçlükler ortaya çıkmaktadır.

Aynı olma [*Gleichheit*] bağıntısı yalnızca sayılar arasmda bulunmaz. Bundan da, bu bağıntıyı yalnızca sayıların durumuna özgü olarak tanımlamak zorunda olmadığımız sonucu çıkar. Aynı olma kavramının önceden saptanmış olduğu düşünülmelidir ki, daha sonra bu kavramla ve sayal sayı kavramıyla birlikte sayal sa-

83 Baumann, a.g.y., Cilt II, s. 565. ["*A Treatise of Human Nature*" Kitap I, Kısım III, Bölüm 1]

* Frege, fonksiyonel bir bağıntı olarak 'eşleme bağıntısı' için '*eindeutige Zuordnung*' ifadesini, 'bire-bir eşleme' (veya 'tameşleme') için de '*beiderseits eindutige Zuordnung*' ifadesini kullanıyor. Sayal sayı kavramının tanımlanmasında özellikle kullandığı bağıntı 'bire-bir eşleme'dir.

84 Krş. E. Schröder, a.g.y., s. 7-8 ve E. Kossak, *Die Elemente der Arithmetik, Programm des Friedrichs-Werder'schen Gymnasiums*. Berlin, 1872, s. 16. G. Cantor, *Grundlagen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre*. Leipzig, 1883.

yıların bir diğeriyle ne zaman eşit olduğunu çıkarsamak olanaklı olsun ve sayısal eşitlik için özel bir tanıma gerek kalmasın.

Buna karşı olarak, sayal sayı kavramının bizim açımızdan henüz saptanmadığına, ancak sayısal eşitlik tanımının ışığında belirleneceğine işaret etmek gerekiyor. Amacımız, her iki tarafı da sayı olan bir eşitlik olarak alınabilecek bir yargının içeriğini oluşturmaktır. Dolayısıyla aynı olmayı bu özel durum için tanımlamak istemiyoruz; tersine, zaten bilinen aynı olma kavramının yardımıyla, neyin eşit olarak görülebileceğine ulaşmak istiyoruz. Kabul etmek gerekir ki bu, henüz mantıkçıların yeterince dikkat etmediği çok alışılmadık bir tanımlama tarzıdır; ancak bunun bütünüyle duyulmadık bir şey olmadığı da aşağıdaki birkaç örnekle görülecektir.

§ 64. "*a* doğrusu *b* doğrusuna paraleldir" yargısı, ya da göstergeleri kullanarak,

$$a \mathbin{//} b$$

bir eşitlik olarak alınabilir. Bunu yaparsak yön kavramını elde ederiz ve şunu söyleriz: "*a* doğrusunun yönü *b* doğrusunun yönüyle aynıdır." Demek ki, ilk yargının içeriğini *a* ile *b* arasında dağıtarak // göstergesini daha genel bir gösterge olan "=" le değiştirmiş oluyoruz. İçeriği öncekine göre daha farklı bir yoldan kısımlara ayırdık, bu da bize yeni bir kavram verdi. Şurası doğru ki, biz konuyu biraz aykırı bir biçimde ele aldık; konunun uzmanları paralel doğruları yönleri aynı olan doğrular olarak tanımlıyorlar. "Aynı doğruya paralel olan doğrular birbirlerine de paraleldirler" tümcesi, aynı şeye eşit olan şeyler hakkmdaki benzeş tümceye başvurularak rahatlıkla kanıtlanabilir. Buradaki tek sorun, durumun doğru sırasının tersine çevrilmesidir. Çünkü geometrik olan her şeyin ilkin görüde verilmiş olması gerekir. Şimdi herhangi birinin bir doğru çizginin yönünün görüsüne sahip olup olmadığını soruyorum. Doğru çizginin görüsüne kesinlikle sahiptir; ama görüde bu doğru çizginin yönü ile bir başkasının yönü arasında bir ayrım yapabiliyor muyuz? Pek de mümkün görünmüyor. Yön kavramına, ancak başlangıcını görüden alan zihinsel bir etkinlik süreci sonucunda ulaşılabilir. Öte yandan, paralel doğru çizgilerin bir tasarımına sahibiz. Öyleyse, buradaki uygun kanıtlama ancak ka-

nıtlanacak olanı, bizim "yön" sözcüğündeki kullanımımızı, gizlice varsayarak olanaklı kılınabilir; çünkü, eğer "aynı doğru çizgiye paralel olan doğrular birbirlerine de paraleldirler" tümcesi yanlışsa, *a // b* 'yi bir eşitliğe dönüştüremeyiz.

Düzlemlerin paralelliğinden de, doğru çizgilerin yönlerinde olduğuna benzer bir biçimde bir kavram elde edebiliriz; bunun için "yönlülük" [*Stellung*] adının kullanıldığına rastladım. Geometrik benzerlikten şekil kavramı türetilir, böylece "iki üçgen benzerdir" yerine "iki üçgenin şekilleri birbirine eşittir" veya "birinin şekli diğerinin şekline eşittir" diyoruz. Bu şekilde, geometrik biçimlerin doğrudaşlığından [*collinearen*] henüz adı konulmamış yeni bir kavram türetmek olanaklıdır.

§ 65. Şimdi, örneğin paralellikten[85] yola çıkıp yön kavramını elde etmek için aşağıdaki tanımı deneyelim:

"*a* doğrusu *b* doğrusuna paraleldir"

tümcesi,

"*a* doğrusunun yönüyle *b* doğrusunun yönü aynıdır"

tümcesi ile aynı anlama [*gleichbedeutend*] gelmektedir.

Bu tanım alışık olunandan bir ölçüde farklıdır; görünüşte zaten bilinen aynılık bağıntısını özel bir duruma uyarlamaya yaramaktadır, oysa gerçekte, daha önce sözü edilmemiş olan "*a* doğrusunun yönü" ifadesini konuya dahil etmek üzere düşünülmüştür. Bu durum ikinci bir kuşkunun doğmasına neden oluyor, acaba böyle yöntemleri kullanarak iyi bilinen özdeşlik [*Gleichheit*]* yasalarında bir karışıklığa yol açmış olmuyor muyuz? Nedir bu yasalar? Bu yasalar, analitik doğruluklar olarak yalnız-

85 Burada paralellik durumunu seçtim, çünkü kendimi böyle daha az sorunla ifade edebilirim ve kendimi daha kolay anlatabilirim. Bu uslamlamanın özü kolaylıkla sayısal eşitlik durumuna aktarılabilir.

* Şimdiye kadar tutarlı bir şekilde *Gleichung*'u *eşitlik*, *Gleichheit*'ı ise *aynılık* veya *aynı olma* olarak çevirdik. Bu tümcede *Gleichheit*, mantık yasası olarak özdeşlik anlamında kullanılmaktadır. 1892'de yayımlanan *Über Sinn und Bedeutung*'un hemen başında *Gleichheit* kullanımına yazdığı dipnotta Frege'nin: "Bu sözcüğü özdeşlik anlamında kullanıyorum ve 'a = b'yi, 'a, b'nin aynıdır' veya 'a ve b örtüşür' anlamında anlıyorum" [*Ich brauche dies Wort [Gleichheit] im Sinne von Identität und verstehe 'a = b' in dem Sinne von 'a ist dasselbe wie b' oder 'a und b fallen zusammen'*] diye belirttiğini de not edelim. (ç.n.)

ca kavramın kendisinden türetilebilmelidirler. Leibniz aşağıdaki tanımı veriyor:[86]

> "Eadem sunt, quorum unum potest substitui alteri salva veritate."*

Bu açıklama, benim aynı olma tanımıma uygundur. İster Leibniz'in yaptığı gibi "kendisiyle aynı"yı [*dasselbe*] kullanalım, ister "eşittir"i, bunun fazla bir önemi yoktur. "Kendisiyle aynı" ifadesinin her bakımdan, "eşittir"in ise belli durumlarda üzerinde anlaşmaya varılacak bir ifade olduğu düşünülebilir; ancak biz, bu ayrımın ortadan kalkacağı bir ifade biçimi benimseyebiliriz. Örneğin, "doğru parçaları boyca eşittir" yerine "doğru parçalarının boyları eşittir" veya "birbiriyle aynıdır" diyebiliriz; ve "yüzeyler renk bakımından eşittir" yerine "yüzeylerin renkleri birbirine eşittir" diyebiliriz. Ve yukarıdaki örneklerde sözcüğü böyle kullandık. Öyleyse, tümel birbirinin-yerine-koyabilirlikte gerçekten de bütün özdeşlik yasaları içerilmiştir.

Demek ki, bir doğrunun yönü için önerdiğimiz tanımımızı doğrulamak için, eğer *a* doğrusu *b* doğrusuna paralel ise,

"*b*'nin yönü"nün

geçtiği her yerde, onun yerine

"*a*'nın yönü"nü

koyabileceğimizi gösterebilmemiz gerekir. Bu girişim, başlangıçta doğru çizgi hakkında onun, bir başka doğrunun yönüyle örtüştüğü bildirimi dışında, başka bir şey bilmediğimizi kabul etmekle daha basitleştirilebilir. Öyleyse yalnızca böyle bir aynılıktaki ya da böylesi aynı olmaları oluşturucu öğe olarak barındıran içeriklerdeki birbirinin-yerine-koyabilmeyi göstermemiz gerekir.[87] Yön hakkındaki her türlü bildirimin her şeyden önce tanımlanması gerekir ve tanımlama için de herhangi bir doğrunun yönü yerine ona paralel olan herhangi bir doğrunun yönü-

86 *Non inegalans specimen demonstrandi in abstractis.* Erdmann ed. s. 94.

* Birbirleriyle aynı olan şeyler birbirlerinin yerine konulduğunda doğruluk değişmez. (ç.n)

87 Koşullu bir yargıda örneğin, yönlerin eşitliği bir koşul (önbileşen) veya sonuç (artbileşen) olarak ortaya çıkar.

nü koyabileceğimizin her zaman olanaklı kalmasını bir kural olarak koyabiliriz.

§ 66. Ancak önerdiğimiz tanım hakkında bizi kuşkuya düşüren üçüncü bir husus daha var.

"*a* doğrusunun yönü *b* doğrusunun yönüyle aynıdır" tümcesinde, *a*'mn yönü bir nesneymiş gibi görünmektedir,[88] bizim tanımımız bu nesneyi *b*'nin yönü gibi başka bir görünüşte ortaya çıktığında yeniden teşhis etmemiz için bir araç sağlıyor bize. Ancak bu araç tüm durumlar için yeterli olmuyor. Örneğin İngiltere ile Dünya'nm ekseninin yönünün birbirinin aynı olup olmadığına karar vermekte işimize yaramıyor. Bu örneğin anlamsızlığından ötürü bağışlanacağımı umuyorum. Doğal olarak hiç kimse İngiltere'yi Dünya'nm ekseninin yönüyle karıştırmayacaktır; ancak bunun nedeni bizim tanımımız değildir.

"*a*'nın yönü *q* ile aynıdır"

tümcesi, *q* "*b*'nin yönüdür" biçiminde verilmedikçe, onaylanması veya reddedilmesi hakkında bize hiçbir şey söylemeyecektir. Burada olmayan yön kavramıdır; eğer yön kavramımız olsaydı şuna karar verebilirdik ki, *q* bir yön değilse tümcemizin reddedilmesi gerekir, ama eğer *q* bir yön ise başlangıçtaki tanımımız bu tümcenin reddedilmesine ya da onaylanmasına karar verebilir. Şu tanım akla yatkın geliyor:

q bir yöndür, eğer yönü *q* olan bir *b* çizgisi varsa.

Ancak burada bir döngünün içinde olduğumuz açıktır. Çünkü bu tanımı kullanabilmemiz için,

"*q* , *b*'nin yönü ile aynıdır"

tümcesinin tüm durumlar için onaylandığını ya da reddedildiğini bilmemiz gerekir.

88 Belirli tanımlığm varlığı buna işaret eder. Benim için kavram, tekil bir yargı içeriğinin olası bir yüklemi, nesne ise böyle bir içeriğin olası öznesidir. Eğer,

"Teleskopun ekseninin yönü Dünya'nın ekseninin yönüyle aynıdır"

önermesinde, "teleskopun ekseninin yönü"nü özne olarak alırsak, "Dünya'nın ekseninin yönüyle aynı olma" da yüklemdir. Bu bir kavramdır. Ancak "Dünya'nın ekseninin yönü" yüklemin bir öğesidir yalnızca; özne de yapılabildiğinden dolayı o bir nesnedir.

§ 67. Eğer, *q*'nün bir yön olduğu yukarıdaki tanım aracılığıyla ortaya kondu, diyecek olursak, bu durumda *q* nesnesinin ortaya konuluş biçimini, onun bir özelliği gibi ele alma (öyle olmadığı halde) tehlikesiyle karşılaşırız. Bir nesnenin tanımı gerçekte nesne hakkında bir şey öne sürmez, yalnızca göstergenin gönderimini ortaya koyar. Bu yapıldıktan sonra da tanımın kendisi nesne hakkında bir şey öne süren bir yargıya dönüşür; ancak artık nesneyi ortaya koymamakta, onun hakkında yapılan diğer bildirimlerle aynı düzeyde yer almaktadır. Üstelik, eğer bu yolu benimseyeceksek, bir nesnenin yalnızca tek bir şekilde verilebileceğini de varsaymamız gerekir; çünkü *q*'nün bizim tanımımız aracılığıyla ortaya konmamış olmasından, onun böyle ortaya konulamayacağı sonucuna başka türlü ulaşılamaz. Böylece tüm eşitlikler buradan ortaya çıkar, dolayısıyla bize aynı şekilde verilen her şey, kendisinin aynı olarak kabul edilecektir. Ancak bu, söylemeye bile değmeyecek kadar açık ve yararsız bir ilkedir. Aslında, bu durumda öncüllerin herhangi birinden farklı olan bir sonuca ulaşılamaz. Eşitliklerin çok çeşitli ve anlamlı [*bedeutsame*] kullanımlarının olması, farklı şekillerde verilmiş olan bir şeyin, yine de kendisi olarak teşhis edilebilmesi yüzündendir.

§ 68. Bu yöntemlerle keskin sınırları olan herhangi bir yön kavramına ve de aynı nedenlerden ötürü herhangi bir sayal sayı kavramına ulaşamayacağımız için, başka bir yol deniyoruz. Eğer *a* doğrusu *b* doğrusuna paralel ise, "*a* doğrusuna paralel olan doğru" kavramının kaplamı* [*Umfang*], "*b* doğrusuna paralel doğru" kavramının kaplamıyla aynıdır; öte yandan, eğer iki kavramın kaplamları aynı ise, *a*, *b*'ye paraleldir. Şu halde aşağıdaki türden açıklamaları deneyelim:

> *a* doğrusunun yönü "*a* doğrusuna paralel" kavramının kaplamıdır;
> *d* üçgeninin şekli "*d* üçgenine benzer" kavramının kaplamıdır.

* "Bir kavramın kaplamı" ifadesi, o kavramın altına düşen tüm nesneleri belirtmek için kullanılıyor. Bkz. Sunuş. s.46-47 (ç.n.)

Bunu, bizim konumuza uygulayabilmek için doğru çizgilerin ya da üçgenlerin yerine kavramları, paralelliğin ya da benzerliğin yerine de, bir kavramın altına düşen nesnelerle bir diğer kavramın altına düşen nesneleri birebir eşleyebilme [*beiderseits eindeutige Zuordnung*] olanağını koymamız gerekir. Kısaca ifade etmek için, eğer bu bire-bir eşleyebilme olanağı varsa, F kavramıyla G kavramının 'eşsayılı' [*gleichzahlig*]* olduğundan söz edeceğim; ancak bu 'eşsayılı' sözcüğünün keyfi olarak seçilmiş bir dilegetiriş biçimi olarak anlaşılmasını, anlamının içinde geçen sözcüklere göre değil, bu belirlemeyle ortaya çıktığının kabul edilmesini bekliyorum.

Böylece benim tanımım şu oluyor:

> F kavramına ait olan sayal sayı "F kavramıyla eşsayılı" kavramının kaplamıdır.[89]

§ 69. Bu açıklamanın yerinde olduğu hemen anlaşılmayabilir. Çünkü kavramların kaplamlarını sayılardan daha farklı şeyler olarak düşünmüyor muyuz? Bu konuda düşünülenler, kavramların kaplamları hakkmdaki temel bildirimlerle aydınlığa kavuşuyor. Bu bildirimlerde:

1. Aynılıkları,

2. Birinin diğerinden daha kapsamlı [*umfassender*] olması; ifade edilmiştir

* Tıpkı aynı zamanda meydana gelen olayları nitelemek için kullanılan *'simultan'* veya *'gleichzeitig'* kavramları gibi, Frege de bu bağlama uygun bir sözcük olarak *gleichzahlig*'i icat ediyor. Bu kavramı, 'eşzamanlı' sözcüğüne benzer şekilde 'eşsayılı' sözcüğüyle karşıladık. (ç.n.)

89 Sanıyorum ki, "kavramın kaplamı" yerine basitçe "kavram" diye de yazabilirdik. Ancak buna iki şekilde karşı çıkılabilirdi:
1. Benim daha önce tekil sayıların nesne olmalarından söz eden ifademle çelişecekti, yani "iki sayısı" [*die zwei*] gibi belirli tanımlıklarda kullanılan ifadelerde belirtildiği gibi ve sayılarla "bir sayıları", "iki sayıları" gibi çoğul kullanımların olanaksızlığından dolayı ve sayı, bir sayı tümcesinin yükleminin yalnızca bir parçası olduğu için;
2. Kavramlar birbirleriyle örtüşmeseler de, aynı kaplama sahip olabildiklerinden.
Her iki itirazın da yanıtlanabileceği kanısındayım; ancak bununla uğraşmak bizi şimdiki amaçlarımızdan uzaklaştırır. Bir kavramın kaplamının ne olduğunun bilindiğini varsayıyorum.

Şimdi,

"F kavramıyla eşsayılı" kavramının kaplamı, "G kavramıyla eşsayılı" kavramının kaplamıyla aynıdır

tümcesi doğrudur, yalnızca ve yalnızca,

"F kavramına ait olan sayı ile G kavramına ait olan sayı birbiriyle aynıdır."

tümcesi de aynı zamanda doğru ise. Artık bunda tam bir uyum vardır.

Kuşkusuz, bir kavramın kaplamının diğerinden daha kapsamlı olduğu anlamındaki kullanımımızı, bir sayının diğerinden daha kapsamlı olduğu şeklinde ifade etmiyoruz; ama

"F kavramıyla eşsayılı" kavramının kaplamı

"G kavramıyla eşsayılı" kavramının kaplamından

daha kapsamlı olması gibi bir durum da olanaklı değildir; ama şu olabilir: G ile eşsayılı olan tüm kavramlar, F ile de eşsayılı iseler, F ile eşsayılı olan kavramlar da G ile eşsayılı olurlar. Burada kullanılan "daha kapsamlı" deyişi, elbette sayılar için kullanılan "daha büyüktür" deyişiyle karıştırılmamalıdır.

Düşünülebilir diğer bir durum da, "F kavramıyla eşsayılı" kavramının kaplamının diğer bir kavramın kaplamından daha kapsamlı veya daha az kapsamlı olabileceği durumdur; ancak bu diğer kavram bizim tanımımız gereği bir sayal sayı olamaz; bir sayal sayı için bir kavramın kaplamından daha kapsamlı veya daha az kapsamlı diye söz etmek pek alışılan bir şey değildir; ancak bu durum ortaya çıksa bile, yine de bizim söylediklerimize engel olabilecek bir şey yoktur ortada.

Tanımımızın Tamamlanması ve Onaylanması

§ 70. Tanımlar değerlerini, verimlilikleriyle gösterirler. Kanıtlama zincirlerinde bir kenara bırakılabilen ve hiçbir eksik halkaya neden olmayan tanımlar tümüyle değersiz olarak değerlendirilip reddedilmelidir.

Öyleyse, bizim F kavramına ait olan sayal sayı tanımımız-

dan, sayıların bilinen özelliklerinden bazılarının türetilip türetilemeyeceğini deneyelim. Burada kendimizi en basit olanla sınırlayacağız.

Bunun için "eşsayılı olma" [*Gleichzahligkeit*] teriminin daha kesin bir açıklamasını vermek gereklidir. "Eşsayılı olmayı" bire-bir eşleme (karşılıklılık) cinsinden tanımlamıştık, şimdi yapılacak olan bu sonuncu ifadenin nasıl anlaşılması gerektiğini ortaya koymaktır, çünkü onun görüyle bir bağlantısı olduğu kolaylıkla varsayılabilir.

Aşağıdaki örneği inceleyelim! Eğer bir garson bir masada bulunan tabakların sayısı kadar bıçağı masaya yerleştirdiğinden emin olmak istiyorsa, ne bıçakları ne de tabakları saymasına gerek vardır; bütün yapacağı, bıçakların, tabakların hep sağ tarafına konulmasına özen göstererek her bir tabağın yanına bir bıçak bırakmaktır. Böylece tabaklar ve bıçaklar bire-bir eşleme içinde ve aynı uzamsal ilişkide olurlar. Şimdi eğer aşağıdaki

"*a* A'nın hemen sağında yer alıyor"

tümcesinde, *a* için başka, A için başka nesnelerin yerleştirildiğini düşünürsek, bu süreç sırasında içeriğin değişmeden kalan kısmı, bağıntının özünü oluşturmuş olur. Şimdi bunu genelleştirelim.

Eğer bir *a* nesnesi ve bir *b* nesnesiyle ilgili bir yargı-içeriğinden, *a* ve *b*'yi çıkartırsak, geriye, iki noktada eksik olan bir kavram-bağıntısı [*Beziehungsbegriff*] kalır. Eğer

"Yeryüzünün Ay'dan daha fazla kütlesi vardır"

tümcesinden "Yeryüzü"nü çıkarırsak, "Ay'dan daha fazla kütlesi olan" kavramını elde ederiz. Eğer, "Ay" nesnesini çıkartırsak, "Yeryüzünden daha az kütlesi olan" kavramını elde etmiş oluyoruz. Ama her iki nesneyi de aynı anda çıkartırsak, elimizde bir kavram-bağıntısı kalıyor ki, bu kendi başına alındığında bir yalın kavramın sahip olduğu anlamdan fazlasına sahip değildir; kavram-bağıntısının bir yargı-içeriği meydana getirmesi için her zaman tamamlanması gerekir. Ama farklı yollardan da tamam-

lanabilir: Yeryüzü ve Ay yerine Güneş ve Yeryüzünü koyabilirim; çıkarma işlemini yaparak kavramla, onu tamamlayanın ayrılması da sağlanmaktadır.

Karşılıklı bağıntısı olan her tekil nesne çiftinin kavram-bağıntısı karşısındaki durumu –bu çifti kavram-bağmtısmm öznesi olarak adlandırabiliriz–, tekil bir nesnenin altına düştüğü kavramla olan durumu gibidir. Yalnız burada özne, bileşik öznedir. Zaman zaman söz konusu bağıntının simetrik olması durumunda, bu durum "Peleus ve Thetis, Achilleus'un ana ve babasıdır"[90] tümcesinde olduğu gibi dile gelir. Buna karşılık, "Yeryüzü Ay'dan daha büyüktür" tümcesinin içeriğini, "Yeryüzü ve Ay"m bileşik özne olarak görünmesini sağlayacak şekilde başka sözcüklerle ifade etmek pek olanaklı değildir; çünkü 've' bağlacı her zaman iki şeyin aynı düzeyde alındığına işaret edecektir. Ancak bu konumuzu etkilemiyor.

Kavram-bağmtısı konusu, yalın kavramlarda olduğu gibi saf mantığın bir parçasıdır. Burada bizi ilgilendiren herhangi bir bağıntının özel içeriği değil, yalnızca mantıksal biçimidir. Ve bunun hakkında öne sürülenler analitik olarak doğrudur ve a priori olarak bilinirler. Bu, kavram-bağmtılarında olduğu gibi, diğer kavramlar için de doğrudur.

Nasıl,

"*a*, F kavramının altına düşüyor"

a nesnesiyle ilgili yargı-içeriğinin genel biçimiyse,

"*a*, *b*'yle φ bağıntısı içindedir"

dilegetirişini de bir *a* nesnesi ve bir *b* nesnesiyle ilgili bir yargı-içeriğinin genel biçimi olarak alabiliriz.

§ 71. Şimdi, eğer F kavramının altına düşen her nesne, G kavramının altına düşen bir nesneyle φ bağıntısı içindeyse ve G kavramının altına düşen her nesneye karşı, F kavramının altına düşen bir nesne onunla φ bağmtısı içindeyse, bu durumda F ve G kavramlarının altına düşen nesneler φ bağıntısı içinde birbirleriyle eşlenmişlerdir.

90 Böyle bir durum, "ve"nin ancak görünüşte iki özneyi birleştirdiği, ama aslında iki tümceyi birleştirdiği durumla karıştırılmamalıdır.

"F kavramının altına düşen her nesne, G kavramının altına düşen bir nesneyle φ bağıntısı içindedir"
dilegetirişinin, F kavramının altına düşen hiçbir nesne olmaması durumunda neye gönderme yaptığı sorulabilir. Bu ifadeyi şöyle anlıyorum:

"*a*, F kavramının altına düşüyor"

ve

"*a*, G kavramının altına düşen hiçbir nesneyle φ bağıntısı içinde değildir"
gibi iki tümce, *a* neyin göstergesi olursa olsun, her ikisi de birlikte doğru olamazlar; öyleyse ya ilk tümce ya da ikincisi yanlıştır veya her ikisi de yanlıştır. Bundan da "F kavramının altına düşen her nesne, G kavramının altına düşen bir nesneyle φ bağıntısı içindedir" tümcesinin, F kavramının altına düşen bir nesne olmaması durumunda da doğru olduğu görülebilir; çünkü bu durumda, *a* ne olursa olsun,

"*a*, F kavramının altına düşüyor"
tümcesi her zaman yanlış olacaktır.

Aynı şekilde,

"G kavramının altına düşen her nesneye karşı, F kavramının altına düşen bir nesne onunla φ bağıntısı içindedir"
tümcesi de

"*a*, G kavramının altına düşüyor"
ve

"F kavramının altına düşen hiçbir nesne a ile φ bağıntısı içinde değildir"
gibi iki tümcenin, *a* neyin göstergesi olursa olsun, her ikisinin birlikte doğru olamayacağına gönderme yapmaktadır.

§ 72. Böylelikle, F ve G kavramlarının altına düşen nesnelerin φ bağıntısı içinde birbirleriyle eşlenmiş olduklarını gördük. Ama bizim ele aldığımız durumda bu eşlemenin bire-bir olması gerekir. Bundan, aşağıdaki iki tümcenin her ikisinin de sağlanmasını anlıyorum:

1. Eğer *d*, *a* ile φ bağıntısı içindeyse ve eğer *d*, *e* ile φ bağıntısı içindeyse, demek ki, genel olarak, *d*, *a* ve *e* ne olurlarsa olsunlar, *a*, *e*'nin kendisiyle aynıdır.

2. Eğer d, a ile φ bağıntısı içindeyse ve eğer b, a ile φ bağıntısı içindeyse, demek ki, genel olarak, d, b ve a ne olurlarsa olsunlar, d, b'nin kendisiyle aynıdır.

Bu, bire-bir eşlemeyi saf mantıksal bağıntıya indirgemekte ve aşağıdaki tanımı vermemizi sağlamaktadır:

"F kavramı, G kavramıyla eşsayılıdır"
dilegetirişinin gönderimiyle,

"F kavramının altına düşen nesnelerle, G kavramının altına düşen nesneleri bire-bir eşleyen bir φ bağıntısı vardır"
dilegetirişinin gönderimleri aynıdır.

Şimdi ilk tanımımızı tekrarlayabiliriz:

"F kavramına ait olan sayal sayı, "F kavramıyla eşsayılı" kavramının kaplamıdır";
ve şunu ekliyoruz:

"n bir sayal sayıdır"
dilegetirişinin gönderimi ile,

"öyle bir kavram vardır ki, n ona ait olan sayal sayıdır"
dile getirişinin gönderimleri aynıdır.

Yani, sayal sayı kavramı, gerçi açıkça kendi cinsinden tanımlanmıştır, ancak "F kavramına ait olan sayal sayı" daha önce tanımlandığı için bunda bir hata yoktur.

§ 73. Bundan sonraki amacımız, eğer F kavramı, G kavramıyla eşsayılı ise F kavramına ait olan sayal sayı ile G kavramına ait olan sayal sayının aynı olduklarını göstermektir. Doğal olarak bu bir totoloji gibi görünüyor, ama değildir; "eşsayılı" sözcüğünün gönderimi, onun nasıl biraraya getirildiğinden değil, benim yukarıdaki tanımlamamdan çıkarsanmalıdır.

Bizim tanımımızla ilgili gösterilmesi gereken, eğer F kavramıyla G kavramı eşsayılı ise "F kavramıyla eşsayılı" kavramının kaplamının, "G kavramıyla eşsayılı" kavramının kaplamıyla aynı olduğudur. Başka bir deyişle, bu kabulden hareketle, aşağıdaki iki tümcenin tümel olarak sağlandığının kanıtlanması gerekir:

Eğer H kavramı, F kavramıyla eşsayılı ise, aynı zamanda G kavramıyla da eşsayılıdır;

ve

eğer H kavramı, G kavramıyla eşsayılı ise, aynı zamanda F kavramıyla da eşsayılıdır.

İlk tümcenin öne sürdüğü şudur: Eğer F kavramının altına düşen nesnelerle, G kavramının altına düşen nesneleri bire-bir eşleyen bir φ bağıntısı varsa ve ayrıca H kavramının altına düşen nesnelerle, F kavramının altına düşen nesneleri bire-bir eşleyen bir ψ bağıntısı varsa, H kavramının altına düşen nesnelerle, G kavramının altına düşen nesneleri de bire-bir eşleyen bir bağıntı vardır. Harflerin aşağıdaki gibi sıralanması kavramayı kolaylaştıracaktır:

$$H\ \psi\ F\ \varphi\ G$$

Böyle bir bağıntı aslında verilebilir: Eğer aşağıdaki,

"*c*'nin ψ bağıntısında olduğu ve *b*'nin φ bağıntısında olduğu bir nesne vardır"

yargı-içeriğinden, bağıntının terimleri olarak *c* ve *b*'yi çıkartırsak. Bu bağıntının bire-bir olduğu gösterilebilir; ve bağıntı, H kavramının altına düşen nesnelerle, G kavramının altına düşen nesneleri bire-bir eşlemektedir.

Benzer bir kanıtlama ikinci tümce için de verilebilir.[91] Ve böylece umuyorum ki, kanıtlamalarımızın hiçbir yerde görüden alınanlara bağımlı olmadığı ve tanımlarımızın belli amaçlar için kullanılabileceği yeterince ortaya konmuş oldu.

§ 74. Şimdi artık tekil sayıların tanımlanmasına geçebiliriz.

"Kendisiyle aynı olmayan" kavramının altına hiçbir şey düşmediğinden, sıfır sayısını şöyle tanımlıyorum:

0, "kendisiyle aynı olmayan" kavramına ait olan sayal sayıdır.

Bazıları, benim bu bağlamda bir kavramdan söz etmemi şaşırtıcı bulabilir. Bu kavramın bir çelişki içerdiğini ve eskiden tanıdığımız kare çemberi ve tahtadan demiri hatırlattığını söyleyerek karşı çıkacaklardır belki. Şimdi inanıyorum ki, bu eski tanıdıklar zannedildikleri kadar da kötü değiller. Yapılacak en

91 Aynı şey bunun evriği için de geçerlidir: Eğer F kavramına ait olan sayı, G kavramına ait olan sayı ile aynı ise, bu durumda F kavramı, G kavramıyla aynı sayıdadır.

son şeyin onları bir yerlerde kullanmak olduğunu kabul ediyorum; ama aynı zamanda, yalnızca onların altına düşen herhangi bir şey olduğunu varsaymazsak –ki onları kullanmakla bunu varsaymış olmayız– bize hiçbir zararları olmaz. Bir kavramın çelişki içermesi, inceleme yapmaksızın her zaman ortada olan bir şey değildir; ama onu inceleyebilmek için önce ona sahip olmamız ve onu diğerleri gibi mantıksal olarak ele almamız gerekir. Mantık açısından ve kanıtlama keskinliği gözüyle bir kavramdan istenebilecek olan tek şey, onun uygulanmasındaki sınırların keskin olması, yani her bir kavramın bu nesnenin altına düşüp düşmediğine kesin olarak karar verebilmemizi sağlamasıdır. Ancak bu talep "kendisiyle aynı olmayan" gibi çelişki içeren kavramlar tarafından tamamıyla sağlanmaktadır; çünkü kesin olarak bilmekteyiz ki, böyle bir kavramın altına düşen hiçbir nesne yoktur.[92]

Ben 'kavram' sözcüğünü şu şekilde kullanıyorum:

"*a*, F kavramının altına düşüyor"

a nesnesiyle ilgili olan ve *a* yerine herhangi bir şeyin konulmasına olanak veren bir yargı-içeriğinin genel biçimidir. Ve bu anlamda

"*a*, 'kendisiyle aynı olmayan' kavramının altına düşüyor", aşağıdakilerle aynı gönderime [*gleichbedeutend*] sahiptir:

"*a* kendi kendisiyle aynı değildir"

veya

"*a*, *a* ile aynı değildir"

92 Bir nesnenin altına düştüğü kavram cinsinden tanımlanması apayrı bir konu. Örnek olarak, "en büyük basit kesir" [*der grösste ächte Bruch*] dilegetirişinin içeriği yoktur, çünkü belirli tanımlık [der], belirli bir nesneye gönderme yapma iddiasındadır. Öte yandan, "1'den küçük ve 1'den küçük hiçbir kesrin büyüklük olarak onu aşmadığı kesir" kavramı kusursuzdur; gerçekten de, böyle bir kesrin varolmadığını kanıtlamak için bile, bir çelişki içermesine rağmen bu kavramı kullanmamız gerekir. Bununla birlikte, eğer bu kavramı, altına düşen bir nesneyi tanımlamak için kullanmak istersek, iki farklı şeyi göstermemiz gerekir:
1. bu kavramın altına düşen herhangi bir nesne olduğunu;
2. onun altına düşen yalnızca bir nesne olduğunu.
Şimdi, bu tümcelerden daha birincisi yanlış olduğundan "en büyük basit kesir" dilegetirişi anlam içermez.

0'm tanımı için, altma hiçbir nesnenin düşmediği başka bir kavramı da kullanabilirdim. Ancak bu kavramı seçerken saf mantıksal zeminde kanıtlanabilecek olmasını göz önünde bulundurdum; ve bu amaç için "kendisiyle aynı olmayan" kavramı, sağladıkları itibariyle en uygun olanıdır, "aynı [özdeş] olan" için yukarıda Leibniz'den alman [§ 65] ve saf mantıksal olan tanımı kabul ettim.

§ 75. Şimdi, altma hiçbir nesne düşmeyen her kavramın, altma yine hiçbir nesne düşmeyen diğer kavramlarla ve yalnızca onlarla eşsayılı olduğunu daha önce ortaya konulmuş olanlar sayesinde kanıtlamak olanaklı olmalıdır; bundan da 0'm böyle bir kavrama ait olan sayal sayı olduğu ve bir kavrama ait olan sayının 0 olması durumunda o kavramın altına hiçbir nesnenin düşmediği sonucu çıkmaktadır.

Eğer hem F kavramı, hem de G kavramı altına hiçbir nesnenin düşmediğini varsayıyorsak, onların eşsayılı olduklarını kanıtlamak için aşağıdaki koşulları sağlayan bir φ bağıntısı bulmamız gerekir:

"F kavramının altına düşen her nesne, G kavramının altma düşen bir nesneyle

φ bağıntısı içindedir; ve G kavramının altına düşen her nesne için, F kavramının

altma düşen ve onunla φ bağıntısı içinde olan bir nesne vardır."

Bu dilegetirişlerin gönderimleriyle ilgili yukarıda söylenenlere göre [§ 71], bizim ön kabullerimizden [*Voraussetzung*] bütün bu koşulların her türlü bağıntı tarafından sağlandığı sonucu çıkıyor ki, bunlar arasında bire-bir bir bağıntı olan aynılık bağıntısı da vardır; çünkü bu bağıntı yukarıda [§ 72. de] ortaya konan her iki gerekliliği de karşılamaktadır.

Eğer diğer durumu ele alırsak, diyelim *a* gibi bir nesne G kavramının altına düşse, ama F'nin altma hiçbir şey düşmese, bu durumda aşağıdaki iki tümce, yani

"*a*, G kavramının altma düşüyor"

ve

"F'nin altına düşen hiçbir nesne *a* ile φ bağıntısında değildir"

tümcelerinin her ikisi de bütün φ bağıntıları için doğrudur; çünkü ilki bizim ilk ön kabulümüz ile, ikincisi de ikinci ön kabulümüz ile doğru kılınmıştır. Eğer, F'nin altına düşen hiçbir nesne yoksa, F'nin altına düşen hiçbir nesne *a* ile herhangi bir bağıntı içinde değildir. Dolayısıyla, F'nin altına düşen nesnelerle, G'nin altına düşen nesneleri bizim tanımımıza uygun düşecek şekilde eşleyen hiçbir bağıntı yok demektir, buna göre de F ve G kavramları eşsayılı değillerdir.

§ 76. Şimdi, doğal sayılar serisindeki [*natürlichen Zahlenreihe*] her komşu iki öğenin birbirleriyle olan bağıntılarını açıklamak istiyorum. Aşağıdaki

"Öyle bir F kavramı ve onun altına düşen bir *x* nesnesi vardır ki, F kavramına

ait olan sayal sayı *n*'dir ve "F'nin altına düşen ama *x*'le aynı olmayan" kavramının sayal sayısı *m*'dir"

tümcesinin gönderimi ile

"*n*, doğal sayılar serisinde doğrudan *m*'yi izlemektedir"

tümcesinin gönderimiyle aynıdır.

"*n*, *m*'den hemen sonra gelen sayal sayıdır" [*n ist die auf m nächtsfolgende Anzahl*] dilegetirişinden kaçmıyorum, çünkü belirli tanımlığm [*die*] kullanımı, iki tümcenin kanıtlanmasına kadar gerekçelendirilemez.[93] Bu noktada "$n = m + 1$"i de aynı sebepten dolayı kullanmıyorum, çünkü '=' göstergesinin kullanılması, ($m + 1$)'i bir nesne olarak betimlemektedir.

§ 77. Şimdi 1 sayısına ulaşmak için, her şeyden önce doğal sayılar serisinde 0'ı izleyen bir şey olduğunu göstermemiz gerekiyor.

"0'la aynı olan" kavramını –ya da istersek buna yüklemini diyelim– ele alalım. Bunun altına 0 sayısı düşmektedir. Ancak "0'la aynı, ama 0'la aynı değil" kavramının altına hiçbir nesne düşmüyor, böylece 0, bu kavrama ait olan sayal sayı oluyor. Yani elimizde "0'la aynı olan" kavramı ve onun altına düşen bir nesne, yani 0 var; ve bunlar hakkmdaki şu tümceler de doğru olmaktalar:

93 § 74'ün dipnotuna (dipnot 92'ye) bakınız.

"0'la aynı olan" kavramına ait olan sayal sayı, "0'la aynı olan" kavramına ait olan sayal sayıyla aynıdır;

"0'la aynı olan, ama 0'la aynı olmayan" kavramına ait olan sayı 0'dır.

Yani, bizim tanımımıza göre [§ 76.] "0'la aynı olan" kavramına ait olan sayal sayı, doğal sayılar serisinde doğrudan 0'ı izlemektedir.

Şimdi eğer aşağıdaki gibi tanımlarsak:

1, "0'la aynı olan" kavramına ait olan sayal sayıdır,

bu durumda elde edilen sonucu şöyle yazabiliriz:

1, doğal sayılar serisinde doğrudan 0'ı izlemektedir.

Bizim 1 sayısı tanımımızın, kendi nesnel meşruluğu için herhangi gözlemlenmiş bir olguyu[94] gerektirmediğini belirtmek sanırım yersiz olmaz; çünkü tanıma ulaşmayı mümkün kılmak için, bazı öznel koşulların sağlanmış olması gerektiği ve duyusal algıların bizi buna sürüklediği konusunda kolayca karışıklık doğabilir.[95] Bununla birlikte, bu koşullar, türetilen tümcelerin a priori olmalarını değiştiremez. Örneğin, en azından şimdilik bilebildiğimiz kadarıyla, belli bir miktarda ve uygun nitelikte kanın beyinde dolaşması da böyle bir koşuldur; ancak bizim yukarıdaki son tümcemizin doğruluğu, bu koşula bağlı değildir, hatta kan dolaşımı dursa bile tümce hâlâ geçerli olacaktır; hatta tüm akıllı varlıklar bir gün aynı anda kış uykusuna yatacak olsalar bile, bizim tümcemiz bu süre içinde iptal olmayacak, hiç etkilenmeden kalacaktır. Çünkü bir tümcenin doğru olması, onun düşünülmüş olmasıyla aynı şey değildir.

§ 78. Bizim tanımlarımız aracılığıyla kanıtlanacak bazı tümceleri sıralayarak konumuza devam ediyorum. Böylelikle okurlar bunun nasıl yapılabileceğini ana hatlarıyla kolaylıkla görebilecektir.

1. Eğer a doğal sayılar serisinde doğrudan 0'ı izliyorsa, a = 1'dir.

2. Eğer 1, bir kavrama ait olan sayal sayı ise, bu kavramın altına düşen bir nesne vardır.

94 Tümel olmayan önermeler.

95 Karş. Erdmann, *Die Axiome der Geometrie*, s. 164.

3. Eğer 1, F kavramına ait olan sayal sayı ise, bu durumda eğer x nesnesi F kavramının altına düşüyorsa ve y nesnesi F kavramının altına düşüyorsa, $x = y$'dir; yani x, y'nin kendisiyle aynıdır.

4. Eğer F kavramının altma bir nesne düşüyorsa ve x'in F kavramının altma düşmesinden ve y'nin de F kavramının altma düşmesinden, genel olarak $x = y$ çıkarsanabiliyorsa, bu durumda 1, F kavramına ait olan sayal sayıdır.

5. m ile n arasında,

"n, doğal sayılar serisinde doğrudan m'yi izlemektedir"

tümcesiyle ortaya konan bağıntı, bire-bir bir bağıntıdır.

Şimdiye kadar söylenenlerde, doğal sayılar serisinde her bir sayal sayı için onu doğrudan izleyen ya da onun doğrudan izlediği başka bir sayal sayı olduğunu öne süren hiçbir şey yok.

6. Doğal sayılar serisinde, 0 dışındaki her bir sayal sayı başka bir sayal sayıyı doğrudan izlemektedir.

§ 79. Şimdi doğal sayılar serisinde her (n) sayısından sonra, onu doğrudan izleyen bir sayal sayı olduğunu kanıtlamak için, izleyen sayal sayının ait olduğu bir kavram ortaya koymamız gerekir. Bunun için, önce tanımlanması gereken,

"n ile sonlanan doğal sayılar serisinin üyesi"

kavramını seçiyoruz.

Önce, benim *Begriffsschrift* (Kavram Yazısı) adlı kitabımda bir seride birbirini izlemek ile ilgili verilmiş olan tanımı biraz farklı sözcüklerle tekrar edeyim:

"Eğer x'in φ bağıntısında olduğu her nesne F kavramının altına düşüyorsa ve eğer d, F kavramının altma düştüğünde , d ne olursa olsun, d'nin φ bağıntısında olduğu her nesnenin F kavramının altma düştüğü sonucu tümel olarak çıkıyorsa, F kavramı ne olursa olsun, y, F kavramının altma düşer"

tümcesiyle,

"y, φ-serisinde x'i izler"

ve

"x, φ-serisinde y'den önce gelir"

tümcelerinin gönderimleri aynıdır.

§ 80. Bunun üzerinde bazı noktalara işaret etmek zaman kaybı olmayacaktır. Öncelikle φ bağıntısı belirlenmeden bırakıldığı için, serilerin zorunlu olarak uzaysal ve zamansal düzenlemeler biçiminde düşünülmesi gerekmiyor; her ne kadar bu düzenlemeler dışlanmamış olsa da.

Belki şunun gibi bir açıklama daha doğal bulunabilir: Eğer, x'ten başlayarak, dikkatimizi sürekli olarak bir nesneden, onunla φ bağıntısı içinde olan bir diğerine kaydırırsak ve bu işlem sonucunda y'ye ulaşırsak, bu durumda φ-serilerinde y'nin x'i izlediğini söyleyebiliriz.

Şimdi bu, ardışıklığı incelemenin bir yoludur, ama bir tanım değildir. Bu durumda, ya dikkatimiz bir sonrakine kaydığında ulaştığımız y, her türlü öznel yan koşullara bağımlı olmaktadır, yani bizim ona ayırdığımız zamana ya da şeyler hakkındaki bilgimize bağımlı olmaktadır; ya da, φ-serisinde y'nin x'i izlemesinin, genel olarak bizim ona verdiğimiz dikkatle ve dikkatimizi sürdürdüğümüz koşullarla hiçbir ilgisi yoktur; aksine bu, olgusal [*Sachlich*] bir durumdur; tıpkı yeşil bir yaprağın, belli bir dalgaboyunda ışık ışınları yansıtmasının, ister bu ışın benim gözüme ulaşarak bir duyum oluştursun ister oluşturmasın, olgusal bir durum olması ve tıpkı ben bir tuz yumağını suya attığımda ister sonucunu gözlemlemiş olayım ister olmayayım, tuzun suda çözülür olmasının olgusal bir durum olması gibi, hatta benim onunla ilgili bir deney yapmamın olanaksız olduğu durumlarda bile tuzun çözülebilirliğini korumasının olgusal bir durum olması gibi.

Benim açıklamam, sorunu öznel olanaklılıklar alanından nesnel belirlenmişlik alanına taşımıştır. Çünkü, bir tümceyi, bir başka tümceden çıkarsamak nesnel bir şeydir, dikkatimizin hareketlerine egemen olan yasalardan ve bizim fiilen bir sonuç çıkarıp çıkarmamamızdan bağımsızdır. Benim ortaya koymuş olduğum, hangi durumda sorulmuş olursa olsun, "Onu izliyor mu?" sorusuna her durumda karar veren bir ölçüttür; ve birçok durumda karşılaşılan büyük zorluklar nedeniyle fiilen bir karara ulaşamamış olmak, gerçek durumla ilgili bir husus değildir.

Bir seride, serinin sonra gelen herhangi bir üyesinin, önce geleni izleyip izlemediğinden emin olmak için ilk üyeyle veril-

miş belli bir nesnenin arasına girmiş üyeleri göz önünde bulundurmak, her zaman gerekli değildir. Örnek olarak, φ-serisinde b, a'yı izliyorsa ve c, b'yi izliyorsa, bu durumda serinin aradaki üyelerinin ne olduğunu bilmeden de, açıklamamıza dayanarak c'nin, a'yı izlediği sonucunu çıkarabiliriz.

Yalnızca, bir seride birbirini izlemeyle ilgili bu tanım sayesinde, görünüşe bakılırsa sadece matematiğe özgüymüş gibi duran bu n'den $(n + 1)$'e geçen çıkarımı, genel mantık yasalarına dayandırmak olanaklıdır.

§ 81. Eğer şimdi, bizim φ bağıntısı için, aşağıdaki,

"doğal sayılar serisinde n, doğrudan m'yi izler"

tümcesiyle ortaya konan m ile n arasındaki bağıntıyı alırsak, bu durumda "ϕ-serisi" demek yerine, "doğal sayılar serisi" diyeceğiz.

Aşağıdaki şu tanımı da ekliyorum:

"y, φ-serisinde x'i izler veya y, x ile aynıdır"

tümcesi,

"y, x ile başlayan φ-serisinin bir üyesidir"

tümcesi ile aynı gönderime sahip olduğu gibi,

"x, y ile sonlanan φ-serisinin bir üyesidir"

tümcesiyle de aynı gönderime sahiptir.

Bundan da şu sonuç çıkar ki, eğer n, doğal sayılar serisinde doğrudan a'dan sonra geliyorsa ya da a ile aynı ise, a , n ile sonlanan doğal sayılar serisinin bir üyesidir.[96]

§ 82. Şimdi, gösterilmesi gereken,

"n ile sonlanan doğal sayılar serisinin üyesi"

kavramına ait olan sayal sayının, –açıkca belirtilmesi gereken bir koşul altında– doğal sayılar serisinde n'yi doğrudan izlemekte olduğudur. Böylelikle, doğal sayılar serisinde n'yi doğrudan izleyen bir sayal sayı olduğunu kanıtlayarak, bu serinin bir en son üyesinin olmadığını da göstermiş olacağız. Şurası açıktır ki, bu tümce deney yoluyla ya da tümevarımla ortaya konamaz.

96 Eğer n, bir sayı değilse, bu durumda n'nin kendisi, n ile sonlanan doğal sayılar serisinin yegâne üyesidir, -eğer bu, çok şaşırtıcı bir dilegetirme yolu değilse.

Burada kanıtlamayı vermek bizi çok uzaklara götürecek. Yalnızca kanıtlamanın yapılma yoluna kısaca değineceğim. Burada kanıtlanması gereken şudur:

1. Eğer *a*, doğal sayılar serisinde doğrudan *d*'yi izliyorsa ve eğer *d* hakkında,

"*d* ile sonlanan doğal sayılar serisinin üyesi"

kavramına ait olan sayal sayının, doğal sayılar serisinde doğrudan *d*'yi izlediği doğruysa, bu durumda *a* hakkında,

"*a* ile sonlanan doğal sayılar serisinin üyesi"

kavramına ait olan sayal sayının, doğal sayılar serisinde doğrudan *a*'yı izlediği de doğrudur.

İkinci olarak kanıtlanması gereken de şudur: Hemen yukarıdaki tümcelerde *d* ve *a* hakkında öne sürülenler, 0 sayısı için de geçerlidir. Ve buradan çıkan sonuç da, eğer *n*, 0'la başlayan doğal sayılar serisinin bir üyesiyse, bunun *n* için de geçerli olduğudur. Buradaki çıkarım biçimi,

"*y*, doğal sayılar serisinde *x*'i izler"

dilegetirişi [§ 79, 81'de] ile ilgili verdiğim tanımın bir uygulamasıdır; burada F kavramı için, yukarıda *d* ile *a* hakkında öne sürülenler alınmış, ama *d* ve *a*'nın yerine, şimdi 0 ve *n* konulmuştur.

§ 83. Bir önceki paragraftaki 1. tümceyi kanıtlamak için, *a*'nın, "*a* ile sonlanan doğal sayılar serisinin üyesi, ama *a* ile aynı değil" kavramına ait olan sayal sayı olduğunu göstermemiz gerekir. Ayrıca bu kavramın, "*d* ile sonlanan doğal sayılar serisinin üyesi" kavramının kaplamıyla aynı olduğu kanıtlanmalıdır. Bunun için, 0'la başlayan doğal sayılar serisinin üyesi olan hiçbir nesnenin, doğal sayılar serisinde kendi kendisini izleyemeyeceğini dile getiren tümceye gereksinimimiz vardır. Ve bu da, yukarıda belirtildiği üzere bizim bir seri içinde birbirini izlemeye ilişkin yaptığımız tanımın yardımıyla kanıtlanmalıdır.[97]

97 E. Schröder (a.g.y., s. 63), bu tümceyi, başka türlü de seçilebilecek olan bir notasyon dizgesinin bir sonucu olarak görüyor. Burada, Schröder'in bu konudaki tüm çalışmasına zarar veren pürüz tekrar karşımıza çıkıyor; yani, sayının bir gösterge olup olmadığını ve eğer göstergeyse onun gönderiminin ne olduğunu veya sayının kendisinin, göstergenin bizzat gönderimi olup olmadığını gerçekten bilmememiz sorunu. Varsayalım ki, göstergelerimizi, aynı gösterge hiçbir zaman tekrar etmeyecek şekilde seçmiş olalım, bundan, bu göstergelerin gönderimlerinin de farklı olacağı sonucu çıkmayacaktır.

İşte böylelikle,

"*n* ile sonlanan doğal sayılar serisinin üyesi"

kavramına ait olan sayal sayının, doğal sayılar serisinde doğrudan *n*'yi izlediğini öne süren tümce, *n*'nin 0 ile başlayan doğal sayılar serisinin bir üyesi olmak durumunda olduğu koşulunu eklemek zorunda kalıyoruz. Bunun için aşağıda açıkladığım kullanışlı bir kısaltma vardır:

"*n*, 0 ile başlayan doğal sayılar serisinin bir üyesidir"

tümcesi ile,

"*n* sonlu bir sayal sayıdır"

tümcesinin gönderimleri aynıdır.

Böylece son tümceyi şu şekilde ifade edebiliriz: Doğal sayılar serisinde hiçbir sonlu sayal sayı, kendini izlemez.

Sonsuz Sayal Sayılar .

§ 84. Sonlu sayal sayıların karşısında, sonsuz sayal sayılar vardır. "Sonlu sayal sayı" kavramına ait olan sayal sayı, bir sonsuz sayal sayıdır. Sonsuz sayal sayıyı, ∞_1'le simgeleştirelim. Eğer ∞_1 bir sonlu sayal sayı olsaydı, doğal sayılar serisinde kendini izlemeyecekti. Ama ∞_1'in tam da bunu yaptığı gösterilebilir.

Bu şekilde tanımlanmış sonsuz sayal sayı ∞_1'de gizemli ya da şaşılacak hiçbir yan yoktur. "F kavramına ait olan sayal sayı, ∞_1'dir" tümcesi şundan azını ya da fazlasını dile getirmiyor: F kavramı altma düşen nesneleri sonlu sayal sayılarla bire-bir eşleyen bir bağıntı vardır. Bizim tanımlarımız açısından bunun anlamı son derece açık ve nettir; ve bu, ∞_1 simgesinin kullanımı gerekçelendirmek ve ona bir gönderim vermek için yeterli olmaktadır. Bir sonsuz sayal sayının tasarımını oluşturamamak hiçbir şekilde önemli değildir; bu durum sonlu sayal sayılar için de aynı şekilde geçerlidir. Böyle bakıldığında, bizim ∞_1 sayal sayımızın, herhangi bir sonlu sayal sayınmki kadar belirlenmiş bir niteliği vardır; hiçbir şekilde kuşkuya kapılmadan kendisi olarak teşhis edilebilir ve bir başkasından ayırt edilebilir.

§ 85. G. Cantor, kısa bir süre önce yayımladığı son derece dikkate değer bir yazıda[98] sonsuz sayıları ortaya koydu. Sadece sonlu sayal sayıların ilkece fiili gerçek [*wirklich*] kabul edilmesi görüşünü, Cantor'un küçümsemeyle karşılamasına kesinlikle katılıyorum. Sonlu sayal sayılar da, kesirli, negatif, irrasyonel ya da karmaşık sayılar gibi ne duyularla algılanabilirler ne de uzaysaldırlar; eğer fiili gerçek olanı, duyularımız üzerinde etkide bulunanlarla veya yakın ya da uzak sonuçları olarak duyu algılarına neden olan etkileri yaratanlarla sınırlarsak, bu durumda elbette ki hiçbir sayı fiili gerçek olamaz. Ancak bizim, teoremlerimizi kanıtlamak için herhangi bir duyu algısına hiçbir şekilde ihtiyacımız yoktur. Mantıksal açıdan kusursuz bir şekilde ortaya konan herhangi bir adı veya göstergeyi, hiç duraksamadan kendi araştırmalarımızda kullanırız; burada da $\infty 1$ sayal sayısı, tıpkı 2 veya 3 gibi gerekçelendirilmiştir.

Burada Cantor'la görüş birliği içinde olduğumu düşünüyorum; bununla birlikte benim terminolojim bazı bakımlardan Cantor'unkinden farklıdır. Benim sayal sayım için, Cantor, "güç" [*Mächtigkeit*] terimini kullanıyor, oysa onun sayal sayı kavramı,[99] bir sıra olarak düzenlemeye işaret etmektedir. Kuşkusuz sonlu sayal sayılar, bu düzenlemeden bağımsız olmakla birlikte, yine de sıralı dizilerde ortaya çıkmaktadırlar, ama buna karşılık sonsuz sayal sayılarda (ya da sonluötesi [*unendlichgrosse*] sayal sayılarda) durum böyle değildir. Ancak günlük kullanımdaki "sayal sayı" sözcüğü ve "kaç tane?" sorusu, sabit bir düzenlemeye işaret etmemektedir. Cantor'un sayal sayıları daha çok, "ardışık sıralanmadaki son üyenin kaçıncı üye olduğu" sorusuna yanıt vermektedir. Dolayısıyla benim terminolojim günlük kullanımla daha iyi uyuşuyor gibi görünüyor. Eğer bir sözcüğün gönderimini genişletirsek, olabildiğince çok genel önermenin, özellikle de serilerde sayal sayının dizisinden bağımsızlığını öne süren bir temel önermenin geçerliliğini korumasına dikkat etmeliyiz. Bizim sayal sayı kavramımız baştan beri sonsuz sayıları da kapsadığından, onun gönderimini genişletme gereğini duymadık.

98 *Grundlegen einer allgemeinen Mannichfaltigkeitslehre.* Leipzig, 1883.

99 Bu dilegetiriş, kavramların nesnellikleri hakkında önceden söylediklerimle bir çelişki içindeymiş gibi görünüyor; ama burada öznel olan adlandırmadır.

§ 86. Cantor, kendi sonsuz sayılarını elde etmek için bir ardışık sıralanmada izleme bağmtı-kavrammı devreye sokmaktadır ki bu, benim "bir seride izleme" kavramımdan farklıdır. Cantor'a göre, örneğin, eğer sonlu pozitif tamsayıları, tek sayıların tıpkı doğal sayıların serisi içinde birbirlerini izlediği şekilde bir sıra içinde düzenler, aynı şeyi çift sayılar için de yapar ve her çift sayının bir tek sayıyı izleyeceği koşulunu da getirirsek, bir ardışık sıralanma elde etmiş oluruz. Örnek olarak, bu ardışık sıralanmada 0, 13'ü izleyebilecektir. Ancak hiçbir sayı 0'dan hemen önce gelemez. Bu, benim sıralı dizilerdeki izleme tanımımda karşılaşılamayacak bir durumdur. Görüden alınma hiçbir aksiyoma başvurulmadan, eğer y, φ-serisinde x'i izliyorsa, bu seride y'den hemen önce gelen bir nesne olduğu kesin olarak kanıtlanabilir. Burada ardışık sıralanmaya ve Cantor'un sayal sayı kavramına ilişkin tanımların kesinliğinde hâlâ eksiklik varmış gibi görünüyor. Dolayısıyla Cantor, gizemli "içsel görü"ye başvurmuştur; ki burada tanımlardan çıkan bir kanıtlama yapmaya çalışmak ve bu kanıtlamayı yapmak elbette mümkündür. Çünkü söz konusu iki kavramın nasıl kesin hale getirilebileceğini öngörebildiğimi sanıyorum. Bununla birlikte, bu söylediklerimle, onların meşruluğunu ve verimliliğini sorgulamayı da kesinlikle istemiyorum. Tam aksine, Cantor'un araştırmalarını, bilimi genişlettikleri için selamlıyorum, çünkü bu çalışmalar sayesinde daha yüksek dereceli sonsuz büyük sayal sayılara (sonluötesi sayal sayılara) giden saf aritmetiksel bir yol açılmıştır.

V. Sonuç

§ 87. Umuyorum ki, bu kitapta, aritmetiğin yasalarının analitik yargılar olduğunu ve dolayısıyla a priori olduğunu ortaya koyabilmişimdir. Böylelikle aritmetik, sadece, daha da geliştirilmiş bir mantıktır ve her aritmetik önermesi, türetilmiş de olsa bir mantık yasasıdır. Aritmetiğin, doğanın açıklanmasında kullanılması, gözlemlenmiş olguların mantıksal açıdan işlenmesidir[100]; hesaplama da çıkarım olmaktadır. Sayı yasalarının, dış dünyaya uygulanabilmeleri için, Baumann'm[101] düşündüğü gibi pratik sınamalarla kendilerini kanıtlamaları gerekli değildir; çünkü dış dünyada, bütün uzayda kavram yoktur; kavramların özellikleri yoktur ve sayılar da yoktur. Yani sayı yasaları gerçekte dışsal şeylere uygulanabilir değildir; sayı yasaları doğa yasaları değildir. Ama sayı yasaları, dış dünyadaki şeylerle ilgili geçerli olan yargılara uygulanabilirler; onlar doğa yasalarının yasalarıdır. Sayı yasaları, doğanın görüngüleri arasındaki bağlantılar hakkında bir şey öne sürmez, yalnızca yargılar arasındaki bağlantılar hakkında bir şey öne sürer; ve bu yargılar arasında doğa yasaları da bulunur.

§ 88. Belli ki Kant,[102] analitik yargıların değerini hafife almıştı –kuşkusuz bu, kavramla ilgili belirlenimi çok dar bir şekilde yapmaktan kaynaklanmaktadır– gerçi bu terimi benim

100 Gözlemin kendisi, mantıksal bir etkinliği zaten içermektedir.
101 A.g.y. Cilt II, s. 670
102 A.g.y. Cilt III, s. 39 [A-6 / B-10 vd.]

kullandığım geniş anlamda düşünmüş olduğuna dair bazı ipuçları da vardır.[103] Kant'm tanımı temel alındığında yargıların analitik ve sentetik olarak bölünmesi olanaklı tüm durumları kapsamamaktadır. Kant, tümel olumlayıcı yargıları düşünmektedir. Bu yargılarda, özne olan bir kavramdan [*Subjectsbegriffe*] söz edilebilir ve –Kant'm tanımının gerektirdiği gibi– yüklem olan kavramın [*Prädicatsbegriff*] onda içerilip içerilmediği sorulabilir. Ancak, eğer özne, tekil bir nesneyse [*einzelner Gegenstand*], bunu nasıl yapabiliriz? Ya da yargı varoluş bildiren bir yargı [*Existentialurtheil*] ise? Bu durumlar söz konusu olduğunda Kant'ın anladığı anlamda özne olan kavramdan söz etme olanağı yoktur. Kant, kavramların, vasıfların [*Merkmale*] birbirine eklenmesi* yoluyla belirlendiklerini düşünüyormuş gibi görünüyor; ancak bütün kavram oluşturma yolları içinde en verimsiz olanı budur. Eğer bu kitapta verilen tanımlara bakacak olursak, bu betimlemeye uygun düşenini zor buluruz. Aynı şey, örneğin bir fonksiyonun sürekliliği tanımında olduğu gibi, matematikteki gerçekten verimli tanımlar için de geçerlidir. Bunlarda birbirine eklenen bir vasıflar dizisi söz konusu değildir; belirleyici öğeler diğerleriyle daha içsel, yani, daha organik bir bağ içindedir. Geometriden alınan bir örneklendirme bu ayrımı görülür kılacaktır. Eğer kavramları (ya da kaplamlarını) bir düzlemdeki alanlarla temsil edecek olursak, bu durumda vasıfların birbirine eklenmesiyle tanımlanan kavrama, tanımlayıcı vasıfları temsil eden tüm alanlara ortak olan alan karşılık gelecektir; bu alan, onların sınır çizgileri olan doğru parçalarıyla kuşatılmıştır. Yani böyle bir tanımla –bizim örneklendirme açısından– yaptığımız, daha önceden verilmiş olan çizgileri, bir alanı farklı bir şekilde bölmek için kullanmaktır.[104] Gerçi bu süreçte esaslı hiçbir yenilik yoktur. Ama en verimli kavram tanımları, daha önce verilmemiş sınır çizgilerini çekmektir. Bu yoldan çıkarabileceğimiz sonuçlar daha önceden öngörüle-

103 Sayfa 43'te [B 14] Kant, sentetik bir önermenin, ancak başka bir sentetik önerme varsayılması koşuluyla, çelişki yasasıyla doğru olarak bilinebileceğini ifade etmektedir.

* Burada, vasıfların "ve" bağlacıyla birbirlerine eklenmesi veya birleştirilmesi kastediliyor. (ç.n.)

104 Benzer şekilde, eğer vasıflar "veya" ile birleştirilmiş iseler.

mez; burada daha önceden kutuya koyduğumuzu basitçe yeniden çıkarıp alıyor değiliz. Çıkardığımız bu sonuçlar bilgimizi genişletmektedir ve dolayısıyla Kant'a göre onların sentetik olduğunu kabul etmek gerekir; ama onlar yine de saf mantıksal araçlarla kanıtlanabilirler; demek ki analitiktirler. Aslında tanımlarda içerilmektedirler, ama bir binanın kirişlerini içermesi gibi değil, bitkilerin tohumlarında içerilmesi gibi. Herhangi bir önermenin kanıtlanması için genellikle birçok tanıma gerek duyarız, çünkü bu önerme hiçbir tanımda tek başına içerilmiş değildir; yine de bu tanımların tümü birlikte ele alındığında, onlardan saf mantıksal olarak çıkarsanır.

§ 89. Ayrıca Kant'm açıklamasındaki şu genellemeye de karşı çıkmam gerekiyor:[105] Duyusallık (hissetme yetisi) [*Sinnlichkeit*] olmadan hiçbir nesne [*Gegenstand*] bize verilemez. Sıfır ve bir, bize duyular aracılığıyla verilebilecek nesneler değildir. Ve küçük sayıların görüsel olduklarını kabul edenlerin bile,

$1000^{1000^{1000}}$)'den büyük sayıların görüde verilemeyeceğine en azından hak vermeleri gerekir ki, bu sayılar hakkında da birçok bilgiye sahibiz. Belki Kant "nesne" sözcüğünü başka bir anlamda kullanmıştı; ancak bu durumda da sıfır veya bir sayısı ya da bizim ∞_1 tümüyle onun görüş alanının dışında kalıyorlar – çünkü bunlar kavram da değildir ve kavramlar hakkında da, Kant, kavramın nesnesinin görüde karşılığının olmasına gerek görmektedir.

Yalnızca şükran dolu bir hayranlıkla bakabileceğimiz bir deha ile küçük tartışmalara kalkışmak suçlanmasıyla karşılaşmak istemem; dolayısıyla, bazı uyuşmazlık noktaları dışında pek çok konudaki görüş birliğimize dikkat çekmekle yükümlü hissediyorum kendimi. Sadece bizim meselemizle doğrudan bağlantılı olan noktalara temas etmek için kabul ediyorum ki, Kant, analitik ve sentetik yargıları birbirlerinden ayırmakla çok büyük bir hizmette bulunmuştur. Geometrinin doğruluklarını sentetik ve a priori olarak adlandırırken, Kant onların gerçek doğalarını ortaya koymuştur. Ve bunun tekrar edilmesi halen önemlidir, çünkü bugün bile yeterince kabul görmemektedir. Eğer Kant aritme-

105 A.g.y. Cilt III, s. 82 [A-51 / B-75]

tik konusunda yanılmışsa, benim kanıma göre bu, onun yapıtının değerinde ciddi bir eksiklik meydana getirmez. Kant için önemli olan sentetik a priori yargıların varlığıdır; bunlar sadece geometride mi vardır, yoksa aritmetikte de mi vardır meselesi daha az önemlidir.

§ 90. Aritmetiğin önermelerinin [*aritmetischen Sätze*] analitik doğalarını olası olmanın biraz daha ötesinde ortaya koyduğumu öne sürmüyorum, çünkü kanıtlanmalarının yalnızca saf mantıksal yasalar yoluyla yapılabileceğinden ya da bu önermelerin kanıtlanmalarının belli bir noktasında bizim dikkatimizden kaçmış başka türden bir öncülün işin içine karışıp karışmadığından kuşku duyulabilir. Bu endişeler, bazı önermelerin kanıtlamasını verirken ortaya koyduklarımla bile giderilemez; ancak hiçbir halkası eksik olmayan bir çıkarım zinciri ortaya koyarak bunları ortadan kaldırmak mümkündür; böylece çıkarım zincirinde, saf mantıksal olarak bilinen az sayıdaki çıkarım ilkelerine uygun olmayan tek bir adım bile atılmış olmayacaktır. Günümüzde, tek bir kanıtlamanın bile, sözünü ettiğimiz bu doğrultuda yapıldığını öne sürmek güçtür; çünkü matematikçiler, yeni bir yargıya geçiş aşamasının kendinden apaçık doğru görünmesiyle yetiniyorlar ve bu kendinden apaçıklığın doğası hakkında, yani mantıksal mı, yoksa görüsel mi olduğu hakkında bir inceleme yapmıyorlar. Geçiş aşamasındaki böyle bir adım, aslında birçok basit çıkarıma eşdeğer olan bir bütün çıkarımlar toplamıdır ve onun içine görüden gelen bazı öğeler sızmış olabilir. Kanıtlamalarda ilerleme sıçramalarla yapılır ki, matematikteki çıkarım tiplerinin çeşitliğinin bu denli zengin görünmesinin nedeni budur; sıçramalar ne kadar büyük olursa, basit çıkarımların ve görüden türetilmiş aksiyomların kombinasyonu da o ölçüde temsil edilmiş olur. Yine de, böyle bir geçişin doğruluğu bize, ara basamakların bilincinde olmadan da kendiliğinden apaçık görünmektedir; ve kendini, doğruluğu kabul edilmiş mantıksal çıkarımlar olarak ortaya koymadığından, bu kendinden apaçıklığı, daha sonra görüsel olanın geçerlilik alanının çok ötesine geçse bile, görüsel ve çıkarsanmış bir sentetik doğruluk olarak kabul etmeye hemen hazır oluyoruz.

Görüye dayalı sentetik olanı, bu çeşit yollarla analitik olandan tam olarak ayırmak mümkün değildir. Ayrıca, görünün aksiyomlarını eksiksiz olarak kesinlik içinde biraraya toplayarak, matematikteki her kanıtlamanın mantık yasalarına uygun olarak yalnızca bu aksiyomlar aracılığıyla yapılmasını sağlamak da bu yollarla başarılamaz.

§ 91. Demek ki, çıkarımlar sırasında yapılabilecek her türlü sıçramadan kaçınmak gerekir. Bunu yerine getirmenin bu kadar zor olması, adım adım ilerlemenin uzun sürmesinden kaynaklanmaktadır. Sadece biraz daha karmaşık olan her kanıtlama, haddinden fazla uzun sürebilecektir. Üstelik, dilin içinde şekillenen mantıksal biçimlerin aşırı derecede çeşitli olması da, bütün durumlar için yeterli olabilecek ve kolaylıkla kavranabilecek çıkarım kurallarının ayırt edilmesini güçleştirmektedir.

Bu sakıncaları en aza indirgemek için benim *Begriffsschrift*'i [Kavram Yazısı] tasarladım. *Begriffsschrift*, dilegetirişlerin sadeliğini ve açık olarak anlaşılmalarını sağlamak üzere tasarlanmıştır ve az sayıda belirli kalıpla, bir hesaplama gibi işlemektedir; öyle ki, bir önermeden bir diğerine ilerlerken kesin olarak konulmuş kurallara uymayan hiçbir geçişe izin verilmemiştir.[106] Dolayısıyla, herhangi bir öncülün fark edilmeden bir kanıtlamanın içine sızması olanaksızdır. Böylece, görüye dayalı hiçbir aksiyomu kullanmadan, ilk bakışta sentetikmiş gibi görülebilecek bir önermenin kanıtlamasını vermiş oldum.[107] Onu aşağıdaki gibi formüle ediyorum:

Eğer bir seride her üyenin ardılıyla olan bağıntısı bir eşleme [*eindeutig*] bağıntısı ise ve eğer m ve y bu seride x'i izliyorlarsa, bu durumda, ya y bu seride m'den önce gelmektedir, ya m ile çakışmakta, ya da m'yi izlemektedir.

106 *Begriffsschrift*, Boole'un notasyonunda olduğu gibi yalnızca mantıksal biçimi dile getirmek için değil, aynı zamanda içeriği de dile getirecek şekilde tasarlanmıştır.

107 *Begriffsschrift*, Halle a/S. 1879, s. 86, Formül 133.

Bu kanıtlamadan da, bilgimizi genişleten önermelerin, analitik yargılar içerebileceği sonucu çıkabilir.[108]

Öteki Sayılar

§ 92. Şimdiye kadar incelememizi sayal sayılarla sınırladık. Şimdi de öteki sayı türlerine bir bakalım ve daha dar bir alanda öğrenmiş olduklarımızı bu daha geniş alanda kullanmayı yararlı kılmayı deneyelim.

Hankel,[109] belirli bir sayı çeşidinin olanaklı olup olmadığı sorusunun ne anlama geldiğini açık kılmak için şunları yazıyor:

"Bugün sayı, düşünen özneden ve sayının ortaya çıkmasına olanak veren nesnelerden ayrı olarak varolan bir töz değildir; Pythagorasçılarda olduğu gibi kendi başına varolan bir ilke de değildir. Bu yüzden, sayıların varolması sorunu, düşünen özneyle ya da aralarındaki bağıntıların sayılar tarafından temsil edildiği düşünülen nesnelerle ilişkilendirilebilir. Matematikçi açısından, olanaksız olan, yalnızca mantıksal olarak olanaksız olan, yani kendisiyle çelişik olandır. Bu anlamda olanaksız olan sayıların kabul edilemez olması, kanıtlama gerektirmemektedir. Ancak söz konusu sayılar mantıksal olarak olanaklıysa, kavramları açıkça ve tam olarak tanımlanmışsa ve dolayısıyla çelişki içermiyorsa, burada soru, şunlara verilecek yanıtlarla açıklanabilir: Gerçeklikte ya da bize görüde verilen fiili dünyada, bu sayılar için bir dayanak [*Substrat*] bulunuyor mu, sayıların, düşünülür [*intellectuellen*] bağıntılarla belirlenmiş olarak görüneceği nesneler var mıdır?"

108 Bu kanıtlama yine de çok uzun bulunacak, mutlak bir kesinliğe sahip olduğunun düşünülmesi de herhangi bir hata veya eksikliğin gözden kaçabilme durumu açısından sakıncalı görülecektir. Benim buradaki amacım, her şeyi olanaklı en az sayıdaki en basit mantık yasasına indirgemekti. Bu yüzden, yalnızca tek bir çıkarım ilkesi kullandım. Bununla birlikte, Önsöz'de, s. ....'de belirttiğim gibi, benim kavram yazımın daha ileri uygulamaları için, başka ilkelerin de kabul edilmesi gerekir. Bunu, çıkarım zincirlerindeki hiçbir halkayı yitirmeden yapmak mümkündür ve böylelikle kanıtlamalarda önemli ölçüde kısaltma yapılabilir.

109 A.g.y. s.6-7.

§ 93. Hankel'in ilk tümcesi, sayıların düşünen öznede mi, yoksa onların ortaya çıkmasını sağlayan nesnelerde mi, ya da her ikisinde de mi varolduğunu berrak bir şekilde ortaya koymuyor. Uzaysal anlamda sayılar, öznenin ya da nesnenin ne içinde ne de dışında olabilirler. Ancak, elbette sayıların öznel olmaması anlamında öznenin dışındadırlar. Her bireyin kendine özgü acı hissi, arzu ya da açlık hissi varken ve yalnızca kendi ses ve renk duyumlarının deneyimine sahipken, sayılar birçok bireyin ortak nesneleridir ve aslında hepsi için aynıdır, farklı zihinlerdeki içsel hallere az ya da çok benzer değillerdir. Hankel, sayıların varlığını düşünen özneyle ilişkilendirmek isterken, bunu psikolojik bir sorunmuş gibi ele almış görünüyor, oysa hiçbir şekilde böyle değildir. Matematik, bizim ruhumuzun doğasıyla ilgilenmez ve psikolojideki herhangi bir sorunun nasıl yanıtlanacağı matematiği hiç ilgilendirmez.

§ 94. Bundan başka, matematikçinin, olanaksızlık olarak, yalnızca mantıksal olanaksızlığı, yani kendisiyle çelişik olanı dikkate aldığından da kuşkulanmak gerekir. Bir kavram, tanımlayıcı vasıfları bir çelişki içerse bile kabul edilebilir; sadece, o kavramın altına bir şeyin düşmüş olduğu varsayılamaz. Ancak bir kavramın çelişki içermeyişinden onun altma bir şey düştüğü sonucunu henüz çıkartamayız. Ayrıca, bir kavramın hiçbir çelişki içermediğini nasıl kanıtlayabiliriz? Bu her zaman apaçık ortada değildir; herhangi bir çelişki görmememiz bir çelişkinin olmadığı anlamına gelmez; ne de açık ve tam bir tanım, çelişkiye karşı bir güvence oluşturmaktadır. Hankel,[110] normal dereceden daha yüksek dereceye sahip bir kapalı karmaşık sayılar cisminin, toplama ve çarpmanın tüm yasalarına tâbi kılındığında, bir çelişki içerdiğini kanıtlamıştır. İşte bu gerçekten kanıtlama gerektiren bir konudur; doğrudan görülemez. Hankel'in bu kanıtlamasından önce, bu tip bir sayı dizgesi kullanan herkes, dikkate değer sonuçlara ulaşabilirdi, ayrıca bunlar, Hankel'in[111] alterne sayılara dayanarak verdiği, determinantlar kuramından daha kötü de temellendirilmiş olmazlardı; çünkü, bu sayıların kavramında da gizli bir çelişki

110 A.g.y. s. 106-7
111 A.g.y., (35, s. 121-4

olmadığının güvencesini bize kim verebilir? Ve üstelik, böyle bir olasılığı istediğimiz sayıda alterne birimler için dışlamış olsak da, yine de böyle birimlerin varolmadığı sonucu bundan çıkmaz. Bizim istediğimiz tam da budur. Eukleides'in *Elemanlar*'mdan, I. Kitaptaki 18. teoremi örnek olarak vereceğiz:

Herhangi bir üçgende en uzun kenar, en büyük açının karşısında yer alandır.

Eukleides, bunu kanıtlamak için AC büyük kenarında, daha küçük AB kenarına eşit olan bir AD doğru parçası alır, bu amaç için daha önceki bir inşa çizimi kullanmaktadır. Eğer böyle bir D noktası olmasaydı, kanıtlama çökerdi; ve "AC üzerindeki A'dan uzaklığı, AB'ye eşit olan nokta" kavramında bir çelişki bulmamamız yeterli değildir. Eukleides, D noktasını B ile birleştirip BD doğru parçasını çizerek kanıtlamasını sürdürür. Böyle bir çizginin varolması, kanıtlamanın onun üzerine dayandığı başka bir önermedir.

§ 95. Elbette, bir kavramın çelişki içermediğini, ancak onun altına bir şey düştüğünü kesin olarak ortaya koyarak gösterebiliriz. Ters yönde yapılacak bir çıkarım hatalı olacaktır ve Hankel, x + b = c eşitliğine ilişkin söylediklerinde bu hataya düşmektedir. Hankel şunları söylemektedir:[112]

"b > c için, 1, 2, 3, ..., serisinde bizim problemimizi çözecek bir x sayısının olmadığı açıktır; öyleyse çıkarma işlemi *olanaksızdır*. Bununla birlikte, bu durumda bizi, (c - b) farkını, problemi çözen ve sanki 1, 2, 3..., serisinde böyle bir sayı varmış gibi işlemi sürdüren bir gösterge olarak görmekten alıkoyan bir şey yoktur."

Ancak (2 - 3)'ü bizim problemimizi çözen bir gösterge olarak görmekten bizi alıkoyan bir şey vardır; çünkü boş bir gösterge kesinlikle çözüm değildir; içeriği olmadıkça kâğıt üzerindeki bir mürekkep ya da baskı lekesidir sadece, fiziksel özelliklere sahip olan, ama 3 arttırıldığında 2 etmeyen bir şeydir. Aslında hiç de bir gösterge olmayacaktır ve onu bir gösterge olarak kullanmak mantıksal açıdan bir hata olacaktır. Hatta c > b olsa bile, problemi çözen ("c - b") göstergesi değil, onun içeriğidir.

112 A.g.y. s. 5. Benzer olarak E. Kossak, a.g.y, s.17.

§ 96. Aynı şekilde şunu da söyleyebiliriz: Şimdiye kadar bilinen sayılar içinde,

$$x + 1 = 2 \quad \text{ve} \quad x + 2 = 1$$

eşitliklerinin aynı anda çözümü olan bir sayı yoktur. Ancak bu problemi çözen bir göstergeyi devreye sokmaktan bizi alıkoyacak bir şey de yoktur. Buna, her iki eşitliği de aynı anda çözebilmek bir çelişkiye yol açacaktır, diye yanıt verilebilir. Eğer bu eşitlikleri çözecek bir gerçek sayı ya da bir karmaşık sayıya gerek duyuyorsak, bu kesinlikle böyledir; öyleyse yapmamız gereken, bu yeni gereksinimleri de karşılayacak şekilde yeni sayılar yaratarak sayı dizgemizi genişletmektir. Böylelikle herhangi birinin bunlarda da yeni bir çelişki bulup, ortaya çıkarmasını beklememiz gerekir. Bizim yeni sayılarımızla neyin olanaklı olacağını kim bilebilir? Elbette bu durumda çıkarmanın tek anlamlılığını koruyamayız; ama negatif sayıları da dahil etmek istiyorsak, karekök almanın tek anlamlılığını da bir kenara bırakmak gerekir; ve karmaşık sayılar da, logaritmaya çok anlamlılık getirmiştir.

Öyleyse ıraksak serilerin toplamına olanak veren başka sayılar da yaratalım mı? Hayır! Çünkü matematikçiler, tıpkı coğrafyacılar gibi kendi isteklerine göre şeyler yaratamazlar; matematikçiler de yalnızca olanı keşfeder ve ona ad verirler.

Kesirlerin, negatif sayıların ve karmaşık sayılara ilişkin Formalist kuramda aksaklık çıkmasının nedeni budur.[113] Bilinen hesaplama kurallarının, yeni ortaya konulan sayılar için de geçerliliklerini olabildiğince korumaları istenir ve buradan genel özellikler ve bağıntılar türetilir. Eğer herhangi bir çelişkiyle karşılaşılmıyorsa, yeni sayıların dahil edilmesi gerekçelendirilmiş kabul edilir; sanki örtük bir çelişkiyle karşılaşmak olanaksızmış gibi ve sanki çelişkinin olmaması, onların varolması sonucunu getiriyormuş gibi.

113 Cantor'un sonsuz sayıları için de durum aynıdır.

* Türkçede belirli tanımlık olmadığı için bu ayrımı ortaya koymakta zorlanıyoruz. Yukarıda ilk dilegetiriş kavramken, belirli tanımlık taşıyan ikincisi bir özel ad konumundadır; ikincisi için belki "-1'in bu kare kökü" denebilir. (ç.n.)

§ 97. Böyle bir hataya kolaylıkla düşülmesi, kavramlarla nesneler arasındaki açık ayrımın dikkate alınmamasından kaynaklanmaktadır. Hiçbir şey, "-1'in karekökü" ["*Quadratwurzel aus -1*"] kavramını kullanmaktan bizi alıkoyamaz; ama bu kavramın önüne belirli tanımlığı koymaya ve "-1'in karekökü" ["*die Quadratwurzel aus -1*"]* dilegetirişini sanki bir anlama* sahipmiş gibi değerlendirmeye hakkımız yoktur. $i^2 = -1$ verildiğinde, *a* açısının herhangi bir katının sinüsünü ifade eden formülün, sin *a* ve cos *a* cinsinden kanıtlamasını verebiliriz; ancak bu önermenin, $i^2 = -1$ koşuluna işaret ettiğini ve bu koşuldan söz etmeden onu dışarıda bırakma hakkına sahip olmadığımızı unutmamamız gerekir. Eğer karesi -1 olan hiçbir şey yoksa, kanıtlamamız gereğince eşitlik doğru olmayacak;[114] çünkü onun geçerliliğinin bağlı olduğu $i^2 = -1$ koşulu hiçbir zaman yerine gelmemiş olacaktır. Bu, tıpkı bir geometrik kanıtlamada çizimi olanaksız olan bir çizgiyi, yardımcı olarak kullanmamıza benzer.

§ 98. Hankel, *litik* [*lytische*] ve *tetik* [*thetische*] adını verdiği, iki çeşit işlem öneriyor ve onları, sahip olacakları bazı özelliklerle tanımlıyor.[115] Bu çeşit işlemlerin ve onların sonucu olabilecek nesnelerin varolabilecekleri varsayılmadığı sürece bunda karşı çıkılacak bir yan yoktur.[116] Hankel, daha sonra, *tetik* olan, tek değerli ve birleşme özelliğine sahip bir işlemi (a + b) ile ve buna karşılık gelen ve aynı şekilde tek değerli olan *litik* işlemi, (a - b) ile simgeleştiriyor.[117] Böyle *bir* işlem? Ama hangisi? Herhangi birisi mi? Demek ki bu, (a + b)'nin bir tanımı değildir; ve üstelik böyle bir şey varolmuyorsa, bu neyin tanımıdır? Eğer "toplam" sözcüğünün henüz bir gönderimi olmasaydı, mantıksal olarak şunu dile getirmek yerinde olacaktı: Bu tür bir işleme "bir toplama"

* Frege, Husserl'e yazdığı 24 Mayıs 1891 tarihli mektubunda "anlam" ve "gönderim" ayrımını *Aritmetiğin Temelleri*'nde henüz yapmamış olduğunu, bu ayrımı dikkate aldıktan sonra, şimdi yukarıdaki tümcede yer alan "anlama sahip olma" [*sinnvoll*] yerine, "gönderime sahip olma"yı [*bedeutungsvoll*] kullanmayı tercih ettiğini ifade ediyor. (ç.n.)

114 Bunu başka bir yoldan kanıtlamak her zaman olanaklıdır.

115 A.g.y. ,s. 18.

116 Bu, Hankel'in θ (c, b) = a eşitliğini kullanarak daha önce yaptığı şeydir.

117 A.g.y., s. 29

[*eine Addition*] adını vermeyi öneriyoruz; ama söyleyemeyecek olduğumuz şudur: Bu tür bir işleme "toplama" [*die Addition*] adını vermeyi ve onu (a + b) ile simgeleştirmeyi öneriyoruz. Çünkü böyle bir ve yalnız bir işlem olduğu henüz ortaya konmuş değildir. Tanımdaki eşitliğin bir yanında belirsiz tanımlığı, diğer yanında belirli tanımlığı kullanamayız. Bununla birlikte Hankel, başka bir şey eklemeden ve bir ve yalnız bir modül olduğunu kanıtlamadan, "işlemin modülü"nden söz etmektedir.

§ 99. Özetle bu saf Formalist kuram yeterli değildir. Onda değerli olan yalnızca şudur. Eğer bir işlem, birleşme ya da değişme özelliği gibi özelliklere sahipse, bu durumda aynı işlem hakkmdaki bazı önermelerin sağlandığını kanıtlayabiliriz. Dolayısıyla, bizce zaten bilinen toplama ve çarpma gibi işlemlerin bu özelliklere sahip olduğunu gösterebilirsek, her bir durum için uzun uzun kanıtlama yapmadan, toplama ve çarpma ile ilgili önermelerimizi ortaya koyabiliriz. Demek ki, bizim biçimsel kuramımızı ancak başka bir yerden alman işlemlere uyguladıktan sonra aritmetiğin bilinen önermelerine ulaşabiliyoruz. Ancak bunu, toplama ve çarpma işlemlerini ortaya koymak için bir yöntem olarak kullanabileceğimizi varsaymaya hiçbir şekilde hakkımız yoktur. Bu yöntem, onların tam bir tanımını vermemekte, sadece onların tanımları için yol göstermektedir. "Toplama" adının, yalnızca *tetik* olan, tek değerli ve birleşme özelliğine sahip bir işleme verilmesi gerektiğini söyleyebiliriz; ama yine de bunda, böyle adlandırılacak işlemin hangisi olduğuna ilişkin bir şey yoktur. Buna göre, geldiğimiz noktada, işlemi, çarpmayı toplama olarak adlandırmaktan ve onu (a + b) ile simgeleştirmekten bizi alıkoyacak hiçbir şey yoktur; üstelik hiç kimse 2 + 3'ün, 5 mi, yoksa 6 mı olduğunu kesin olarak söyleyemeyecektir.

§ 100. Eğer bu saf biçimsel yöntemi bir kenara bırakırsak, yeni sayıların dahil edilmesiyle birlikte 'toplam' ve 'çarpım' gibi sözcüklerin gönderimlerinin genişlediği bir yol açılıyor görünmektedir. Herhangi bir nesneyi, örneğin Ay'ı ele alalım ve şu tanımla işlemi sürdürelim: Ay, kendisiyle çarpıldığında -1 olsun.

Bu, -1'in karekökünü bize Ay şeklinde verecektir. Bu tanımda yanlış olan hiçbir şey yoktur, çünkü şimdiye kadar çarpma işlemine atfedilen gönderim, Ay'ın Ay'la çarpımının anlamı hakkında hiçbir şey söylememektedir; dolayısıyla bu gönderimi genişletmek için Ay'a ilişkin olarak ne istersek onu seçebiliriz. Ancak, -1'in kareköküyle bir gerçek sayının çarpımına gereksinimimiz vardır. Öyleyse, bizim -1'in karekökü yerine, bir saniyelik bir zaman aralığını seçelim ve onu i ile simgeleştirelim. Dolayısıyla 3i'den, 3 saniyelik bir zaman aralığı anlaşılacaktır, vb.[118] Peki bu durumda, örneğin 2 + 3i ile hangi nesne gösterilmiş olmaktadır? Bu durumda artı göstergesinin gönderimi ne olacaktır? Şimdi bunun tüm böyle durumlar için ortaya konulması gerekir ve bunu yapmak hiç de kolay bir iş değildir. Biz yine de, a + bi biçimindeki tüm göstergeler için bir anlam sağladığımızı varsayalım ve bu öyle bir anlam olsun ki, bilinen toplama yasaları onun için geçerli olsun.

Bundan sonra yapılması gereken, onu genel olarak,

$$(a + bi)(c + di) = ac - bd + i(ad + bc)$$

şeklinde ortaya koymak, dolayısıyla çarpmanın genişletilmiş anlamını belirlemektir.

§ 101. Şimdi, eğer karmaşık sayıların aynılığından, onların gerçek sayı taraflarının aynılığını da çıkarsayabileceğimizi biliyorsak, cos (n α) için verilen formülü kanıtlayabilmemiz gerekir. Bu da, bizim burada kullanılmaya hazır olduğunu varsaydığımız a + bi'nin anlamından çıkmalıdır. Yani bu formül için verdiğimiz kanıtlama, yalnızca karmaşık sayıların, onların toplamları ve çarpımlarının bizim tarafımızdan belirlenmiş anlamları için geçerlidir. Şimdi, gerçek tamsayı *n* ve gerçek sayı *α* için i, formüldeki eşitlikte tümüyle ortadan kalktığı için, i'nin bir saniyeyi ya da bir milimetreyi veya herhangi bir şeye gönderme

118 - 1'in karekökünü elektriksel bir nicelik, belirli bir yüzey vb. gibi seçme hakkına da aynı şekilde sahibiz; ama bu durumda, bu farklı köklere karşılık gelecek farklı göstergeleri kullanmamız gerekir. İlk bakışta, istediğimiz kadar çok "-1'in kare kökü" yaratabilirmişiz gibi görünmesi, "-1'in karekökü"nün gönderiminin, biz bu seçimleri yapmadan önce de zaten değişmez bir şekilde saptanmış olduğunu, ama ilk kez onlar tarafından ve onlarla beraber saptandığını düşündüğümüzde, bu kadar da şaşırıcı olmaktan çıkmaktadır.

yapmasının (*bedeutet*), toplama ve çarpma yasaları sağlandığı sürece, son derece önemsiz olduğu sonucuna yöneldik; her şey bu noktaya bağlıdır ve gerisi hakkında kaygılanmaya gerek yoktur. Belki de çok çeşitli farklı gönderimleri a + bi'ye, toplama ve çarpmaya atfetme olanağı vardır; bunların tümü, bu yasaları sağlamayı sürdürebilir; ama bu dilegetirişler için böyle anlamları bulabilmemiz ya da bulamamamız önemsiz bir şey değildir.

§ 102. Bir şeyi sadece postüle etmekle, onun gerçekleşmesi sanki eşdeğermiş gibi uygulamada bulunmak oldukça yaygın bir tutumdur. Bütün durumlarda çıkarma,[119] bölme ya da kök alma işlemlerini gerçekleştirmenin olanaklı olacağını postüle ediyoruz ve bunun da yeterli olduğuna inanıyoruz. Ama niye herhangi üç noktadan geçen bir doğrunun çizilebileceğini postüle etmiyoruz? Niye tüm toplama ve çarpma yasalarının tıpkı üç boyutlu gerçek sayılar uzayında sağlanması gibi, üç boyutlu karmaşık sayılar uzayında da sağlanacağını postüle etmiyoruz? Çünkü böyle bir postulat bir çelişki içermektedir. Demek ki, ilk yapmamız gereken şey, bizim diğer postulatlarımızın bir çelişki içermediğini kanıtlamaktır. Bunu yapıncaya kadar, arzu ettiğimiz her türlü kesinlik ve keskinlik, aldanma ve boş sözden ibaret olacaktır.

Bir geometri teoremini kanıtlamak için çekilen bir çizgi, teoremin kendisinde yer almaz. Örneğin herhangi bir noktayı istediğimiz gibi seçtiğimizde, belki de birden çok çizginin olması mümkündür. Her ne kadar bu çizgilerin her biri gereksiz de olsa, kanıtlamamızın gücü istenilen niteliklere uygun çizgileri çizebilmemize bağlıdır. Yani sadece postüle etmek yeterli değildir. Dolayısıyla bizim durumumuz da, "a + bi"nin bir anlamının olup olmadığı ya da yalnızca bir baskı lekesi olup olmadığı, kanıtlamamızın gücü açısından önemsiz değildir. Bir anlamının olması gerektiğini ya da a ve bi'nin toplamı anlamına geldiğini söylemek, "toplam"ın bu durumla ilgili olarak neye gönderme yaptığını önceden tanımlamadan ve belirli tanımlığm kullanımını gerekçelendirmeden bizi hiçbir yere götürmeyecektir.

119 Krş. Kossk, a.g.y., s. 17.

§ 103. "i"ye atfedilmesini önerdiğimiz özel anlama karşı birçok şekilde karşı çıkılabilir. Çünkü bizim atfettiğimiz anlamla, aritmetiğe son derece yabancı olan bir şeyi, yani zamanı devreye sokmuş oluyoruz. Saniyenin, gerçek sayılarla hiçbir içsel bağıntısı yoktur. Karmaşık sayılar yardımıyla kanıtlanan önermeler, onlar için başka bir kanıtlama çeşidi veya "i" için başka bir anlam bulunmadığı sürece, a posteriori ya da sentetik yargılar olacaktır. İlkin yapmamız gereken, aritmetiğin tüm önermelerinin analitik önermeler olduklarını kanıtlamaya çalışmak olmalıdır.

Kossak'm,[120] karmaşık sayıları "aynı öğelerden meydana gelen türdeş olmayan grupların bileşik tasarımı"[121] olarak açıklaması, herhangi yabancı bir şeyin sokulmasını önlüyor gibidir, ancak böyle görünüyor olmasının nedeni, sadece dilegetirişinin belirsizliğinden kaynaklanmaktadır. 1 + i'nin gerçekten neye gönderdiği sorusuna bir yanıt alabilmiş olmuyoruz. Bunun bir elmanın ve armudun mu, yoksa diş ağrısının ve gut hastalığının mı tasarımı olduğu belli değil. Ama her durumda bunlardan ikisinin birden gönderimi aynı anda aynı şey olamaz, yoksa 1 + i, her zaman 1 + i ile aynı olmayacaktır. Şimdi bunun, ona atfettiğimiz özel anlama bağlı olduğu söylenebilir. Bunu kabul etsek bile, Kossak'ın tümcesi, karmaşık sayıların tanımını bize vermemekte, yalnızca onunla işlem yapmanın genel çizgilerini ortaya koymaktadır. Ama bizim gereksindiğimiz daha fazlasıdır: "i"nin gönderimini kesin olarak bilmemiz gerekir; ve eğer bunu genel çizgilere göre yaparsak ve bir armut tasarımına gönderdiğini söylemeyi denersek, bir kez daha yabancı bir şeyi aritmetiğe sokmuş oluruz.

Genelde karmaşık sayıların geometrik temsili olarak bilinen gösterimin, şimdiye kadar önerilenlerin karşısında en azından şu üstünlüğü vardır ki, bu gösterimde 1 ve i tümüyle bağlantısızmış ve farklı türdeymiş gibi görünmemekte, tersine i'yi temsil eden doğru parçası, 1'i temsil eden doğru parçası ile düzenli bir bağıntı içinde durmaktadır. Bununla birlikte şunu ekleyebilirim ki, bu gösterimde 1'in belli bir doğru parçasına, i'ninse onu

120 A.g.y., s. 17.

121 Krş. "öznel tasarım" terimi için § 27, "grup" için "yığın"la ilgili § 23 ve § 25, öğelerin aynılığı için ise § 34-39'da söylenenler.

dik kesen ve onunla aynı uzunlukta olan bir doğru parçasına gönderdiğini söylemek doğru değildir; tam aksine, "1"in gönderimi tüm bağlamlarda aynıdır. Bu yoruma göre bir karmaşık sayı, verilen doğru parçasından (birim doğru parçasından) başlayarak, çarpma, bölme ve döndürme işlemleriyle onun temsili olarak alman doğru parçasına nasıl ulaşıldığını göstermektedir.[122] Ama, bu açıklama bile, kanıtlanması bir karmaşık sayının varolmasında temellenen her teoremi, geometrik görüye bağımlı kılmakta, dolayısıyla da teorem sentetik olmaktadır.

§ 104. Bu durumda kesirler, irrasyonel sayılar ve karmaşık sayılar bize nasıl verilebilir? Eğer görüden yararlanacak olursak, aritmetiğe yabancı bir şeyi sokmuş oluruz; ama böyle bir sayının kavramını yalnızca onun vasıflarını vererek tanımlarsak, yani sayının yalnızca belli özelliklere sahip olmasını istersek, bu durumda kavramın altına bir şey düşecek olmasının ve bizim taleplerimizi sağlayacağının herhangi bir güvencesi yoktur; ama kanıtlamalarda temellendirilmesi gereken yer tam da budur.

Peki, sayal sayılarla ilgili durum nasıldır o zaman? Gerçekten $1000^{1000^{1000}}$'den söz edebilmek için bu kadar çok nesnenin bize görüde verilmesini beklemek durumundayız? Yani bu, görüde verilinceye kadar boş bir göstergeden başka bir şey değil midir? Kesinlikle değil! Çok kesin bir anlamı vardır, gerçi psikolojik yönden bakıp insan ömrünün kısa olmasını göz önüne alırsak, bu kadar çok nesnenin bilincine varmak her birimiz için olanaksızdır;[123] ama yine de $1000^{1000^{1000}}$ sayısının görüsünü edinemesek bile, o, özelliklerini bilebileceğimiz bir nesnedir. a^n göstergesi, a'nın n'inci kuvveti olarak alındığında, bu ifadenin a ve n gibi pozitif tamsayılar için her zaman bir ve yalnızca bir tek pozitif tamsayıya karşılık geldiğine inanılır. Bunun ayrıntılı bir kanıtlamasını vermek, bizi şu andaki amacımızdan çok uzaklaştıracaktır. Bu kanıtlamanın nasıl yapılacağına ilişkin genel bir fikir, § 74'te sıfırı tanımlarken, § 77'de biri tanımlarken ve § 84'te

122 Basitleştirme amacıyla eşölçümlü olmayanları [*Incommensurabeln*] dikkate almadım.

123 Basit bir hesap bile, milyonlarca yılın bunun için yeterli olmayacağını göstermektedir.

sonsuz sayal sayı ∞_1'i tanımlarken kullandığımız yöntemden ve doğal sayılar serisindeki her sonlu sayal sayıyı, bir sayal sayının doğrudan izlediğinin kanıtının ana çizgilerinden (§ 82 ve § 83) edinilebilir.

Kesirli, karmaşık ve diğer sayıların tanımlarında da aynı şekilde, her şey sonunda iki tarafı da yeni sayılardan oluşan bir eşitliğe dönüştürülebilecek olan bir yargı içeriğinin [*beurtheilbaren Inhalt*] araştırılmasına gelip dayanacaktır. Başka bir deyişle, yapmamız gereken, bu sayıları yeniden tanıyarak ulaştığımız teşhis yargısının [*Wiedererkennungsurtheils*] anlamını saptamaktır. Bunu yaparken, böyle bir dönüşümde ortaya çıkan ve §§ 63-68'de irdelediğimiz kuşkuları unutmamamız gerekir. Eğer oradaki yöntemi izlersek, yeni sayılar bize kavramların kaplamları olarak verilirler.

§ 105. Sayıların bu görüş açısından değerlendirilmesi,[124] bana öyle görünüyor ki, aritmetik ve analizin çekiciliğini açıkça ortaya koyuyor. Çok iyi bilinen sözcüklerle bunu şöyle ifade edebiliriz: Aklm asıl nesnesi [*der eigentliche Gegenstand der Vernunft*], aklın kendisidir. Aritmetikte, duyular aracılığıyla dıştan yabancı bir şey olarak gelen nesnelerle değil, aracısız olarak doğrudan akla verilen ve aklın en kendine özgü sahiplenimleri olarak tüm saydamlıklarıyla görülebilecek nesnelerle ilgileniriz.[125]

Yine de, ya da tam da bu sebeple bu nesneler hiçbir şekilde öznel hayal ürünleri değildir. Aritmetiğin yasalarından daha nesnel bir şey yoktur.

§ 106. Araştırmamızın seyrine kısaca son kez bir göz atalım. Sayının, ne şeylerin bir yığını, ne şeylere ait bir özellik, ne de zihinsel süreçlerin öznel bir ürünü olduğunu ortaya koyduktan sonra, bir sayı tümcesinin bir kavram hakkında nesnel bir bildi-

124 Buna da biçimsel [*formal*] görüş denilebilir. Bununla birlikte, aynı ad altında eleştirilen görüşten tamamıyla farklıdır.

125 Bunu söylerken, duyusal izlenimler olmadan taşlar kadar aptal olacağımızı ve sayılar hakkında olduğu kadar, başka şeyler hakkında da bilgi edinemeyeceğimizi hiçbir şekilde yadsımış olmuyorum; ama bu psikolojik tümce bizi burada hiç ilgilendirmiyor. Temelde farklı olan bu iki sorunun birbirine karıştırılma tehlikesi yüzünden, bu noktayı bir kez daha vurguluyorum.

rimde bulunduğu sonucuna vardık. Bundan sonra 0, 1, vb. tekil sayıların ve sayı serilerindeki bir sayıdan diğerine ilerlemenin tanımlanması işine geçtik. İlk girişimimiz başarısızlıkla sonuçlandı, çünkü kavramlar hakkmdaki bildirimleri tanımlamıştık yalnızca, ama bildirimde geçen yüklemlerin parçaları olan 0'ın, 1'in ayrı ayrı tanımlarını vermemiştik. Bu bizi, sayıların aynılığını/özdeşliğini kanıtlayamamış olduğumuz sonucuna götürmüştü. Bu da, aritmetiğin incelediği sayıların bağımlı bir öznitelik olmadığını, buna karşılık kendi başına olanların adları olarak düşünülmeleri gerektiğini göstermişti.[126] Böylece sayının, kendisi olarak yeniden tanınabilecek veya teşhis edilebilecek [*wiederekennbarer*] bir nesne olduğu ortaya çıkmıştı, her ne kadar fiziksel ya da uzaysal bir nesne ya da hayal gücümüz aracılığıyla oluşturabileceğimiz bir resim olmasa da. Bundan sonra, bir sözcüğün gönderimini [*bedeutung*] tek başına tanımlamaya hiçbir zaman kalkışmamamız gerektiği, bunun ancak bir tümce bağlamında yapılması gerektiği yolundaki temel ilkeyi ortaya koyduk; öyle inanıyorum ki, sadece bu ilkeye sıkıca bağlanarak, sayının psikolojik görüşüne sapmadan, fizikalist sayı anlayışından kaçınılabilir. Şimdi, her nesne için bir anlamı olması gereken bir tümce, yani teşhis etme tümcesi vardır ki, sayılarla ilgili durumda ona eşitlik adı verilmektedir. Gördüğümüz gibi sayı tümceleri de bir eşitlik olarak ele alınabilir. Dolayısıyla şimdi sorun şudur: Bir sayısal eşitliğin anlamını saptamak, yani bu anlamı sayı sözcüklerini ya da "sayı" sözcüğünü hiç kullanmadan dile getirmek. F kavramının altına düşen nesnelerle, G kavramının altma düşen nesneleri bire-bir eşlemek olanağını, sayılara ilişkin bir teşhis etme yargısının [*Wiedererkennungsurtheils*] içeriği olarak aldık. Buna göre, bizim tanımımız, bu olanağı dile getiren tümcenin, bir sayısal eşitliği dile getiren tümceyle aynı gönderime sahip olduğunu ortaya koymuş oldu. Benzer durumları, çizgilerin paralelliğinden türetilmiş yön tanımını, şekillerin benzerliğinden türetilmiş biçim tanımını, vb. durumları anımsıyoruz.

126 Buradaki ayrım, "mavi" ile "gökyüzünün rengi" [*die Farbe des Himmels*] arasındaki ayrıma karşılık gelmektedir. ["die" belirli tanımlığı ile kullanıldığı için bir özel ada karşılık gelmektedir (ç.n.)]

§ 107. Bu durumda ortaya şu soru çıkıyor: Bir içeriği, bir teşhis etme yargısı olarak görme hakkına ne zaman sahip oluruz? Bunun için, her bir yargıda varsayılan eşitlikteki sağ tarafın yerine, eşitliğin doğruluğu bozulmadan sol taraftakinin konulabilmesi koşulunun sağlanması gerekir. Şimdi, daha başka tanımları da eklemeden, böyle bir eşitliğin her iki yanıyla ilgili olarak, başlangıçta, onların aynı olması dışında hiçbir şey bilmiyorduk. Dolayısıyla, gösterilmesi gereken şey bir eşitlikte, birinin yerine diğerini koymanın mümkün olduğuydu.

Bununla birlikte ortada kuşkulu bir yan kalmıştı. Bir teşhis etme yargısının her zaman bir anlamı olması gerektir. Ama şimdi, eğer F kavramının altına düşen nesnelerle, G kavramının altına düşen nesnelerin bire-bir eşlenme olanağını, bir eşitlik olarak ele alır ve "F kavramına ait olan sayal sayı, G kavramına ait olan sayal sayı ile aynıdır"ı öne sürersek ve böylelikle "F kavramına ait olan sayal sayı" dilegetirişini devreye sokarsak, bu durumda eşitlik, ancak her iki tarafın da sözünü ettiğimiz bu aynı biçime sahip olması durumunda bir anlama sahip olacaktır. Eğer bir eşitliğin yalnızca bir tarafı bu biçime sahipse, böyle bir tanım, eşitliğin doğru ya da yanlış olduğuna karar verebilmemize olanak tanımayacaktır. Bu durum bizi aşağıdaki tanımı vermeye yöneltti:

F kavramına ait olan sayal sayı, "F kavramıyla eşsayılı olan kavram" kavramının kaplamıdır; burada, bir F kavramı ile bir G kavramı eşsayılıdır eğer aralarında bire-bir eşleme olanağı varsa.

Bu tanımda "bir kavramın kaplamı" dilegetirişinin anlamının bilindiği varsayılmaktadır. Güçlüğün üstesinden bu biçimde gelinmesi, elbette genel bir onay görmeyebilir ve birçokları söz konusu kuşkuyu ortadan kaldırma konusunda başka yöntemler deneyecektir. Ben de kendi hesabıma, kavramların kaplamlarını dahil etmiş olmayı çok da önemli bulmuyorum.

§ 108. Geriye bir tek bire-bir eşlemenin açıklanması kalmıştı; biz bunu tümüyle saf mantıksal bağıntılara indirgedik. "F kavramına ait olan sayı, G kavramına ait olan sayı ile aynıdır, eğer F kavramı, G kavramı ile eşsayılı ise" tümcesinin kanıtlanmasının

ana çizgilerini verdikten sonra, 0'ı tanımladık, "*n*, doğal sayılar serisinde doğrudan *m*'yi izler" dilegetirişini tanımladık ve 1'i tanımladık ve daha sonra da 1'in doğal sayılar serisinde doğrudan 0'ı izlediğini gösterdik. Bu aşamada kolaylıkla kanıtlanabilecek bazı tümceleri ortaya koyduktan sonra, sayı serilerinin sonsuz olduğunu gösteren aşağıdaki tümceye geldik:

Doğal sayılar serisinde her sayıdan sonra bir diğer sayı gelir.

Bu da bizi, "*n* ile sonlanan doğal sayılar serisinin üyesi" kavramına götürdü; göstermek istedik ki, bu kavrama ait olan sayal sayı, doğal sayılar serisinde doğrudan *n*'yi izlemektedir. Biz bunu, bir *y* nesnesinin, bir genel ϕ-serisinde, *x* nesnesini izlemesi cinsinden tanımladık. Bu dilegetirişin anlamı da tümüyle mantıksal bağıntılara indirgenmiştir. Ve böylelikle, çoğunlukla matematiğe özgü bir çıkarım olarak kabul edilen *n*'den $(n + 1)$'e yapılan çıkarımın, gerçekte, mantıktaki genel çıkarım ilkelerine dayandığını göstermeyi başardık.

Sonra, sayı serilerinin sonsuz olduğunu kanıtlamak için, doğal sayılar serisindeki hiçbir sonlu sayının kendisini izlemeyeceği önermesini kullanmaya gerek duyduk. Ve böylelikle sonlu ve sonsuz sayı kavramlarına ulaştık. Gösterdik ki, sonsuz olan sonlu olandan mantıksal açıdan hiç de daha az gerekçelendirilmiş değildir. Karşılaştırma yapabilmek için, Cantor'un sonsuz sayal sayılarına ve onun "ardışık izleme"sine başvurulmuş ve aynı zamanda onun terminolojisindeki farka da işaret edilmiştir.

§ 109. Şimdiye kadar yapmış olduklarımızdan aritmetiğin doğruluklarının analitik ve a priori olduğu sonucu kuvvetle muhtemelmiş gibi görünüyor; ve böylelikle Kant'm konuyla ilgili görüşünde bir ilerleme gerçekleştirmiş oluyoruz. Daha sonra, bu muhtemel sonucu tam bir kesinliğe yükseltmemiz gerektiğini gördük ve bu amaca götüren yolu gösterdik.

Sonuç olarak, ulaşmış olduğumuz sonuçları, negatif, rasyonel, irrasyonel ve karmaşık sayıların formalist kuramının eleştirisinde kullandık, böylelikle bu kuramın eksikliklerini açıkça ortaya koyduk. Bu kuramın hatasının, bir çelişki ortaya çıkmadığı sürece, bir kavramın hiçbir çelişki içermediğini kanıtlanmış

olarak kabul etmekte ve bir kavramda çelişki bulunmamasını onun altına bir şey düşmesinin güvencesi olarak almakta yattığını görmüş olduk. Formalist kuram, bütün yapmamız gerekenin postulatlar oluşturmak olduğunu düşünüyor; bunların başarılı olmasıyla işler kendiliğinden yürüyecektir. Formalist kuram sadece sözleriyle istediği her şeyi yaratabilen bir Tanrı gibi davranıyor. Burada kınanması gereken bir diğer nokta da, tanıma götüren yol gösterici talimatların tanım yerine geçmesidir; çünkü böyle bir şey, aritmetiğin içine yabancı öğelerin sızmasına neden olacaktır; her ne kadar bunların formülasyonunda sanki yabancı öğerler yokmuş gibi görünse de, bu, onların sadece yol gösterici olarak kalmaları nedeniyledir.

Formalist kuram, her ne kadar kendisine soyutlamaların doruklarında süzülüyormuş görünümü verse de, aslında bir a posteriori ya da en azından sentetik bir kurama düşme tehlikesi içindedir.

Pozitif tamsayıları ele aldığımız bu incelememiz, Formalistlerin düştüğü yanlışlara düşmeden de, dışsal şeylerin ve geometrik görünün aritmetiğe dahil edilmesinden kurtulmanın olanaklı olduğunu göstermiştir. Burada sorun, aynı Formalistlerle ilgili sorunda olduğu gibi bir teşhis etme yargısının içeriğini saptamaktır. Bunun her yerde sağlanmış olduğunu düşünürsek, böylece ister negatif, rasyonel, irrasyonel olsun, ister karmaşık sayı olsun, tüm sayı türlerinin pozitif tamsayılardan daha gizemli olmadığı görülmektedir; pozitif tamsayılar ise diğerlerinden ne daha gerçek, ne daha fiili, ne de daha somuttur.

Modern simgesel mantığın ve analitik felsefenin kurucusu sayılan Gottlob Frege'nin (1848 - 1925) başyapıtı *Aritmetiğin Temelleri, Sayı Kavramı Üzerine Mantıksal-Matematiksel bir İnceleme*, Türkçede. Matematiğin mantığın uygulama alanı olduğu görüşünden hareketle matematiğin, mantığın aksiyomatik sistemi üzerine kurulabileceğini düşünen Frege, bu çalışmasında aritmetiğin temelleri üzerine felsefi çalışmaları için bir mantık sistemi geliştirmiştir. Batı uygarlığında sayı kavramı üzerine en kapsamlı ilk inceleme olan eser, Bülent Gözkân'ın özenli çevirisiyle dilimize kazandırıldı.

ISBN 978-975-08-1521-8
11 YTL
9 789750 815218