GÜNCEL YAYINCILIK

AÇIK BİLİM

Matematik büyücüsü

SAYILARIN GÖSTERİSİNE HOŞ GELDİNİZ!



ALFRED S. POSAMENTIER

Türkçesi: Barış Akalın-Bilge Şipal

MATEMATİK BÜYÜCÜSÜ

GÜNCEL YAYINCILIK: *207*
Açık Bilim:24
•
ISBN 975-8621-80-7
MATEMATİK BÜYÜCÜSÜ

Kitabın orijinal adı: Math Charmers
•
Genel Yayın Yönetmeni: Aysel Akdaş

•

Kapak tasarımı: Talip Aktaş

•

Birinci Basım: Eylül-2004

•

Ofset Hazırlık
Güncel Yayıncılık Ltd.

Baskı ve cilt: Kayhan Matbaacılık

© Alferd S. Posamentier
© Prometheus Books 2003
© Güncel Yayıncılık Ltd.Şti.
Tanıtım için yapılacak kısa alıntılar dışında
yayıncının yazılı izni olmaksızın hiçbir yolla çoğaltılamaz.

GÜNCEL YAYINCILIK LTD. ŞTİ.
Çatalçeşme Sok. No:54 Kat, 3
Cağaloğlu - İstanbul
Tel: 0 212 511 22 37, Fax: 0 212 522 86 68
e- mail: kontiki@turk.net

MATEMATİK BÜYÜCÜSÜ

Sayıların Gösterisine Hoş Geldiniz!

ALFERD S. POSAMENTIER

Türkçesi: Bilge Şipal-Barış Akalın

GÜNCEL YAYINCILIK

2.7 Zekice Toplama 86
2.8 Alfametik 88
2.9 Gülünç Hatalar 91
2.10 Sıra Dışı Sayı 9 96
2.11 Ardışık Yüzdeler 99
2.12 Ortalamalar Gerçekten Ortalama mıdır? 101
2.13 72 Kuralı 103
2.14 Bir Karekökü Bulmak 104

Bölüm 3 Şaşırtıcı Sonuçları Olan Problemler 107

3.1 Akılcı Uslamlama 108
3.2 Şaşırtıcı Çözüm 109
3.3 Bu Problemin Şerefine İçmeyin 111
3.4 Geriye Doğru Çalışmak 113
3.5 Mantıksal Düşünme 114
3.6 Bu Sadece Sizin Verileri Organize Etmenizle İlgili 115
3.7 Doğru Bilgiye Odaklanmak 117
3.8 Güvercin Yuvası Prensibi 119
3.9 Balarısının Uçuşu 120
3.10 Ortak Merkezli Çemberleri İlişkilendirmek 121
3.11 Bariz Olanı Kaçırmayın 123
3.12 Görünüşte Zor (Kolay) 124
3.13 En Kötü Durum Senaryosu 126

Bölüm 4 Cebirsel Eğlenceler 129

4.1 Aritmetik Kısa Yollar Oluşturmak İçin Cebiri Kullanmak 130
4.2 Gizemli Sayı 22 131
4.3 Bir Garipliği Doğrulamak 132
4.4 Sayılar Teorisi İçin Cebri Kullanmak 134
4.5 Şekilsel Sayılardaki Kalıpları Bulmak 135
4.6 Bir Serinin Toplamını Bulmak İçin Bir Kalıp Kullanmak 138
4.7 Cebrin Geometrik Görünümü 140
4.8 Altın Oranla Biraz Cebir 143
4.9 Cebir Kullanışlı Olmadığında 146
4.10 Paydayı Rasyonelleştirme 146
4.11 Pisagor Üçlüleri 148

Bölüm 5 Geometrik Harikalar **155**

5.1 Bir Üçgenin Açılarının Toplamı 156
5.2 Pentagram Açıları
5.3 _ Üzerine Bazı Akıl Kurcalayan Şeyler 158
5.4 Her Zaman Varolan Paralelkenar 161
5.5 Alanları ve Çevreleri Karşılaştırmak 163
5.6 Eratosthenes Dünya'nın Çevresini Nasıl Ölçtü? 166
5.7 Dünya'nın Çevresindeki Şaşırtıcı İp 168
5.8 Lünler ve Üçgen 170
5.9 Her Zaman Varolan Eşkenar Üçgen 172
5.10 Napolyon Teoremi 178
5.11 Altın Dikdörtgen 182
5.12 Kağıt Katlama ile Oluşturulan Altın Oran 186
5.13 Düzgün Beşgen, O Kadar da Değil 189
5.14 Pappus Değişmezi 191
5.15 Pascal Değişmezi 192
5.16 Brianchon'un Pascal'ın Fikrini Dahiyane Bir Şekilde Genişletmesi 194
5.17 Pisagor Teoremi'nin Basit Bir İspatı 197
5.18 Pisagor Teoremini Katlamak 198
5.19 Başkan James A. Garfield'ın Matematiğe Katkıları 200
5.20 Bir Dairenin Alanı Nedir? 202
5.21 İki Üçgenin Eşsiz Bir Yerleşimi 204
5.22 Eşkenar Üçgende Bir Değişmez Uzaklık Noktası 205
5.23 Dokuz Nokta Çemberi 208
5.24 Simson Değişmezi 212
5.25 Ceva'nın Oldukça Yararlı Bağıntısı 214
5.26 Aşikar Bir Tek Noktada Kesişme? 218
5.27 Euler'in Çokyüzlüleri 219

Bölüm 6 Matematiksel Paradokslar **223**

6.1 Tüm Sayılar Eşit midir? 224
6.2 Negatif Olan Her Zaman Pozitif Olan Eşit Değildir 224
6.3 Sıfır İle Bölmeniz Yasaktır 225
6.4 Tüm Üçgenler İkizkenardır 226

6.5 Bir Sonsuz Seri Hatası 231
6.6 Aldatıcı Kenar Süsü 232
6.7 Şaşırtıcı Paradokslar 234
6.8 Bir Trigonometrik Yanlışlık 235
6.9 Anlayışlı Limitler 235

Bölüm 7 Hesaplama ve Olasılık 239

7.1 On Üçüncü Cuma 239
7.2 Hesaplamadan Önce İyi Düşün 240
7.3 Değersiz Bir Artış 242
7.4 Aynı Doğum Günleri 243
7.5 Takvim Gariplikleri 246
7.6 Monty Hall Problemi ("Let's Make a Deal") 247
7.7 Yazı ve Tura Beklentisi 250

Bölüm 8 Matematiksel Potpuri 253

8.1 Matematikte Mükemmellik 253
8.2 Güzel Sihirli Kare 256
8.3 Çözülememiş Problemler 260
8.4 Beklenmedik Sonuç 263
8.5 Doğadaki Matematik 266
8.6 Saatin Kolları 271
8.7 Dünyada Neredesiniz? 275
8.8 Köprüleri Geçmek 277
8.9 En Çok Yanlış Anlaşılan Ortalama 281
8.10 Pascal Üçgeni 284
8.11 Her şey Göreli 288
8.12 Genellemeler İspat Gerektirir 289

Sonsöz 291

Sözlük 297

Teşekkür

Matematikte birçok değişik kaynaktan "hoş" fikirler seçilebilir. Bazı fikirler hafıza bankamızda kök salarken bazıları da zaman içinde kaybolur. Bu kitap için eğlendirici araç ararken hafızamın en derin bölgelerini dahi kazdım. Muhtemelen bu kitapta kullandığım fikirleri edindiğim, yüzlerce kitabı kaynak olarak göstermem mümkün değildir. Ayrıca geçen on yıllar boyunca birçok iyi meslektaşımdan ve öğrenciden almış olabileceğim, bu kitapta yer alan fikirler dolayısıyla onlara uygun bir şekilde teşekkür etmem de mümkün değildir. Ne var ki, Berlin'deki Humboldt Üniversitesi'nden DR. Ingmar Lehmann'a bazı geliştirilmiş fikirlerini cömertçe sunmasından ötürü teşekkür etmek isterim. Ayrıca kitabın taslağını tashih etmelerinden ötürü Jacob Cohen, David Linker ve Amir Dagan'a ve bazı teknik desteklerinden ötürü Jan Siwanowicz teşekkür ederim. Bununla beraber Peggy Deemer'a taslağın son düzeltmesindeki özenli çalışması için teşekkür ederim. Bir çok dikkat çekici fikri ararken ve bunları en anlaşılabilir hale sokmaya çalışırken, Barbara Lowin'e bir örnek okuyucu olarak yaptığı yardımlardan ötürü tabii ki teşekkür ediyorum.

Alfred S. Posamentier
18 Ekim 2002

Giriş

Bu kitap, *New'york Times*'da yayınlanan, insanlara matematiğin kullanışlılığından ziyade (ki genellikle bir çok durumda gençleri konuya motive etmek için bu kullanılır,) güzelliği ile insanları büyülemek isteği sonucunda yazdığım (2 Ocak 2002) makaleye gelen olağanüstü tepkilerden ilham almıştır. Okuyucuya bunun bir palindromik sayı olduğunu belirterek onun dikkatini çektiğim 2002 yılının sayısını kullandım ve sonra palindromık sayıların bazı eğlendirici özelliklerini ortaya koydum. Okuyucuya bu 2002 sayısının çarpımlarını aldırtmak suretiyle konuyu daha da ileri götürebilirdim; böylelikle de sayı sistemimizin bazı güzel (veya acayip) ilişkilerini ortaya çıkarttırabildim. Örneğin, 2002'nin bazı seçilmiş çarpımlarına bakalım.

2002	çarpı	4	eşittir	8.008
2002	çarpı	37	eşittir	74.074
2002	çarpı	98	eşittir	196.196
2002	çarpı	123	eşittir	246.246
2002	çarpı	444	eşittir	888.888
2002	çarpı	555	eşittir	1.111.110

Bu makalenin yayınlanmasından itibaren bu fikri destekleyen, insanların görebileceği, matematiğin güzelliğini takdir edebileceği materyalleri ve yolları soran beş yüzden fazla elektronik posta ve mektup aldım. Umarım matematiğin güzelliğini gösteren yollara karşı yoğun isteği bu kitapla giderebilmeği başarırım.

Sosyal bir ortamda biriyle karşılaştığımda ve karşımdaki

ilgi alanımın matematik olduğunu öğrendiğinde, gururlu bir ifade ile söylenen: "Matematikte çok kötüydüm" cümlesi ile karşı karşıya kalıyordum. Müfredattaki başka hiçbir alanda bir yetişkin başarısızlığından dolayı bu kadar övünmez. Matematikte başarısız olmuş olmak bir onursuzluk işaretidir. Peki bu niye böyledir? Ve neden bu kadar çok insan matematikte bu kadar zayıftır? Bu yönelimi değiştirmek için ne yapılabilir? Bu sorunun cevabını verebilecek biri olsaydı, bu ulusun eğitim yıldızı olurdu. Bizler sadece sorunun nereden kaynaklandığına dair varsayımlarda bulunabilir ve bu bakış açısından bu sorunu çözmeği umabiliriz. Bu problemin kökeninde bana göre matematiğe karşı geçmişten gelen sevgisizliktir. Peki matematik neden bu kadar sevilmez? Matematiği kullananlar için bir sorun yoktur, fakat kullanmayanlar için bu çalışma sahası onlara zorluk çıkarabilir. Sonuç olarak, matematiğin doğasından getirdiği güzelliği ortaya koymalıyız ki, böylelikle günlük alanda matematiğe ihtiyaç duymayanlar bile matematiği kullanışlılığından değil güzelliğinden dolayı takdir etmeye yönlenebilsinler. İşte bu, kitabın amacı; bir çok değişik alandan, çok sayıda örnek göstererek matematiğin güzelliğine delil oluşturacak yeterli kanıtı sunmak, bu örnekleri çekici ve etkin kılabilmek için ilk okuyuşta anlaşılabilecek kolaylıkta olmalarını sağlamaktadır.

Matematiğin bu derece sevilmemesine neden olan toplumsal eksiklik nedir? En başlardan beri matematiğin, ilerlemek istediğimiz hemen her alan için büyük önem arz ettiği bizlere söylenirdi. Ne zaman ki bir çocuk okulda matematikte iyi olmak için teşvik edilse, buna hep şu cümle eşlik ettirilir: "Eğer ..... olmak istiyorsan matematiğe ihtiyaç duyarsın." Küçük bir çocuk için henüz bir kariyer hedefi sorun olmadığı ndan bu uyarı çoğunlukla hiçbir anlam taşımaz. O halde bu boş bir ifadedir. Bazen bir çocuğa matematikte iyi olması söylenir ya da ....." Bu da sadece cezadan kurtulmasını sağlayacak kadar çalışan bir çocuk için de sürekli bir etki taşımaz. Matematiğe sadece ailesi daha fazla zorluk çıkarmasın diye

özen gösterir.

Halk arasında matematikteki bu popülerlik noksanlığını ortaya çıkarmak için, diğer dallarda olduğu kadar matematikte başarı gösteremeyen çocukların ebeveynlerine danışıldığında, onların da aynı durumda oldukları anlaşılmıştır. Bu negatif modelin de küçüklerde matematiğe karşı çok zararlı etkileri olabilir.

Okul yönetimi için ise, matematikteki başarı okulun başarısı veya başarısızlığının bir göstergesidir. Okulları ulusal standartlarla veya komşu okulun durumu ile karşılaştırıldığında iyi bir performans sergilemişse, o zaman rahat bir nefes alabilirler. Diğer yandan, okulun durumu bu karşılaştırmalar sonucunda pek iyi değilse bunu düzeltmek için büyük bir baskı oluşur. Genellikle bu okullar öğretmenlere suçu atarlar. Çoğunlukla okuldaki matematik öğretmenleri hızlıca hazırlanmış hizmet içi programla karşı karşıya getirilir. Bu programlar belirli öğretmenlere uygulandığından, öğrencinin performansında çok fazla bir düzelme beklenemez. Okul çevresi sıklıkla müfredatta (ders kitabında) suç bulur ve büyük bir değişim olacağı umuduyla eski olan değiştirilir. Bu oldukça tehlikeli olabilir, çünkü müfredattaki ani değişim öğretmenin bu yeni materyale yeterli hazırlanamamasına ve dolayısıyla daha büyük zorlukların oluşmasına neden olabilir. Hizmet içi eğitim programı öğretmenin performansını düzeltecek "sihirli bir formül" ortaya koyuyorsa, biraz şüpheci olmakta fayda vardır. Öğretmenleri daha etkin hale getirmek uzun döneme yayılmış oldukça yoğun bir çabayı gerektirir. Bir çok nedenden ötürü, bu olağanüstü derecede zor bir görevdir. İlk olarak, zayıflığın nereden kaynaklandığını bulmak gerekir. Bu, içerikteki genel bir zayıflık mıdır? Öğretmenlerin pedagojik yeteneklerinde mi eksiklik vardır? Ya da öğretmenler basitçe motivasyon eksiliği mi çekmektedirler? Veya sorun bütün bu faktörlerin bir kombinasyonu mudur? Sorun ne olursa olsun, bu her bir matematik öğretmeni tarafından paylaşılan bir sorun değildir. O halde bu hizmet içi eğitim prog-

ramlarının, öğretmenlerin hemen her zayıflığıyla başa çıkabilecek şekilde yapılandırılması gerekliliğini ortaya koyar. Olsa bile bireysel düzlemdeki hizmet içi eğitimler, organizasyon kaynaklı ve maddi kaygılar yüzünden çok nadirdir. Matematik öğretimini daha başarılı kılmak için matematik öğretmenlerinin performanslarını iyileştirmeye çalışmak sorunun sadece bir kısmını çözülebilir.

Uluslararası kıyaslanan alanlarda ülkemiz oldukça alt sıralardadır. Bu yüzden politikacılar da matematiksel performanstaki bu düşüşün nedenleriyle uğraşmaya başlamışlardır. "Eğitim bakanı", "eğitim başkanı" veya "eğitim valisi" gibi isimler adı altında eğitimsel zayıflıkları gidermek için fonlar bulmaya çalışmaktadırlar. Bu fonların büyük çoğunluğu önceden de bahsetmiş olduğumuz hizmet içi eğitim programlarını karşılamakta kullanılırlar. Etkinlikleri, yukarıda da tartışmış olduğumuz nedenlerden ötürü sorgulamaya açıktır.

O halde okuldaki çocukların matematik derslerinde gelişim göstermesini sağlamak için elimizden başka ne gelir? Halkın matematiği sadece bu olmaksızın bir çok alanda çalışmanın mümkün olamayacağı kullanışlı bir alan olarak (ki bu doğru bir ifade olsa bile) değil, güzel (eğlenceli) bir alan olarak kucaklaması gerekir. Öncelikle işe birer yetişkin olarak matematiğe dair yargılarında belirli kararlara varmış ebeveynlerden başlamalıyız. Her ne kadar matematiğe karşı negatif bir bakış açısına sahip yetişkinleri bu fikirlerinden caydırmak zor olsa da, bu kitabın açık amacı budur. Tek sorun bu hedefe nasıl ulaşılacağıdır.

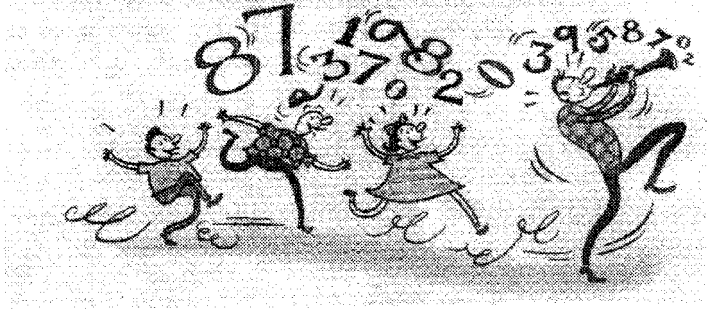
Matematik ile özel olarak ilgilenmeyen veya bu konudan korkup kaçan birine, konular anlaşılması kolay şekillerle anlatılmalıdır. Çok fazla açıklama gerektirmeyen bir bakışta anlaşılabilecek türden örneklerle konu ortaya konulmalıdır. Hatta örneklerin büyük çoğunluğunun görsel olması oldukça yararlıdır. Konu ilerledikçe yaratıcı olabilirler –veya olamazlar. Matematiğin doğasına has gerçekten özel olan "vay" cevabının verdiği duyguyu hissetmelidirler. Bu, özellik kendini

bir çok değişik şekilde ortaya koyar. Bu, çok basit bir problemde matematiksel çıkarımın beklenilmeyecek derecede basit (veya zarif) bir sonuca götürdüğünde olabilir. Sizi bu hayret duygusu içine, sayıların doğasının bir gösterimi alabilir. Belki de sezgisel olarak size inanılmaz görünen bir geometrik ilişkidir. Olasılık da bu tip duyguları uyandırabilecek görüngülere sahiptir. Gösterim ne olursa olsun, sonuç en etkin ve hızlı şekilde anlaşılmalıdır. Yeterli derecede bu tip gösterim sonucunda, okuyucu matematiğe karşı pozitif bir tutum almaya başlar.

Tam bu duygu değişiminin olduğu zamanlarda yetişkin okuyucu şu soruyu sormaya başlar "Neden okuldayken bu tip şeyler bizlere öğretilmedi?" Ne bu soruyu cevaplayabiliriz, ne de geçmişi geri getirebiliriz. Ne var ki yetişkinleri matematik için birer iyi niyet temsilcisi haline getirebilir ve daha bilgili kılabiliriz. Böylelikle matematiğin büyüsünü diğer insanlara –özellikle gençlere– aktarabilirler. Bu şekilde de belki matematiğin büyüsünü, matematiğe karşı oluşmuş sosyal önyargıları yok edip, matematiğin sevilmesini ve takdir edilmesini sağlayabiliriz. Ancak böylelikle matematiğin güzelliğinin takdirine ek olarak matematiksel başarıda anlamlı bir değişim elde etmiş oluruz.

İlerideki makale ilk olarak *New York Times*'da 2 Ocak 2002 tarihinde yayınlanmıştır.

Efendim, ben 2002'yim –sayısal olarak güzel bir yıl



David Goldin*

Şu an, 2002 yılında, geçen bin yıldan beri hayat boyu iki pallindromik yılı tecrübe eden son nesiliz. Palindromlar, matematikte iki yönden de aynı okunan sayılardır; örneğin 2002 ve 1991 gibi. İngilizce dilinde oldukça meşhur palindromik kelimeler "rotator" ve "reviver" gibi ve ayrıca cümleler vardır "Madam, I 'm Adam" gibi.

Palindromik sayılar sadece görüntüleri itibari ile hoş olmakla kalmazlar , ayrıca bazı ilginç, meraklandırıcı özelliği de üzerlerinde barındırırlar. Örneğin, bir sayı alın tersten yazın ve bu iki sayıyı toplayın ortaya yine bir palindromik sayı çıkar. Eğer çıkmazsa, aynı işlemi tekrar edin bir yerde bir palindromik sayıya rastlarsınız. Bu şaşırtıcı keşif matematikle ilgilenmeyen öğrencilerin bile dikkatini çeker.

Öğretmenler öğrencilerinmatematiğe ilgisini arttırmak için onun güzelliğini ve özellikle bazı sayıların büyüsünü vurgulamalıdır. Fakat donanımlı matematik öğretmeleri kısıtlı sayıda mevcut ve bugün matematik öğretimi kuru ve sıkıcı. Bu problem yeni değil. İlkokulda öğrencilerin matematiğin doğası ve kendi kabiliyetleri hakkında ilk izlenimlerini oluşturdukları zamanda, matematik öğretimi tarih boyunca sıradandı. Güçlü bir başlangıç olmadan,

(*) David Goldin, davidgoldin@interport.net.

bu konuya öğrencinin ilgi duyması şansı oldukça düşüktür. Sorun göreceli olarak, orta okulda öğretimin de zayıf olması sayesinde ortaya çıkıyor.

Alternatif sertifika programları yoluyla, orta okul matematik öğretmeni sayısını artırmak amacıyla bir çok hızlı düzenleme programları ülke çapında yayıldı. New York' ta bu tür bir program katılımcıları oldukça etkindiler, fakat buna karşın bir çoğu bir öğretmenin sınıfta saptanmış planlara uymasından daha fazlasını yapmasına olanak sağlayacak derin matematiksel anlayışın eksiliği içindedirler. Matematiksel anlamda en üst seviyede etkin bir öğretmen de öğrencinin matematiği takdir etmesini veya ona ilgi duymasını sağlayacak kadar yetenekli olmayabilir.

Matematiksel eğitim almış öğrencilerin sayısındaki eksiklerle daha da kötüleşen, matematik öğretmeni sayısında ulusal bir açık olduğu zamanlarda, hızlı çözümlerin daha da ilerisine bakmalıyız. İlkokul öğretmenleri için daha yaratıcı ve daha iyi eğitim programları kurmalıyız. Onlara bu konu ile ilgili daha çok ders saati ayırmalıyız. Ve öğrenciler matematik dersini takip etmeye başladıklarında, öğretmenlik mesleğini, parasal açıdan olduğu kadar, öğretmene nasıl öğretmenlik yapacağına dair daha fazla yetki vererek cazip hale getirmeliyiz.

Amaç, matematiği özünde çocuklar için ilginç kılmaktır. Her ne kadar doğru olsa da diğer alanlarda kullanışlılığına dikkat çekerek matematiği pazarlayamayız. Matematiğe karşı duyulan sevgi onun kullanışlı bir araç olduğu söylenerek sağlanmaz. Ancak iyi bir öğretmenin nasıl matematiksel prensiplerin ve sayıların nasıl çalıştığına dair öğrencinin merakını uyandırması ile büyür. Matematikte başarısız olduklarını hiç utanmadan dile getiren yetişkinlerin yüzdesi, konunun ne derece zararlı olduğuna ve sayıların büyüsü hakkında okullarda ne kadar az bilgilendirildiğimize dikkat çekiyor. ■

Önsöz

Bertrand Russell bir keresinde, "matematik sadece doğruluğa değil, yüksek bir güzelliğe de sahiptir; öyle bir güzellik ki, bir heykelin sahip olabileceği ulvi derecede soğuk ve ağırbaşlı, sadece en büyük sanatın sergileyebileceği derecede saf ve kati mükemmelliğe sahip" diye yazmıştır.

Bu, Alfred Whitehead ile beraber katiyen bir sanat eseri olarak sayılmayacağı gibi az çok ulvi derecede güzel de sayılmayan büyük Principia Mathematica'nın yazarı ile aynı Russell olabilir mi? Peki neye inanacağız?

İlk olarak birkaç yıl önce okuduğum Russel'ın ifadesine tamamen katıldığımı belirterek başlamak isterim. Ne var ki bu sonuca, yıllar önce on veya on iki yaşlarında Platonik katı cisimlerin (bunlar çokyüzlü denilen tüm yüzeyleri, köşeleri ve açıları eş olan üç boyutlu şekillerdir –bunun gibi beş tane vardır) varlığını ilk öğrendiğimde varmıştım. Eğlendirici matematik üzerine, içinde sırf bu beş çokyüzlünün resimlerini değil, ayrıca yapımını olası kılacak şekillerini de barındıran bir kitap okumuştum. Bu resimler bende çok derin bir etki bıraktılar. Artık bu beşinin de kağıt modellerini yapmadan rahat edemezdim. Bu benim matematiğe girişimdi. Gerçekten platonik çokyüzlüler ulvi bir güzelliktedirler (Russell'ın dediği gibi) ve aynı zamanda ortaya koydukları simetrilerin, hem geometrik hem de cebirsel sonuçlarıyla beraber matematikte de önemli etkileri olmuştur. Bir bakıma geometri ile cebiri birbirine bağlayan bağlantı olarak değerlendirilebilirler. Yetmiş yıl önce bu ilişkinin önemini tam olarak anladığımı iddia edemememe rağmen, bu ilk karşılaşmanın matematikle olan yetmiş yıllık aşkımı teşvik ettiğini söylememin uygun

olduğuna inanıyorum.

Bir diğer karşılaşmamızın zamanın sisi ile kaplanmış olsa da eğrilerle ilgili olduğunu netlikle hatırlıyorum. Kitabımın bir bölümünde rastladığım basit bir eğrinin (muhtemelen kardioid veya sisoid) matematiksel tanımı ve şekli tarafından büyülenmiştim. Öyle ki, iki aylık yaz tatilinde ansiklopedide bulabildiğimce çok eğriyi derin bir şekilde keşfedene kadar rahat edemezdim. Sonsuz çeşitlilikte şekle ve anlatılmaz güzellikte cebirsel özelliklere sahip olduklarını öğrendim.

Bu unutulmaz yazın başlarında hemen her makalenin girişinde belirtilen bir eğrinin denkleminin ne anlama geldiğini muhtemelen anlayamamıştım. Ne var ki, iki ay boyunca günde dört beş saat harcanırsa sonunda bir eğri ile onun denklemi, geometri ile cebir arasındaki, derin bir güzellikteki, ilişki ile ilgili bir anlayış elde edilir. Bu yolla analitik geometriyi hiç zorlanmadan ve çaba harcamadan, aslında her bir eğri –hepsi çok güzel ve derin– gizli hazinelerini ortaya çıkardıkça daha bir zevkle öğrendim. Bu yazın, hiç unutamayacağım bir yaz olduğuna dair hâlâ bir şüpheniz var mı?

Bu konuları niye anlattım? Çünkü, sizi çok dikkatli bir şekilde matematiğe yönlendirecek çok hoş bir kitabı okumak üzeresiniz. Kimin neyi ilginç bulacağını kestirmek gerçekten imkansızdır. Bana göre simetrik yapılı katı cisimler ve eğrilerdi; sizin için belki tamamen farklı bir konudur. Yine de, çok çeşitli başlık ve konuları ile bu kitapta herkes için bir şeyler var. Dr. Alfred S. Posamentier ile birçok ortak projede çalıştık ve onun matematiğin güzelliklerini hiç karşılaşmamış olanlara gösterme isteğini gayet iyi biliyorum. O bunu, oldukça hayranlık uyandıracak bir şevkle yapar. Bu durum, bu kitapta hepsi oldukça büyüleyici ve onun açık, anlaşılır temsilleri ile tanımlanan konu başlıklarından başlayarak oldukça net bir şekilde görülüyor.

Böylelikle bu kitapta –bu kitabın temel amacı– matematiğin güzelliğine dair duygularınızı uyandırabilecek, anlaşılabilir bir biçimde sunulmuş tüm materyallere sahip oluyorsunuz.

Bütün matematikçilerin dileği matematiğin bu güzel lokmalarını diğer insanlarla da paylaşabilmektir. Ben bu erken matematik sevgimi labratuvara taşıdım ve bu bana birçok bilim adamının sahip olmadığı bakış açısı sağladı. Matematiksel yapılara duyduğum bu sevgi, on yıllarca kimya çevresini meşgul etmiş problemleri çözmemi sağladı. 1985'te Nobel Kimya Ödülü ile çalışmalarımın ödüllendirilmesiyle ile şaşırtıcı bir biçimde onurlandırıldım. Sonradan Nobel Ödülünü kazanan ilk matematikçi olduğumu öğrendim. Tüm bunlar matematiğin güzelliğini erken yaşlarda öğrenmiş olmamın bir sonucudur. Belki bu kitap size matematiğin eşsiz güzelliğini sergilediği yeni yollar açar. Bu kitabın türlü yollarla nasıl yeni fikirler veya fırsatlar sunabileceği sizi şaşırtabilir.

Dr. Herbert A. Hauptman
2002 Temmuz
Nobel Ödülü 1985
CEO ve Başkan
Hauptman-Woodward Medical Research Institute
Buffalo, New York

1

Sayılardaki Güzellik

Bir gazetenin ekonomi ve spor sayfalarında tablo ya da grafikler üzerinde sayılar görmeye alışkınızdır. İster bir niceliği temsil etmek için olsun, isterse de bir sokağı, adresi ya da bir sayfayı numaralandırmak için olsun sayıları, günlük yaşamımızda sürekli olarak kullanırız. Sayıları, onların bazı sıra dışı özelliklerini gözlemlemeye hiç vakit ayırmadan kullanırız. Yani, bir bahçenin içinde yürürken çiçekleri koklamak için durmayız ya da daha genel bir ifadeyle "hayatın tadına varmayız." Sayıların bu sıra dışı özelliklerinin bazılarını incelemek bize, genelde hepimizin sorgusuz sualsiz kabul ettiği bu semboller hakkında çok daha geniş bir kavrayış sağlar.

Temelde iki tür sayı özellikleri vardır; onluk sayı sisteminin "acayiplikleri" ve herhangi bir sayı sisteminde geçerli olanlar. Doğal olarak sondaki bize matematik hakkında daha iyi bir kavrayış sunarken, baştaki yalnızca, bir onluk sayı sistemi kullanmanın keyfi doğasına işaret eder. Günümüzde bilgisayarların temelleri ikilik bir sisteme(*) dayanırken, neden onluk bir sistem kullandığımız sorulabilir. Cevap açıkça tarihseldir; hiç şüphe yok ki, parmaklarımızın sayısıyla ilintilidir.

Bakıldığında iki tür gariplik görünüşlerinde değil, sadece kanıtlanmalarında farklılık gösterir. Bu kitap matematikçiler

(*) Onluk sistem sayılara, o sayının basamaklarına (sağdan sola doğru) 10'un kuvvetlerini atayarak bir değer verir: 1, 10, 100, 1,000, 10'un kuvvetleri olarak 100, 101, 102 ve 103 olarak yazılır; ikilik sistem ise sayılara, o sayının basamaklarına (sağdan sola doğru) 2'nin ardışık kuvvetlerini atayarak bir değer verir ve kullanılan semboller 0 ve 1'dir. İkilik sistemdeki 11010 sayısının değeri $1(2^4) + 1(2^3) + 0(2^2) + 1(2^1) + 0(2^0) = 26$'dır.

için yazılmadığından (ne var ki onlar da burada kendileri için bir şeyler bulabilirler), kanıtlamalar ve açıklamalar genel okuyucu için basit ve anlaşılabilir tutulmuştur. Bu bağlamda, bazı durumlarda açıklamalar okuyucuyu, görüngüyü daha derin olarak araştırılmaya ya da incelenmeye teşvik edebilir. Ortaya konulan özellik niçin var sorusunu sormaya başladığınız an, işin içine girmişsiniz demektir! Birinci bölümün amacı da budur; sizi sonuçlarla hayrete düşürmek ve onları sorgulamanızı sağlamak. Açıklamalar sizi bazı sorularla baş başa bırakabilirse de, kendi bireysel araştırmalarınızı yapmanız sizin çok yararınıza olacaktır. Bu, var olan matematiği gerçekten kavramaya başladığınız zamandır. Gerçek öğrenme bu "kişisel" araştırmalar süreci içinde meydana gelir. Kendinizi bundan alıkoymayın; bilakis yüreklendirin!

Her şeyden öte, sayısal ilişkilerin güzelliğine dikkat ediniz. Daha fazla konuşmadan sayıların ve sayısal ilişkilerin dünyasındaki harikalara doğru yönelelim.

1.1 Şaşırtıcı Sayı Modelleri 1

Belki de, matematiğin güzelliğini kavramaya başlamanın en kolay yollarından birisi, içinde barındırdığı büyüleyici ilişkilerin bazılarını incelemektir. Aşağıdaki aritmetik simetriler, daha fazla açıklamaya gerek bırakmıyorlar. Zaman zaman matematiğin çekiciliği, onun sayı sisteminin şaşırtıcı doğasında yatar. Bakın ve tadını çıkarın!(*)

$$
\begin{aligned}
1 \cdot 1 &= 1 \\
11 \cdot 11 &= 121 \\
111 \cdot 111 &= 12.321 \\
1.111 \cdot 1.111 &= 1.234.321 \\
11.111 \cdot 11.111 &= 123.454.321
\end{aligned}
$$

(*) Burada (•) simgesini çarpım işlemini temsil etmesi için kullanıyoruz; çünkü bu sembol yaygın şekilde bu işlemi göstermek için kullanılmaktadır.

$$
\begin{aligned}
111.111 \cdot 111.111 &= 12.345.654.321 \\
1.111.111 \cdot 1.111.111 &= 1.234.567.654.321 \\
11.111.111 \cdot 11.111.111 &= 123.456.787.654.321 \\
111.111.111 \cdot 111.111.111 &= 12.345.678.987.654.321
\end{aligned}
$$

Dikkat ediniz; tüm sonuçlar palindromdurlar. Şimdi başka bir sevimli modele bakalım.

$$
\begin{aligned}
1 \cdot 8 + 1 &= 9 \\
12 \cdot 8 + 2 &= 98 \\
123 \cdot 8 + 3 &= 987 \\
1.234 \cdot 8 + 4 &= 9.876 \\
12.345 \cdot 8 + 5 &= 98.765 \\
123.456 \cdot 8 + 6 &= 987.654 \\
1.234.567 \cdot 8 + 7 &= 9.876.543 \\
12.345.678 \cdot 8 + 8 &= 98.765.432 \\
123.456.789 \cdot 8 + 9 &= 987.654.321
\end{aligned}
$$

Bazen güzellik biraz kamufle edilmiş bir halde bulunur. 76.923 ile üretilen sayıların farklı bir başlangıç noktasına sahip ama aynı sırada olduğuna dikkat ediniz (aşağıda). Bir birini takip eden her satırda, bir sonucun ilk rakamı sona gider ve bir sonraki sonucu oluşturur. Diğer taraftan rakamların sırası değişmeden kalır.

$$
\begin{aligned}
76.923 \cdot 1 &= 076.923 \\
76.923 \cdot 10 &= 769.230 \\
76.923 \cdot 9 &= 692.307 \\
76.923 \cdot 12 &= 923.076 \\
76.923 \cdot 3 &= 230.769 \\
76.923 \cdot 4 &= 307.692
\end{aligned}
$$

Aşağıdaki çarpmalarda, 76.923 ile elde edilen sayılar yukarıdakilerden farklıdır. Sonuçlardaki sayılar aynı sıraya sahiptir; fakat başlangıç noktaları farklıdır. Yine, bir sonucun ilk raka-

mı sona giderek başka bir sonucu oluşturur. Diğer taraftan rakamların sırası değişmeden kalır.

$$
\begin{aligned}
76.923 \cdot 2 &= 153.846 \\
76.923 \cdot 7 &= 538.461 \\
76.923 \cdot 5 &= 384.615 \\
76.923 \cdot 11 &= 846.153 \\
76.923 \cdot 6 &= 461.538 \\
76.923 \cdot 8 &= 615.384
\end{aligned}
$$

Bir başka ilginç sayı 142.857'dir. 2'den 8'e kadar sayılarla çarpıldığında ortaya çıkan sonuçlar şaşırtıcıdır. Aşağıdaki çarpımlara bakın ve ilginçliği tanımlayın.

$$
\begin{aligned}
142.857 \cdot 2 &= 285.714 \\
142.857 \cdot 3 &= 428.517 \\
142.857 \cdot 4 &= 571.428 \\
142.857 \cdot 5 &= 714.285 \\
142.857 \cdot 6 &= 857.142
\end{aligned}
$$

Çarpımlardaki simetriyi görebiliyorsunuz; ama ayrıca, çarpımda görülen rakamların ilk çarpanda da kullanıldığına dikkat ediniz. Ayrıca rakamların sırasını da göz önünde bulundurun. Başlangıç noktaları hariç aynı sıradadırlar. Bunlar, kullandığımız sayı sisteminin nefis tuhaflıklarından yalnızca bazılarıdır. 142.857 ile çarpma işlemlerimize devam edersek daha başka garip sonuçlar da alırız. Şu çarpıma bakın, $142.857 \cdot 7 = 999,999$. Şimdi bu nereden geldi?

İşler şu çarpımla daha da gizemli bir hal alır: $142.857 \cdot 8 = 1.142.856$. Eğer milyonlar basamağının rakamını alıp bunu birler basamağının rakamına eklersek ortaya bizim orijinal sayımız çıkar (yani, $142.856 + 1 = 142.857$).

Bunlar tuhaf sonuçlar üreten yalnızca birkaç sayıdır. Yine de ilgi çekici bir yoldan matematikteki güzelliği akla getirirler.

1.2 Şaşırtıcı Sayı Modelleri 2

İşte yine, bizim sayı sistemimizin doğasına dayalı matematiksel tuhaflıklara örnekler; matematiğin gizli harikalara sahip olduğuna bir kanıt daha. Ve yine buradaki büyüleyiciliği ortaya koymak için fazla söze gerek yok; çünkü bu ilk bakışta belli oluyor. Sadece bakın, tadını çıkarın ve bu inanılmaz özellikleri arkadaşlarınızla paylaşın. Diğerleri biraz yüreklendirilmeye ihtiyaç duyabilir! Modelleri kavramalarını sağlayın ve mümkünse bunlar için bir "açıklama" bulmalarını isteyin.

12.345.679 • 9 = 111.111.111
12.345.679 • 18 = 222.222.222
12.345.679 • 27 = 333.333.333
12.345.679 • 36 = 444.444.444
12.345.679 • 45 = 555.555.555
12.345.679 • 54 = 666.666.666
12.345.679 • 63 = 777.777.777
12.345.679 • 72 = 888.888.888
12.345.679 • 81 = 999.999.999

Aşağıdaki model tablosunda, çarpımların ilk ve son rakamlarının 9'un katlarına tekabül ettiğine dikkat ediniz.

987.654.321 • 9 = 08 888 888 889
987.654.321 • 18 = 17 777 777 778
987.654.321 • 27 = 26 666 666 667
987.654.321 • 36 = 35 555 555 556
987.654.321 • 45 = 44 444 444 445
987.654.321 • 54 = 53 333 333 334
987.654.321 • 63 = 62 222 222 223
987.654.321 • 72 = 71 111 111 112
987.654.321 • 81 = 80 000 000 001

Sayı modelleri size matematikteki güzellikle ilgili bir başka kanıt daha sunmaktadır.

1.3 Şaşırtıcı Sayı Modelleri 3

Yine sayı modelinin büyüleyiciliği ortaya koymak için fazla söze gerek yok; çünkü bu ilk bakışta fark ediyor. Bunlardan bazıları biraz kafanızı karıştırabilir. Fakat unutmayın: matematiğin, daha önce belki de karşınıza çıkmamış bir yönünü kavramak için daha yeni havaya girmeye başladık. Bunları inceleyin ve tadını çıkarın.

$$0 \cdot 9 + 1 = 1$$
$$1 \cdot 9 + 2 = 11$$
$$12 \cdot 9 + 3 = 111$$
$$123 \cdot 9 + 4 = 1.111$$
$$1.234 \cdot 9 + 5 = 11.111$$
$$12.345 \cdot 9 + 6 = 111.111$$
$$123.456 \cdot 9 + 7 = 1.111.111$$
$$1.234.567 \cdot 9 + 8 = 11.111.111$$
$$12.345.678 \cdot 9 + 9 = 111.111.111$$

Benzer bir süreç başka bir ilginç model oluşturur.

$$0 \cdot 9 + 8 = 8$$
$$9 \cdot 9 + 7 = 88$$
$$98 \cdot 9 + 6 = 888$$
$$987 \cdot 9 + 5 = 8.888$$
$$9.876 \cdot 9 + 4 = 88.888$$
$$98.765 \cdot 9 + 3 = 888.888$$
$$987.654 \cdot 9 + 2 = 8.888.888$$
$$9.876.543 \cdot 9 + 1 = 88.888.888$$
$$98.765.543 \cdot 9 + 0 = 888.888.888$$

Şimdi bu gizemli çarpımların vereceği modeli incelemek mantıklı olacak.

1 • 8	=	8
11 • 88	=	968
111 • 888	=	98.568
1.111 • 8,888	=	9.874.568
11,111 • 88.888	=	987.634.568
111,111 • 888.888	=	98.765.234.568
1,111,111 • 8.888.888	=	9.876.541.234.568
11,111,111 • 88.888.888	=	987.654.301.234.568
111,111,111 • 888.888.888	=	98. 765.431.901.234.568
1,111,111,111 • 8.888.888.888	=	9.876.543.207.901.234.568

Peki bu modeli nasıl açıklayabilirsiniz?

1.4 Şaşırtıcı Sayı Modelleri 4

Ve yine sözler aşağıdaki sayı modellerinin uyandırdığı etkiyi anlatmakta yetersiz kalacak. Ne var ki bu sefer, çoğu şeyin 7, 11 ve 13'ün çarpımı olan 1.001 sayısına bağlı olduğunu fark edeceksiniz. Ayrıca, eğer 1.001'i üç basamaklı bir sayı ile çarparsak sonuç hoş bir şekilde simetrik olur. Örneğin, 987 • 1.001 = 987.987. Böylece, bu ilişkiyi tersine çevirirsek, üç basamaklı iki sayının tekrarlanmasından oluşan altı basamaklı bir sayının 7, 11 ve 13 ile bölünebildiği ortaya çıkar. Örneğin;

$$\frac{643.643}{7} = 91.949$$

$$\frac{643.643}{11} = 58.513$$

$$\frac{643.643}{13} = 49.511$$

Ayrıca, bu ilginç 1.001 sayısından başka bir sonuca da varabiliriz; yani, aynı rakamdan oluşan altı basamaklı bir sayı her zaman 3, 7, 11 ve 13 ile bölünebilir.

$$\frac{111.111}{3} = 37.037$$

$$\frac{111.111}{7} = 15.873$$

$$\frac{111.111}{11} = 10.101$$

$$\frac{111.111}{13} = 8.547$$

Bulunabilecek diğer başka ilişkiler için bu simetrik sayıyı belki de biraz daha fazla incelemek isteyebilirsiniz.

1.5 Şaşırtıcı Sayı Modelleri 5

İşte yine karşımızda, sayı sistemimizin garip doğasına dayalı matematiğin güzelliğine dair birkaç örnek daha. Ve yine bu modeller için söze gerek yok. Bunlar, son bölümde ifade edilmiş olan özelliğe ve 9 sayısının sıra dışı özelliğine dayanıyor.

$$999.999 \cdot 1 = 0.999.999$$
$$999.999 \cdot 2 = 1.999.998$$
$$999.999 \cdot 3 = 2.999.997$$
$$999.999 \cdot 4 = 3.999.996$$
$$999.999 \cdot 5 = 4.999.995$$
$$999.999 \cdot 6 = 5.999.994$$
$$999.999 \cdot 7 = 6.999.993$$
$$999.999 \cdot 8 = 7.999.992$$
$$999.999 \cdot 9 = 8.999.991$$
$$999.999 \cdot 10 = 9.999.990$$

Yine 9 sayısı bazı güzel tuhaflıklar sergiliyor.(*)

$$9 \cdot 9 = 81$$
$$99 \cdot 99 = 9.801$$

(*) 9 sayısının kimi özellikleri, onun, taban olan 10 sayısından 1 eksik olmasından ileri gelmektedir.

$$999 \cdot 999 = 998.001$$
$$9.999 \cdot 9.999 = 99.980.001$$
$$99.999 \cdot 99.999 = 9.999.800,001$$
$$999.999 \cdot 999.999 = 999.998.000.001$$
$$9.999.999 \cdot 9.999.999 = 99.999.980.000.001$$

9 ile bu oyunları oynarken, hiçbir rakamı tekrar etmeyen ve 9 ile çarpıldığında hiçbir rakamı tekrar etmeyen dokuz haneli bir sayı veren 8 haneli bir sayı bulmayı deneyebilirsiniz.

İşte birkaç olasılık:

$$81.274.365 \cdot 9 = 731.469.285$$
$$72.645.831 \cdot 9 = 653.812.479$$
$$58.132.764 \cdot 9 = 523.194.876$$
$$76.125.483 \cdot 9 = 685.129.347$$

1.6 Şaşırtıcı Sayı Modelleri 6

Bu hoş sayı düzenlemeleri, sağ tarafta güzelce ifade edilmiş olan belli bir simetriden faydalanır. Bunun en güzel kısmının üçgensel dizilişi olduğu görülecektir. Belki siz de sayı modellerinin matematiksel anlamda güzel olan düzenlemelerini geliştirebilirsiniz.

$$1 = 1 \qquad = 1 \cdot 1 = 1^2$$
$$1+2+1 = 2+2 \qquad = 2 \cdot 2 = 2^2$$
$$1+2+3+2+1 = 3+3+3 \qquad = 3 \cdot 3 = 3^2$$
$$1+2+3+4+3+2+1 = 4+4+4+4 \qquad = 4 \cdot 4 = 4^2$$
$$1+2+3+4+5+4+3+2+1 = 5+5+5+5+5 \qquad = 5 \cdot 5 = 5^2$$
$$1+2+3+4+5+6+5+4+3+2+1 = 6+6+6+6+6+6 \qquad = 6 \cdot 6 = 6^2$$
$$1+2+3+4+5+6+7+6+5+4+3+2+1 = 7+7+7+7+7+7+7 \qquad = 7 \cdot 7 = 7^2$$
$$1+2+3+4+5+6+7+8+7+6+5+4+3+2+1 = 8+8+8+8+8+8+8+8 \qquad = 8 \cdot 8 = 8^2$$
$$1+2+3+4+5+6+7+8+9+8+7+6+5+4+3+2+1 = 9+9+9+9+9+9+9+9+9 \qquad = 9 \cdot 9 = 9^2$$

1.7 Hayretler İçinde Bırakan Üslü İlişkiler

Sayı sistemimiz, içinde birçok sıra dışı özellik taşır. Bunları keşfetmeye çalışmak kesinlikle denemeye değer bir tecrübe yaşatacaktır insana. Kimi zaman bu ilişkilere şans eseri rastlarız; kimi zaman da –önseziye dayalı– gayretli bir arayışın ve denemelerin neticesidirler. Ünlü matematikçi Carl Friedrich Gauss (1777-1855), üstün aritmetik kabiliyetleri sayesinde (daha sonra teoremlerini kanıtlamak için ispatlayacağı) sayılarla ilgili birçok ilişki keşfetmiştir.

Şu aşağıdaki ilişkiye bir bakın ve neler olduğunu izah etmeye çalışın.

$$81 = (8+1)^2 = 9^2$$

Rakamların toplamının karesini aldık. Şimdi şu aşağıdakine bakın:

$$4.913 = (4+9+1+3)^3 = 17^3$$

Her iki durumda da sayımızın rakamlarının toplamının bir üssünü aldık ve sonuçta elimize başladığımız sayı geçti. Etkilendiniz mi? Öyle olmanız gerekir; çünkü bu gerçekten çok çarpıcıdır. Aslında bu tip ilişkiler bulmak herkesin harcı değildir.

Aşağıdaki liste size bu sıra dışı sayılarla ilgili birçok örnek sunacaktır. Tadını çıkarın!

$81 = 9^2$	$34.012.224 = 18^6$
	$8.303.765.625 = 45^6$
$512 = 8^3$	$24.794.911.296 = 54^6$
$4.913 = 17^3$	$68.719.476.736 = 64^6$
$5.832 = 18^3$	
$17.576 = 26^3$	$612.220.032 = 18^7$

19.638	$= 27^3$	10.460.353.203	$= 27^7$
		27.512.614.111	$= 31^7$
2.401	$= 7^4$	52.523.350.144	$= 34^7$
234.256	$= 22^4$	271.818.611.107	$= 43^7$
390.625	$= 25^4$	1.174.711.139.837	$= 53^7$
614.656	$= 28^4$	2.207.984.167.552	$= 58^7$
1.679.616	$= 36^4$	6.722.988.818.432	$= 68^7$
17.210.368	$= 28^5$	20.047.612.231.936	$= 46^8$
52.521.875	$= 35^5$	72.201.961.339.552	$= 54^8$
60.466.176	$= 36^5$	248.155.780.267.521	$= 63^8$
205.962.976	$= 46^5$		

20.864.448.472.975.628.947.226.005.981.267.194.447.042.584.001.$\approx 207^{20}$

Güzelliği anlatmak için söze gerek yok!

1.8 Harika Sayı İlişkileri

Kim demiş sayılar harika sayı ilişkileri oluşturamazmış diye? Bu eşi benzeri olmayan durumların bazıları size, "sayıların" ardında gözle görünenden daha fazla şey olduğuna dair bir his verebilir. Bu ilişkileri sadece doğrulamanızı değil, aynı zamanda "güzel" olarak nitelendirilebilecek diğer ilişkileri de bulmayı denemenizi tavsiye ederiz.

135 ve 175 sayılarına bakalım. İlk bakışta onların ortak bir şeye sahip olmadıklarını düşüneceksiniz. Ne var ki onlar birçok niteliği olan sayılardan ikisidir. Rakamlarının her birinin, bir öncekinin bir fazlası olacak şekilde üsleri alındığında olanlara bakınız.

Dikkat ediniz ki, ardıl üsleri alınmış sayıların toplamı orijinal sayıya eşittir.

$135 = 1^1 + 3^2 + 5^3$
$175 = 1^1 + 7^2 + 5^3$
$518 = 5^1 + 1^2 + 8^3$
$598 = 5^1 + 9^2 + 8^3$

Böyle şaşırtıcı özelliğe sahip dört haneli bir sayının olup olmadığını sormak da bu durumda gayet doğaldır. İşte bu özelliği doğrulayan birkaç örnek.

$1.306 = 1^1 + 3^2 + 0^3 + 6^4$
$1.676 = 1^1 + 6^2 + 7^3 + 6^4$
$2.427 = 2^1 + 4^2 + 2^3 + 7^4$

Eğer bu sayıların sıra dışı olduğunu düşünüyorsanız, muhtemelen bir sonraki sayıların özelliklerini görünce büyüleneceksiniz. Gerçekten inanılmazlar. Üsler ve sayılar arasındaki ilişkiye dikkat ediniz.(*)

$3.435 = 3^3 + 4^4 + 3^3 + 5^5$
$438.579.088 = 4^4 + 3^3 + 8^8 + 5^5 + 7^7 + 9^9 + 0^0 + 8^8 + 8^8$

Kim demiş matematiğin sergileyecek "güzellikleri" yok diye?

1.9 Sıra Dışı Sayı İlişkileri

Sıklıkla, nispeten kullanışsız, ama yine de garipliğinden dolayı bir güzellik öğesi taşıyan bilgilere rastlarız. İşte burada sergilediğimiz sayılar arasındaki sıra dışı ilişki de bunlardan bir tanesi. Onları pek fazla açıklamaya gerek yok. Sadece keyfini çıkarın ve diğerlerini bulmaya çalışın.

Elimizde bulunanlar sayı çiftleri; bu sayıların toplamı ve çarpımı birbirinin tersidir.

(*) İkinci örnekte, 0^0 ifadesi matematikçiler tarafından belirsiz olarak tanımlanmıştır; ne var ki kolay adına (ve örneğimizin işlemesi için) biz ona 0 değerini vereceğiz.

İki sayı		çarpımları	toplamları
9	9	81	18
3	24	72	27
2	47	94	49
2	497	994	499

Bu sıra dışı özelliği sergileyen bir başka sayı çifti bulabildiniz mi?

Elimizde bulunan önemli bir diğer ilginç ilişki de, sıra dışılığının içinde matematikte gerçek bir güzelliğinin var olabileceği hissini veriyor, bize. Bizde düşense onu bulmak zorunda olmamız.

İşte burada elimizde, sayılarla, bu sayıların rakamlarının faktöriyellerinin(*) toplamı arasındaki simetri var.

$1 = 1!$

$2 = 2!$

$145 = 1! + 4! + 5!$

$40.585 = 4! + 0! + 5! + 8! + 5!$ [$0! = 1$ olduğunu hatırlayın]

Bana öyle görünüyor ki bu tip başka ilişkiler bulunmuyor; bu nedenle önerim, diğerlerini bulmaya çalışmakla zaman kaybetmeyin.

1.10 Gizemli Eşitlikler

Sıra dışı ya da gizemli ilişkilerden bahsettiğimize göre, ardından geleceklerin, listede üst sıralarda olması gerekir. Ancak

(*) "!" faktöriyel işareti, faktöriyel işareti ile birlikte verilen sayının ve bu sayıdan küçük olan tam sayıların çarpımına eşittir. Örneğin $5! = (5)(4)(3)(2)(1) = 120$, $8! = (8)(7)(6)\ (5)(4)(3)(2)(1) = 40.320$ ve $n! = (n)(n\text{-}1)(n\text{-}2)(n\text{-}3)\ \ldots\ (3)(2)(1)$. Burada çarpma işlemi olarak parantez işaretini kullandığımıza dikkat ediniz.

böyle bir durumda, gariplik büyüleyici olabilir. Sizler muhtemelen bunların neden böyle olduğunu öğrenmek isteyecesiniz. Sayılarla ilgili bu ilişkilerin ortaya çıkmasını ne sağlamaktadır? Bu soruya verilebilecek ustalıklı cevaplar pek yoktur. Tek yapabileceğimiz olasılıkları bulmak ve sınırlamaktır. Kimi zaman sayılar yapılan açıklamalardan daha fazlasını söyler. İşte bu da böyle bir an. Şu eşitliklere bakın ve bunun tadını çıkarın; çünkü onlar gerçekten sıra dışı!

$1^1 + 6^1 + 8^1 = 15 = 2^1 + 4^1 + 9^1$
$1^2 + 6^2 + 8^2 = 101 = 2^2 + 4^2 + 9^2$

$1^1 + 5^1 + 8^1 + 12^1 = 26 = 2^1 + 3^1\ 10^1 + 11^1$
$1^2 + 5^2 + 8^2 + 12^2 = 234 = 2^2 + 3^2 + 10^2 + 11^2$
$1^3 + 5^3 + 8^3 + 12^3 = 2.366 = 2^3 + 3^3 + 10^3 + 11^3$

$1^1 + 5^1 + 8^1 + 12^1 + 18^1 + 19^1 = 63 = 2^1 + 3^1 + 9^1 + 13^1 + 16^1 + 20^1$
$1^2 + 5^2 + 8^2 + 12^2 + 18^2 + 19^2 = 919 = 2^2 + 3^2 + 9^2 + 13^2 + 16^2 + 20^2$
$1^3 + 5^3 + 8^3 + 12^3 + 18^3 + 19^3 = 15.057 = 2^3 + 3^3 + 9^3 + 13^3 + 16^3 + 20^3$
$1^4 + 5^4 + 8^4 + 12^4 + 18^4 + 19^4 + = 260.755 = 2^4 + 3^4 + 9^4 + 13^4 + 16^4 + 20^4$

Söylenebilecek fazla bir şey yok. Belki de "vay canına" en uygunu olacak. Güzellik sıra dışılıkta gizli.

1.11 Akıl Almaz Sayı 1.089

Bu başlık gerçekten dikkate değer özelliklere sahip bir sayıyla ilgilidir. İlk olarak 1.089'un nasıl olup da ansızın hiç beklenmedik bir şekilde "fırladığını" göstereceğiz ve daha sonra bu sayıya farklı bir açıdan bakacağız.

Önce size birler ve yüzler basamağı aynı olmayan üç basamaklı bir sayı seçtireceğiz ve aşağıdaki talimatlara uymanızı isteyeceğiz.

Aşağıdaki talimatları adım adım izleyin; bu sırada biz de

her talimatın altında onun söylediği şeyi yapacağız.

Üç basamaklı herhangi bir sayı seçin (birler ve yüzler basamağı aynı olmayacak).

Şimdi sizinle birlikte rastgele bir sayı seçiyoruz: 825

Seçtiğiniz sayının rakamlarının yerlerini ters çevirin.

Seçtiğimiz sayının rakamlarını ters çeviriyoruz: 528

İki sayıyı birbirinden çıkarın (doğal olarak, küçüğü büyükten çıkarırız).

Sonucu hesaplayalım: 825-528 = **297**

Bir kez daha, çıkan sayının rakamlarının yerlerini tersine çevirin.

297'nin rakamlarının yerini ters çevirirsek: **792**

Şimdi son iki sayıyı birbirleriyle toplayın.

Son iki sayıyı birbirleriyle topluyoruz: 297 + 792 = **1.089**

Bizimkinden başka bir sayıyla uygulamış olsanız bile elde ettiğiniz sonucun bizimkiyle aynı olması gerekir.(*)

Muhtemelen şaşkınlık içindesiniz; çünkü başta hangi sayıyı seçerseniz seçin bizimle aynı sonuca ulaştınız, 1.089.

Bu nasıl olur? Bu, sayımızın "acayip bir özelliği" midir? Hesaplamalarımızda bir hata mı yaptık?

Onluk sistemin tuhaflığını gösteren olan bir önceki kısımdan farklı olarak, matematiksel bir acayipliğin bu örneği işlemlere dayanır. (Daha ilgili okurlar için) bunun niye böyle

(*) Eğer değilse o zaman bir hesaplama hatası yaptınız demektir; kontrol edin.

olduğunu incelemeden önce, nefis bir sayı olan 1.089'un bir başka özelliği ile daha sizi büyüleyelim.

1.089'un ilk dokuz katına bir bakınız.

$$1.089 \cdot 1 = 1.089$$
$$1.089 \cdot 2 = 2.178$$
$$1.089 \cdot 3 = 3.267$$
$$1.089 \cdot 4 = 4.356$$
$$1.089 \cdot 5 = 5.445$$
$$1.089 \cdot 6 = 6.534$$
$$1.089 \cdot 7 = 7.623$$
$$1.089 \cdot 8 = 8.712$$
$$1.089 \cdot 9 = 9.801$$

Çarpım arasındaki ilişkiyi fark ettiniz mi? Dokuzuncu ve birinci çarpımlara bakın (yani, 1.089 ve 9.801). Onlar birbirlerinin tersi. Sekizinci ve ikinci çarpımlar da (yani, 2.718 ve 8.712) birbirlerinin tersi. İlişki, palindromik bir sayı(*) olarak adlandırabileceğimiz 5.445'e kadar gidiyor ki bu da kendisinin tersi.

Özellikle dikkat ediniz ki, $1.089 \cdot 9 = 9.801$'dir ki bu orijinal sayının tersidir. Aynı özellik $10.989 \cdot 9 = 98.901$ ve benzer şekilde $109.989 \cdot 9 = 989.901$ için de doğrudur.

Fark etmişsinizdir; orijinal 1.089 sayısını, 10.**9**89'u elde etmek için ortasına 9 koyarak değiştirdik ve bunu da genişleterek 109.989 elde etmek için 1.089'un ortasına 99 sayısını yerleştirdik. Şu sayıların her birinin aynı özelliğe sahip olduğunu sonucu çıkarmak çok hoş olacaktır: 1.0**99.9**89. 10.**999.9**89. 10**9.999.9**89. 1.0**99.999.9**89. 10.**999.999.9**89 gibi.

Aslında, dört ya da daha az basamağa sahip olan ve kendisinin herhangi bir katı kendisinin tersi olan sadece bir sayı daha vardır; bu sayı 2.178'dir (tesadüfe bakın ki bu $1.089 \cdot 2$'dir); çünkü $2.178 \cdot 4 = 8.712$'dir. Bunu, tıpkı yukarıdaki ör-

Palindromik sayılardan bölüm 1.16'da daha geniş olarak bahsedeceğiz.

nekte olduğu gibi sayının ortasına 9'lar koyup aynı özelliğe sahip sayılar bularak genişletseydik hoş olmaz mıydı? Evet, şu eşitlikler doğrudur:

21.978 • 4 = 87.912
219.978 • 4 = 879.912
2.199.978 • 4 = 8.799.912
21.999.978 • 4 = 87.999.912
219.999.978 • 4 = 879.999.912
2.199.999.978 • 4 = 8.799.999.912 v.b.

1.089 sayısının yeterince hoş özelliği yokmuş gibi, alın size 1.089'u (bir şekilde) daha da yücelten bir tane daha: Aslında burada 1.089'u iki parça halinde düşüneceğiz: 1 ve 89 olarak.

Şimdi gelin herhangi bir sayı alalım ve bu sayının rakamlarının karelerinin toplamını aldığımızda neler olacağına bir bakalım. Bu işlemi tekrar tekrar yapalım. Her defasında oldukça ilginç bir şekilde göreceğiz ki sonuçta 1 ya da 89'a varıyoruz. Şu örneklere bir göz atın.

30 sayısı ile başlıyoruz. Böylece $n = 30$ diyebiliriz ve şimdi bu sayının rakamlarının karelerinin toplamını bulacağız:

$3^2 + 0^2 = 9$. $9^2 = 81$. $8^2 + 1^2 = 65$, $6^2 + 5^2 = 61$. $6^2 + 1^2 = 37$. $3^2 + 7^2 = 58$. $5^2 + 8^2 = \mathbf{89}$. $8^2 + 9^2 = 145$. $1^2 + 4^2 + 5^2 = 42$. $4^2 + 2^2 = 20$. $2^2 + 0^2 = 4$. $4^2 = 16$. $1^2 + 6^2 = 37$. $3^2 + 7^2 = 58$. $5^2 + 8^2 = \mathbf{89}$. ...

Bir kere 89 sayısına ulaştığımızda döngü diyebileceğimiz bir şeye giriyoruz; çünkü ne zaman işlemi devam ettirsek tekrar 89 sayısına geri dönüyoruz. Şimdi bunu 31 sayısıyla deneyelim.

$n = 31$ olacak: $3^2 + 1^2 = 10$. $1^2 + 0^2 = \mathbf{1}$. $1^2 = \mathbf{1}$

Tekrar 1 sayısı için bir döngü oluştu; her defasında 1 sayısına geri dönüyoruz.

Şimdi 32 sayısını deneyeceğiz; $n = 32$ olsun: $3^2 + 2^2 = 13$. $1^2 + 3^2 = 10$. $1^2 + 0^2 = \mathbf{1}$. $1^2 = \mathbf{1}$

Şimdi $n = 33$: $3^2 + 3^2 = 18$. $1^2 + 8^2 = 65$. $6^2 + 5^2 = 61$. $6^2 + 1^2 = 37$. $3^2 + 7^2 = 58.5^2 + 8^2 = \mathbf{89}$. $8^2 + 9^2 = 145$. $1^2 + 4^2 + 5^2 = 42$. $4^2 + 2^2 = 20$. $2^2 + 0^2 = 4$. $4^2 = 16$. $1^2 + 6^2 = 37$. $3^2 + 7^2 = 58.5^2 + 8^2 = \mathbf{89}$. ...

Şimdi $n = 80$: $8^2 + 0^2 = 64$. $6^2 + 4^2 = 52$. $5^2 + 2^2 = 29$. $2^2 + 9^2 = 85$. $8^2 + 5^2 = \mathbf{89}$. $8^2 + 9^2 = 145$. $1^2 + 4^2 + 5^2 = 42$. $4^2 + 2^2 = 20$. $2^2 + 0^2 = 4$. $4^2 = 16$. $1^2 + 6^2 = 37$. $3^2 + 7^2 = 58$. $5^2 + 8^2 = \mathbf{89}$. ...

Şimdi $n = 81$: $8^2 + 1^2 = 65$. $6^2 + 5^2 = 61$. $6^2 + 1^2 = 37$. $3^2 + 7^2 = 58$. $5^2 + 8^2 = \mathbf{89}$. $8^2 + 9^2 = 145$. $1^2 + 4^2 + 5^2 = 42$. $4^2 + 2^2 = 20$. $2^2 + 0^2 = 4$. $4^2 = 16$. $1^2 + 6^2 = 37$. $3^2 + 7^2 = 58$. $5^2 + 8^2 = \mathbf{89}$. ...

Şimdi $n = 82$: $8^2 + 2^2 = 68$, $6^2 + 8^2 = 100$, $1^2 + 0^2 + 0^2 = \mathbf{1}$, $1^2 = \mathbf{1}$

For $n = 85$: $8^2 + 5^2 = \mathbf{89}$. $8^2 + 9^2 = 145$. $1^2 + 4^2 + 5^2 = 42$. $4^2 + 2^2 = 20$. $2^2 + 0^2 = 4$. $4^2 = 16$. $1^2 + 6^2 = 37$. $3^2 + 7^2 = 58$. $5^2 + 8^2 = \mathbf{89}$. ...

Şimdi, seçtiğimiz bir üç basamaklı sayıdan 1.089'u elde etmek için rakamları ters çevirdiğimiz, 1.089 ile ilgili olan orijinal tuhaflığa geri dönelim. Seçtiğimiz herhangi bir sayının bizi 1,089'a götürdüğünü varsaymıştık. Nasıl emin olabiliriz? Pekala, tüm olası üç basamaklı sayıları, bunu doğrulayıp doğrulamadığını görmek için deneyebiliriz. Bu oldukça zahmetli ve pek de zarif olmayacaktır. Bu tuhaflığın araştırılması, temel cebir bilgisinden daha fazlasını gerektirmez. Bu fenome-

ni merak eden okuyucular için, bunun neden her zaman "işlediğini" gösteren cebirsel açıklamaya sunacağız.

Rastgele seçilmiş bir üç basamaklı sayıyı, htu, $100h + 10t + u$ olarak ifade edeceğiz; burada h yüzler basamağını, t onlar basamağını ve u birler basamağını temsil ediyor.

$h > u$(*) olsun; ya seçtiğiniz sayıda ya da onun tersinde bu böyle olacak.

Çıkarma kısmında $u - h < 0$ olur; bu nedenle (çıkarmanın yapıldığı sayının) onlar basamağından bir alınır ve bu birler basamağını $10 + u$ yapar.

Çıkarma işleminin yapılacağı iki sayının onlar basamağı eşit olduğundan ve çıkarmanın yapıldığı sayının onlar basamağından 1 alındığından bu basamağın değeri $10 (t - 1)$ olacaktır. Çıkarmanın yapıldığı sayının yüzler basamağı $(h - 1)$'dir; çünkü onlar basamağında çıkarma yapabilmek için yüzler basamağından 1 alınmıştır. Böylece onlar basamağının değeri $10 (t - 1) + 100 = 10 (t + 9)$ olur.

Şimdi ilk çıkarma işlemini yapabiliriz:

$$\begin{array}{lll} 100\,(h - 1) & + 10\,(t + 9) & + (u + 10) \\ 100u & + 10t & + h \\ \hline 100(h - u - 1) + 10(9) & & + u - h + 10 \end{array}$$

Bu farkın rakamlarını ters çevirmek bize şu sonucu verecek:

$$100(u - h + 10) + 10(9) + (h - u - 1)$$

Şimdi eğer son iki ifadeyi toplarsak:

$$100\,(9) + 10\,(9+9) + (10-1) = \mathbf{1.089}$$

Önemle vurgulamak gerekir ki, cebir bize, numaralara bakılmaksızın aritmetik süreçlerin araştırılması imkânını verir.

1.089 sayına veda etmeden önce, şimdi bu garip sayıyı da-

(*) < işareti "-dan küçük" ve > işareti "-dan büyük" demektir.

ha fazla incelemeye hevesli olan okurlar için iki basamaklı sayılar arasında yegane olan bir başka tuhaflığın daha var olduğunu belirtmemiz gerekir; yani, $33^2 = 1.089 = 65^2 - 56^2$.

Artık **1.089** sayısının göze çarpan bir güzelliği olduğu konusunda hem fikir olduk sanırım. Etkilendiniz mi?

1.12 Boyun Eğmeyen Sayı 1

Doğadaki güzelliğe büyülü dediğimiz anlar vardır. Büyü güzel midir? Bazıları, bir şey gerçekten şaşırtıcı ve zarif ise onun güzel olduğunu düşünür. Bu bakış açısından şimdi size matematikteki "büyülü" bir özelliğe göstereceğiz. Bu, yıllarca matematikçilerin akıllarını kurcalamıştır ve hiç kimse bunun niye böyle olduğunu bilmemektedir.

Şimdi size, rastgele seçtiğiniz herhangi bir sayıya şu iki kuralı uygulamanızı söyleyerek başlayalım.

Eğer sayı tek ise onu 3 ile çarpıp 1 ekleyin.
Eğer sayı çift ise onu 2'ye bölün.

Bu süreci sürekli tekrar ettiğinizde, hangi sayıyı seçmiş olursanız olun, sonunda 1'e ulaşacaksınız.

Gelin bunu *rastgele seçtiğimiz* 12 sayısı ile deneyelim

12 çift sayıdır; bu nedenle onu 2'ye bölelim, 6.
6 da çift sayıdır; bunu da 2'ye bölelim, 3.
3 tek sayıdır; bu nedenle 3 ile çarpıp 1 ekleyelim, $3 \cdot 3 + 1 = 10$.
10 çift sayıdır; bu nedenle onu 2'ye bölelim, 5.
5 tek sayıdır; 3 ile çarpıp 1 ekleyelim, 16
16 çift sayıdır; 2'ye bölelim, 8.
8 çift sayıdır; bu nedenle 2'ye bölelim, 4.

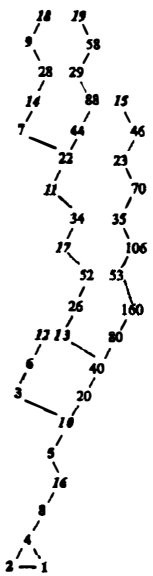
4 çift sayıdır; bu nedenle 2'ye bölelim, 2.
2 çift sayıdır; bu nedenle 2'ye bölelim, 1.

Hangi sayıyla başlarsak başlayalım (ki biz burada 12 ile başladık) nihayetinde 1'e ulaşacağımıza inanılmaktadır.

Bu gerçekten şaşırtıcı! Bunun gerçekten çalıştığına kendinizi inandırmak için başka sayıları da deneyin. Eğer rastgele seçtiğimiz sayı 17 olsaydı 1'e ulaşmak için 12 basamağa ihtiyacımız olacaktı. 43 ile başlasaydık 29 basamak gerekecekti.

Gerçekten bu tüm sayılar için doğru mudur? Bu soru matematikçileri 1930'lardan beri meşgul etmiş ve bu varsayımın ispatı için büyük parasal ödüller vaat edilmiş olsa da şu ana kadar bir cevap bulunamamıştır. "$3n + 1$ Problemi" olarak bilinen bu problemin, yakın zamanlarda (bilgisayar kullanılarak) $10^{18} - 1$'e kadar olan sayılar için doğru olduğu gösterildi.

Sayıların bu garip özelliği karşısında şaşkına dönmüş olanlar için, 1'den 20'ye kadar olan başlangıç noktalarıyla oluşturulan dizileri gösteren bir şema sunacağız. 1'den 20'ye kadar olan sayılar yukarıdaki kuralları takip ederek yapacağınız ilerlemenizde başlangıç noktası olabilirler.



Fark etmişsinizdir; her zaman sonuçta 4-2-1 döngüsüne ulaşıyorsunuz. Yani, 4'e ulaştığınızda bu her zaman 1'e ulaşacaksınız ve eğer 1'den tekrar devam etmeyi denerseniz her zaman yine 1'e ulaşacaksınız demektir; çünkü kuralı uygulayarak [$3 \cdot 1 + 1 = 4$], sürekli döngü içinde kalmaktasınız: 4-2-1.

Bu garipliği inceleme konusunda hevesinizi kırmak istemeyiz; ama eğer bunun her durumda doğru olduğunu ispatlayamazsanız hayal kırıklığına uğramamanız için sizi şimdiden uyarmak istiyoruz; çünkü matematiğin en büyük beyinleri bunu bir yüzyıla yakın bir süredir başaramadılar.

1.13 Mükemmel Sayılar

Matematik sıklıkla mükemmel bir bilim olarak anıldığına göre, gerçekten matematikte bir mükemmellik var mıdır? Sayılar teorisindeki geleneğe göre "mükemmel sayı" adı verilen bir varlığa sahibiz. Bir sayıyı mükemmel yapan şey nedir? Eğer bir sayı öz çarpanlarının toplamına eşitse, matematikçiler bu sayıyı "mükemmel" olarak adlandırırlar. (Bir sayının çarpanı, o sayının bir bölenidir ya da orijinal sayıyı tam olarak bölen bir sayıdır. Sayının kendisi dışındaki bütün çarpanları bir öz çarpandır. Örneğin, 3, 12'nin bir öz çarpanıyken 12, 12 sayısının öz olmayan çarpanıdır.) En küçük mükemmel sayı 6'dır; çünkü 6 = 1 + 2 + 3; yani tüm öz çarpanlarının toplamıdır.(*)

Bir sonraki mükemmel sayı 28'dir; çünkü o da öz çarpanlarının toplamına eşittir [28= 1 + 2 + 4 + 7 + 14]. Ve bir sonraki mükemmel sayı 496'dır; 496 = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248; o da tüm öz çarpanlarının toplamına eşittir.

İlk dört mükemmel sayı eski Yunanlılar tarafından biliniyordu. Bunlar, 6, 28, 496, 8,128'dir.

Bir mükemmel sayı bulmanın yolunu genelleştirerek bir teorem olarak ortaya koyan Öklid'ti. Onun teoremine göre, eğer 2^k-1 bir asal sayı ise o zaman $2^{k-1}(2^k-1)$ bir mükemmel sayıdır; burada k bir doğal (ya da sayma sayısı) sayıdır. Bu demektir ki, ne zaman ki 2^k-1 için bize bir asal sayı† veren bir *k* değeri buluruz, o zaman bir mükemmel sayı oluşturabiliriz. Bütün *k* değerlerini kullanmak zorunda değiliz; çünkü eğer k

(*) Bu, aynı üç sayının toplamı ve çarpımına eşit olan tek sayıdır: 6 = 1 • 2 • 3 = 3! Ayrıca, 6 = √(13 + 23 + 33). Ayrıca şu da çok hoştur: 1/1 = 1/2 + 1/3 + 1/6. Aynı zamanda, 6'dan bahsederken şunu da•söyleyelim ki, hem 6 hem de onun karesi 36 üçgen sayıdır (bkz. Bölüm 1.17).

Bir asal sayının sadece iki çarpanı vardır: 1 ve kendisi. Diğer bir deyişle başka bir böleni yoktur.

bir bileşik sayı(*) ise 2^k-1 de bir bileşik sayıdır.(**)

Öklid'in mükemmel sayı üretme formülünü kullanırsak şunu elde ederiz:

k değerleri	2^{k-1} bir asal sayı olduğunda $2^k-1(2^k-1)$ değerleri
2	6
3	28
5	496
7	8.128
13	33.550.336
17	8.589.869.056
19	137.438.691.328

İncelediğimizde mükemmel sayıların birkaç özelliğini fark edebiliriz. Tümü de 6 ya da 28 ile bitiyor gibi görünmektedir ve bunlardan önce bir tek sayılı basamak bulunmakta. Ayrıca bunlar, ardıl doğal sayıların toplamı olan üçgen sayıların (bölüm 1.17'ye bakınız.) üyeleri gibi görünüyorlar (yani, 496 = 1 + 2 + 3 + 4 + ... + 28 + 29 +30 + 31).

Bir adım daha ileri gidersek göreceğiz ki, 6'dan sonraki her mükemmel sayı, $1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3 + 9^3 + 11^3 + ...$ serisinin bir kısmi toplamıdır. Örneğin, $28 = 1^3 + 3^3$ ve $496 = , 1^3 + 3^3 + 5^3 + 7^3$.

Tek olan bir mükemmel sayının var olup olmadığını bilmi-

(*) Bileşik sayılar, 1'in dışında en az iki çarpanı olan sayılardır.
Eğer $k = pq$ ise, o zaman $2^k - 1 = 2^{pq} - 1 = (2^p-1)(2^{p(q-1)} + 2^{p(q-2)} + ... + 1)$. Bu nedenle, $2^k - 1$ ancak k bir asal ise asal olabilir; ama aşağıdaki k değerlerinden de görüleceği gibi bu, k bir asal olduğunda $2^k - 1$'in asal olmasını garanti etmez.

k	2	3	5	7	11	13
2k-1	3	7	31	127	2.047	8.191

(**) Burada 2.047 = 23 • 89 bir asal değildir ve varsayımı bozar.

yoruz; şu ana kadar bir tane bulunamamıştır. Günümüz bilgisayarları sayesinde rahatlıkla çok daha büyük sayılar oluşturabiliyoruz. Eğer isterseniz Öklid'in formülünü kullanarak çok daha büyük mükemmel sayılar bulabilirsiniz.

1.14 Arkadaş Sayılar

İki sayıyı arkadaş yapan şey ne olabilir? Matematikçiler, bir sayının öz bölenlerinin(*) (ya da çarpanlarının) toplamının diğer bir sayıya ve bu diğer sayının öz bölenlerinin toplamının da birinci sayıya eşit olması halinde bu sayılara arkadaş (ya da literatürde kullanıldığı şekliyle "dost") sayılar denmesi gerektiğine karar vermişlerdir.

Kulağa karışık mı geliyor? Aslında hiç de öyle değil. Gelin şimdi en küçük arkadaş sayı çiftine bir göz atalım: 220 ve 284.

220'nin öz bölenleri şunlardır: 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55 ve 110. Bunların toplamı, 1 + 2 + 4 + 5 + 10 + 11 + 20 + 22 + 44 + 55 + 110 = **284**'tür.

284'ün bölenleri ise 1,2,4,71 ve 142'dir ve bunların toplamı da 1+2+4+71+142 = **220**'dir.

Bunlar bize bu iki sayının *arkadaş sayılar* olarak kabul edilebileceğini gösterir.

İkinci arkadaş sayı çifti (Pierre de Fermat tarafından keşfedilmişlerdir) şunlardır: 17.296 ve 18.416.

$17.296 = 2^4 \cdot 23 \cdot 47$, ve $18.416 = 2^4 \cdot 1.151$

17.296'nın öz çarpanlarının toplamları şunlardır:

(*) Öz bölenler, sayının, kendisi dışındaki tüm çarpanları ya da bölenleridir. Örneğin 6'nın öz bölenleri 1, 2 ve 3'tür; ama 6 değildir.

1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 23 + 46 + 47 + 92 + 94 + 184 + 188 + 368 + 376 + 752 + 1.081 + 2.162 + 4.324 + 8.648 = **18.416.**

18.416'nın çarpanlarının toplamı ise şöyledir: 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 1.151 + 2.302 + 4.604 + 9.208 = **17.296**.

İşte arkadaş sayılara birkaç örnek daha:

1.184 ve 1.210
2.620 ve 2.924
5.020 ve 5.564
6.232 ve 6.368
10.744 ve 10.856
9.363.584 ve 9.437.056
111.448.537.712 ve 118.853.793.424

Yukarıdaki çiftlerin "arkadaşlığını" doğrulamak isteyebilirisiniz.

Uzmanlar için, aşağıdaki metot arkadaş sayı çiftlerini bulmak kullanılan metotlardan biridir:

$a = 3 \cdot 2^n - 1$
$b = 3 \cdot 2^{n-1} - 1$
$c = 3^2 \cdot 2^{2n-1} - 1$ olsun.

n bir tamsayı ve ≥ 2, ayrıca a, b ve c'nin hepsi asal sayılar olduğunda, bu durumda $2^n ab$ ve $2^n c$ arkadaş sayılardır.

(Dikkat ediniz ki n ≤ 200 değerleri için, n = 2,4 ve 7 bize a, b ve c için asal saylar verir.)

1.15 Başka Bir Arkadaş Sayı Çifti

Her zaman sayılar arasındaki hoş ilişkileri arayabiliriz. Bir önceki bölümde arkadaş sayılar çiftlerini inceledik. Biraz ya-

ratıcılıkla sayılar arasında bir başka "arkadaşlık" ilişkisi oluşturabiliriz. Bunların bazıları gerçekten hayranlık uyandırıcıdırlar! Örneğin şu sayılara bir bakın: 6.205 ve 3.869.

İlk bakışta, gözle görünür bir ilişki yokmuş gibidir. Fakat biraz şans ve hayal gücü ile bazı çok ilginç sonuçlar elde edebiliriz.

$6.205 = 38^2 + 69^2$ ve $3.869 = 62^2 + 05^2$

Dikkat ediniz ki, her sayıyı rakam çiftlerine böldük; bu çiftlerin karelerini aldık ve diğer sayıyı vermek üzere bu sonuçları topladık.

Aynı özelliğe sahip başka sayılar da bulabiliriz. Şu örneğe bakın.

$5.965 = 77^2 + 06^2$ ve $7.706 = 59^2 + 65^2$

Bu güzel modelleri görmenin verdiği haz dışında bu örneklerde öyle çok da fazla matematik yok. Ama yine de, ilişki hayret verici ve dikkate değer. Yeniden görüyoruz ki, matematik kendi içinde nice hazineler taşıyor.

1.16 Palindromik Sayılar

Ne yazık ki, kelime bulmacaları ve çapraz bulmacalar, matematik bulmacalarına göre daha fazla rağbet görmektedirler. Palindromlar, yani her iki yönde de aynı şekilde okunabilen sözcükler ya da sayılar üzerine yazılan kitaplar görmüşüzdür. Her zaman zihinlerde palindromlarla ilgili yeni yeni bilmeceler geliştirilmekte. Peki ya palindromik sayılar? Tabi ki onlarında bazı eğlendirici yanları vardır. İlk başta palindromik birkaç sözcük ve cümleyi inceleyelim. İşte eğlendirici birkaç tanesi:

NALAN
RADAR
REVIVER
ROTATOR

Palindromik sayılar, her iki yönde de aynı şekilde okunan sayılardır. Bu bizi, tarihlerin, simetrinin incelenmesi için güzel bir kaynak oluşturduklarını düşünmeye götürür. Örneğin, 2002 bir palindromdur; tıpkı 1991 gibi. Ekim 2001'de, Amerikan tarzında yazıldıklarında ortaya çıkan birçok palindrom tarih vardır. 10 ÷ 1 ÷ 01 ya da 10 ÷ 22 ÷ 01 ve diğerleri. Avrupalılar palindrom tarihlerin en ilgincine 20 Şubat 2002 saat 8:02 pm'de vardılar; çünkü bu tarih 20.02, 20-02-2002 diye yazılır. Bu tarih bizi diğer palindromik tarihleri bulmaya teşvik eder adeta.

Biraz daha ilerlersek göreceğiz ki, 11'in ilk dört kuvveti de palindromik sayılardır:

$$11^1 = 11$$
$$11^2 = 121$$
$$11^3 = 1.331$$
$$11^4 = 14.641$$

Bir palindromik sayı, bir asal sayı ya da bir bileşik sayı olabilir. Örneğin 151 bir asal palindromdur; ama 171 bir bileşik palindromdur. 11'in dışında, asal bir palindromun basamak sayısının tek olması gerekir. Diğer palindrom asalları bulmaya çalışın.

Belki de en ilginç şeylerden bir tanesi de herhangi bir sayıdan bir palindrom sayının nasıl üretilebileceğidir. Tek yapmamız gereken sürekli, bir palindroma ulaşana dek bir sayıya onun tersini (yani, rakamları ters sırada yazılmış sayıyı) eklemektir.

Örneğin, 23 sayısından başlanarak bir palindroma bir basamakta ulaşılabilir:

23 + 32 = 55, bir palindrom.

Ya da eğer 75'ten başlanırsa bu iki basamak alabilir:

75 + 57 = 132, 132 + 231 = 363, bir palindrom.

Ya da eğer 86'tan başlanırsa bu üç basamak alabilir:

86 + 68 = 154, 154 + 451 = 605, 605 + 506 = 1.111. bir palindrom.

Başlangıç sayısı 97 olduğunda bir palindroma ulaşmak için gerekli basamak sayısı altı; 98 olduğunda ise bu sayı yirmi dörttür.

196 sayısını kullanmamaya dikkat edin; çünkü bu sayı, bir palindroma ulaşmak konusunda sizin yeteneklerinizi tamamıyla aşacaktır.

Palindromik sayılarla uğraştığımızda karşımıza çıkan çok hoş modeller vardır. Örneği palindromik küpler üreten sayıların kendileri de palindromiktirler.

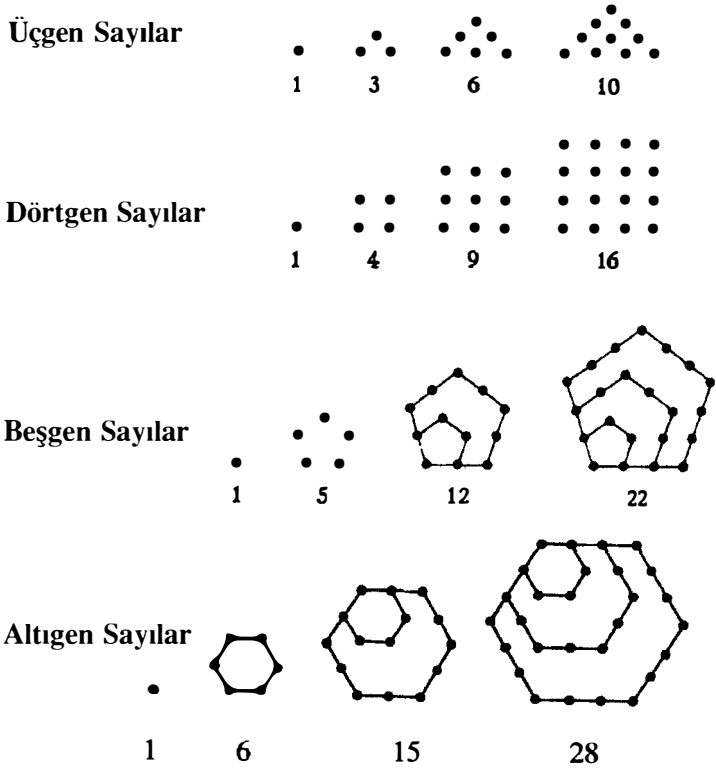
Palindromik sayıların diğer özelliklerini bulmayı denemekten çok hoşlanabilirsiniz(*) -- onlar gerçekten oynamak için çok güzellerdir.

1.17 Şekilsel Sayılarla Eğlence

Sayılar geometrik şekiller alabiliriler mi? Sayıların geometrik bir şekli olmasa da, bazıları noktalarla ifade edilebilir ve bu noktalar da bilinen bir geometrik şeklin biçimini alabilir. Şimdi bunlardan bazılarına bakalım.

Dikkat ediniz ki, noktalar düzgün çokgenlerin şekillerini almaktadırlar.

(*) Palindromik sayılarla ilgili olarak: Teaching Secondary School Mathematics: Techniques and Enrichment Units, 6. Basım, A.S. Posamentier ve J. Stepelmen (Upper Saddle River, N.J.: Prentice Hall/Merrill, 2002), sayfa 257-58.



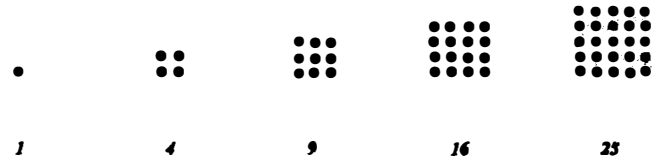
Bu şekilsel sayıların aşağıda yapacağımız düzenlemelerinden, bu sayıların bazı özelliklerini (bizim şimdi yapacağımız gibi) keşfedebilmeniz gerekir. Bu sayıları birbirleriyle ilişkilendirmek gerçekten eğlenceli olabilir. Örneğin, *n*'inci kare sayı, *n*'inci ve (*n*-1)'inci üçgen sayının toplamına eşittir. Bir başka örnek ise, *n*'inci beşgen sayının, n'inci dörtgen ve (*n*-1)'inci üçgen sayının toplamına eşit olduğudur. Böyle daha bir sürü bulunacak (ya da keşfedilecek!) ilişki vardır.

Şimdi size *oblong* (dikdörtgene benzeyen) sayıları sunuyoruz; bu sayılar, $n(n+1)$ şeklinde ya da dikdörtgensel nokta dizileri şeklide yazılabilen sayılardır:

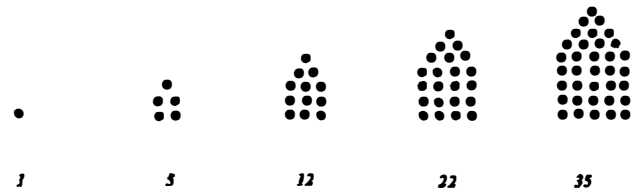
Üçgen Sayılar



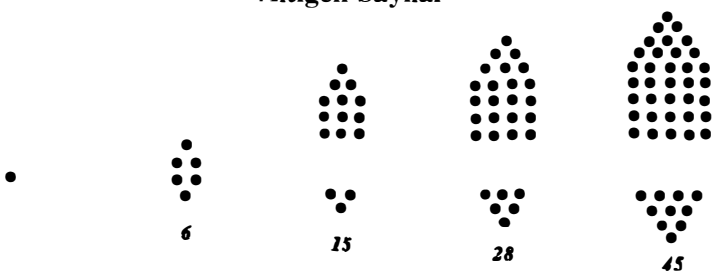
Dörtgen Sayılar



Beşgen Sayılar



Altıgen Sayılar



1 • 2 = 2
2 • 3 = 6
3 • 4 = 12
4 • 5 = 20
5 • 6 = 30 vb.

İşte size oblong sayılarla ilgili bazı ilişkiler; örnekler burada verilmiş olsalar da, bunların doğru olabileceğini gösteren ek örnekleri de sizin bulmanız gerekir. Konu hakkında iyice fikir sahibi olanlar bunların doğru olduğunu ispatlamaya çalışabilirler.

Bir oblong sayı, ardışık çift sayıların toplamıdır.
Örnek: $2 + 4 + 6 + 8 = 20$.

Bir oblong sayı bir üçgen sayının iki katıdır.
Örnek: $15 \cdot 2 = 30$

İki ardışık karenin ve bunlar arasındaki oblong sayının karesini toplamı bir kare sayıdır.
Örnek: $9 + 16 + 12^2 = 169 = 13^2$

İki ardışık oblong sayının ve onlar arasındaki karenin iki katının toplamı bir kare sayıdır.
Örnek: $12 + 20 + 2 \cdot 16 = 64 = 8^2$

Bir oblong sayı ile bir sonraki kare sayınn toplamı bir üçgen sayıdır.
Örnek: $20 + 25 = 45$

Bir kare sayının ve bir sonraki oblong sayının toplamı bir üçgen sayıdır.
Örnek: $25 + 30 = 55$

Bir sayı ve onun karesinin toplamı bir oblong sayıdır.
Örnek: $9 + 81 = 90$.

Burada sunulmuş olan diğer şekilsel sayılarla ilgili başka başka ilişkileri keşfetmek isteyebilirsiniz.

1.18 Muhteşem Fibonacci Sayıları

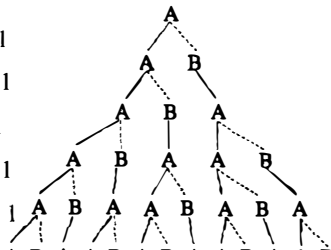
Matematikte, Fibonacci sayılarından daha fazla matematiğin birçok alanına sızmış çok fazla konu yoktur. Bunlar ilk olarak Batı tarihinin en önemli kitaplarının birinde ortaya çıkmışlardır. Bu kitap, *Liber abaci*, 1202'de Leonardo Pisano ya da Pisa'lı Leonardo tarafından yazılmıştır; bu şahıs daha çok Fibonacci ya da Bonacci'nin oğlu olarak (1180-1250)* olarak tanınır; bu kitap, bizim onluk sayı sistemimizin temelini oluşturan Hindu-Arap rakamlarının kullanıldığı ilk Avrupa yayınıdır. Bu özelliği ile bile bir dönüm noktası olarak değerlendirilebilir. Ne var ki, o aynı zamanda tavşanların sayısının artmasıyla ilgili "zararsız" bir problemi de içerir. Ünlü Fibonacci sayılarını oluşturan, işte bu problemin çözümüdür. Bu problem şu şekilde ifade edilebilir:

Bir çift tavşandan başlanırsa ve her ay her bir çift, ikinci aydan sonra üretken olacak olan bir tavşan çifti taşırsa, bir yıl sonra kaç tane tavşan çifti olacaktır?

Bu problemden *Fibonacci dizisi* ortaya çıkar. Eğer bir çift

(*) Fibonacci –kendi adını Filius Bonacci olarak yazan Fibonacci daha bilinen ismini almıştır– ilk bilim adamlarından beklenmeyeceği bir şekilde rahip değildi; İslam dünyasını gezme şansını elde etmiş olan bir tüccardı ve Arap dünyasında okuyabildiği kadar matematiksel yazıyı okumuştu. Liber abaci (1202 ve 1228'de yenilendi) kitabında Hıristiyan dünyasına Hindu-Arap rakamlarını ilk olarak tanıtan odur; bu kitap olarak el yazması şeklinde elden ele gezmiştir ve daha sonra 1857 yılında Scritti di Leonardo Pisano adıyla basılmıştır (Rome: B. Buoncompagni). Kitap, bir ticaret matematiği derlemesidir; doğrusal ve kuadratik denklemleri, kare ve küp kökleri ve Avrupa bakış açısından değerlendirilmiş birçok başlığı içerir. Bu kitap şu cümleyle başlar: "Buradakiler Hintlilerin kullandığı dokuz şekildir: 9 8 7 6 5 4 3 2 1. Bu dokuz şekille ve 0 sıfır işaretiyle ki Arapça'da bu zefirum olarak isimlendirilir, aşağıda gösterileceği gibi her sayı yazılabilir." Buradan sonra o Avrupa ilk kez onluk sayı sistemini anlatır. (Not: zefirum kelimesi Arapça'daki as-sifr kelimesinden evrilmiştir; bu da Sanskrit sunya kelimesinden gelir ki bu kelime yaklaşık beşinci yüzyılda Hindistan'da boşluk anlamında kullanılmıştır.)

bebek tavşanın (B) bir ay içinde döl verebilen yetişkin tavşanlara (A) dönüştüğünü var sayarsak; o zaman şu tabloyu oluşturabiliriz:

Aylar	çiftler	erişkin tavşan çift. sayısı	bebek tav. çift. sayısı	Toplam çiftlerin tsayısı
Ocak 1		1	0	1
Şubat 1		1	1	2
Mart 1		2	1	3
Nisan 1		3	2	5
Mayıs 1		5	3	8
Haz. 1		8	5	13
Temmuz		13	8	21
Ağus. 1		21	13	34
Eylül 1		34	21	55
Ekim 1		55	34	89
Kasım 1		89	55	144
Aralık 1		144	89	233
Ocak 1		233	144	377

Her ay yaşayan erişkin tavşanların sayısı Fibonacci dizisini belirler:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144, 233, 337, ...

Eğer f_n'ye Fibonacci dizisinin n'inci terimi dersek; o zaman:

$f_1 = 1$
$f_2 = 1$
$f_3 = f_2 + f_1 = 1 + 1 = 2$
$f_4 = f_3 + f_2 = 2 + 1 = 3$
$f_5 = f_4 + f_3 = 3 + 2 = 5$
.
.
.
$f_n = f_{n-1} + f_{n-2}$, $n \geq 3$ bir tamsayı için

Yani, ilk iki terimden sonraki terim, bu ilk iki terimin toplamıdır.

Bu diziyi böylesine muhteşem yapan şeyin ne olduğu sorulabilir. Bir sebebi, Fibonacci sayıları ile (ister inanın, ister inanmayın) Altın Oran(*) arasında direk bir ilişki vardır! Aşağıdaki, ardışık Fibonacci sayılarının birbirlerine bölünmeleriyle oluşan oranları inceleyin.

Ayrıca, "Altın Kesit Üzerine Biraz Cebir" bölümünde de (bkz. Bölüm 4.18) görebileceğiniz gibi, ø'nin(**) ardışık kuvvetleri bize Fibonacci sayılarını verir.

$\frac{f_{n+1}}{f_n}$
$\frac{1}{1} = 1.000000000$
$\frac{2}{1} = 2.000000000$
$\frac{3}{2} = 1.500000000$
$\frac{5}{3} = 1.666666667$
$\frac{8}{5} = 1.600000000$
$\frac{13}{8} = 1.625000000$
$\frac{21}{13} = 1.615384615$
$\frac{34}{21} = 1.619047619$
$\frac{55}{34} = 1.617647059$
$\frac{89}{55} = 1.618218162$
$\frac{144}{89} = 1.617977528$
$\frac{233}{144} = 1.618055556$
$\frac{377}{233} = 1.618025751$
$\frac{610}{377} = 1.618037135$
$\frac{987}{610} = 1.618032787$

$$\phi^2 = \phi + 1$$
$$\phi^3 = 2\phi + 1$$
$$\phi^4 = 3\phi + 2$$

(*) Altın Oran matematikteki en sıra dışı oranlardan birini ifade etmektedir. Kitabımızda Altın Oran'la ilgili daha fazla şey olacaktır.
(**) ø Altın Oran'ı ifade eder.

$$\phi^5 = 5\,\phi + 3$$
$$\phi^6 = 8\,\phi + 5$$
$$\phi^7 = 13\,\phi + 8$$

Bağlantı gayet açıktır. Katsayı ve sabitlere bakınız. Orada Fibonacci sayılarını göreceksiniz. Bu gerçekten çok olağan dışıdır; iki tamamıyla (görünüşte) bağlantısız nesne, bir anda birbirleriyle yakın ilişki haline geçmektedir. Işte matematiği böylesine göz alıcı yapan da budur.

1.19 Sonsuz Bir Döngüye Girmek

Bu bölüm, onluk sayı sistemimizde ortaya çıkan sıra dışı bir fenomeni ortaya koymaktadır. Sonuçlara hayranlıkla bakmaktan başka yapabileceğimiz bir şey yok. Bu, her durum için kanıtlayabileceğimiz bir şey olmasa da, henüz bu olayın çalışmadığı bir sayı bulunamamıştır. Bu, kendi içinde, bunun aslında her zaman doğru olduğunu göstermektedir. Eğer çıkarma yapmayı sevmiyorsanız hesap makinesi kullanabilirsiniz.

Şu basamakları takip edin:

1. Dört basamaklı bir sayı seçerek başlayın (fakat bu sayı aynı rakamlardan oluşan bir sayı olmayacak)
2. Bu sayının rakamlarını, olası en büyük sayıyı verecek şekilde yazın (bu, sayının rakamlarını büyükten küçüğe dizeceğiniz anlamına gelir)
3. Daha sonra, sayının rakamlarını olası en küçük sayıyı verecek şekilde yazın (bu, sayının rakamlarını küçükten büyüğe dizeceğiniz anlamına gelir)
4. Bu iki sayıyı birbirinden çıkarın (açıktır ki, küçüğü büyüğünden çıkaracaksınız)
5. Farkı alın ve sürece devam edin; yeniden ve yeniden, ta ki rahatsız edici bir durum karşınıza çıkana kadar. Sıra dışı bir şey ortaya çıkmadan önce sakın vazgeçmeyin.

En sonunda 6.174 sayısına varacaksınız; ya bir çıkarma işleminden sonra ya da birkaç taneden sonra. Böyle olduğunda da kendinizi sonsuz bir döngünün içinde bulacaksınız.

Döngüye ulaştığınızda, işlemin başında rastgele bir sayı seçtiğinizi hatırlayın. Bu gerçekten çok şaşırtıcı bir sonuç değil midir? Bazı okuyucular bunu daha ayrıntılı bir şekilde incelemek isteyebilirler. Kimileri de şaşkınlık içinde sonuçlara bakakalacaklardır. Ne olursa olsun açıktır ki matematiğin güzelliği sizi büyülemiştir.

Şimdi bu örneği, nasıl olduğunu göstermek için rastgele seçtiğimiz bir sayıyı, 3.203 sayısını kullanarak uygulayalım.

Bu rakamlarla oluşturulacak en büyük sayı: 3.320
Bu rakamlarla oluşturulacak en küçük sayı: 0,233
Bunların farkı: 3.087

Şimdi 3.087'i kullanarak sürece devam ediyoruz.
Bu rakamlarla oluşturulacak en büyük sayı: 8.730
Bu rakamlarla oluşturulacak en küçük sayı: 0,378
Bunların farkı: 8.352

Yeniden, süreci tekrarlıyoruz.

Bu rakamlarla oluşturulacak en büyük sayı: 8.532
Bu rakamlarla oluşturulacak en küçük sayı: 2.358
Bunların farkı: **6.174**

Bu rakamlarla oluşturulacak en büyük sayı: 7.641
Bu rakamlarla oluşturulacak en küçük sayı: 1.467
Bunların farkı: **6.174**

Sürekli olarak 6.174 ile karşılaştığımızdan, bu şekilde bir döngü oluşur. Hatırlayınız ki, biz rastgele seçtiğimiz bir sayıyla başlamıştık ve şimdi karşımıza her zaman 6.174 çıkıyor ve bu da bizi sonsuz bir döngüye sokuyor (yani, her zaman

6.174'e geri dönüyoruz).

1.20 Üstel Bir Döngü

Bir sayının, rakamlarının küplerinin toplamına eşit olduğunu hayal edebilir misiniz? Bu sadece beş sayı için doğrudur. İşte karşınızda bu beş sıra dışı sayı.

$1 - 1^3 = 1$
$153 _ 1^3 + 5^3 + 3^3 = 1 + 125 + 27 = 153$
$370 _ 3^3 + 7^3 + 0^3 = 27 + 343 + 0 = 370$
$371 _ 3^3 + 7^3 + 1^3 = 27 + 343 + 1 = 371$
$407 _ 4^3 + 0^3 + 7^3 = 64 + 0 + 343 = 407$

Şimdi bir an durun ve bu muhteşem sonuçları şöyle bir inceleyin ve unutmayın ki, bu beş sayı bu olayın gerçekleştiği yegane sayılardır.

Bir sayının rakamlarının kuvvetlerinin toplamını almak oldukça ilginç sonuçlara götürebilir bizi. Bu prosedürü, nefis (ve hiç şüphe yok ki, şaşırtıcı) bir tekniğe ulaşmak için genişletebiliriz; bu sizi, hem sayıların kuvvetleri ile tekrar tanışık hale getirip hem de şok edici bir sonuca ulaşmanıza yardım edebilir.

Herhangi bir sayı seçin ve tıpkı yukarıda yaptığımız gibi rakamlarının küplerinin toplamını bulun. Tabii ki, yukarıdaki sayılar dışında, bulacağınız sayı başladığınız sayıdan farklı olacaktır. Bu, işlemi her yeni toplamla tekrarlayın; ta ki bir "döngüye" girene kadar. Eğer daha önce rastladığınız bir sayıya tekrar rastlarsanız bu bir döngüye girmiş olduğunuzu belirtir. Bu, bir örnekle çok daha açık bir hale getirecektir.

Şimdi (rastgele seçtiğimiz) 352 sayısı ile başlayalım ve onun rakamlarının küplerinin toplamını bulalım.

352'nin rakamlarının küplerinin toplamı: $3^3 + 5^3 + 2^3 = 27 + 125 + 8 = 160$

Şimdi bu toplamı,160'ı kullanalım ve işlemi tekrar edelim:

160'ın rakamlarının küplerinin toplamı: $1^3 + 6^3 + 0^3 = 1 + 216 + 0 = 217$.

Şimdi işlemi 217 ile tekrarlayalım:

217'nin rakamlarının küplerinin toplamı: $2^3 + 1^3 + 7^3 = 8 + 1 + 343 = 352$.

Sürpriz! Bu bizim başladığımız sayının (352) aynısı.

Eğer kareleri alınış olsaydık bunun daha kolay olabileceğini düşünmüş olabilirsiniz. Sürprize hazırlıklı olun. Gelin bunu 123 sayısı ile deneyelim.

123 ile başlayalım; rakamlarının karelerinin toplamı: $1^2 + 2^2 + 3^2 = 1 + 4 + 9 = 14$.

1. **Şimdi 14'ü kullanalım; rakamlarının karelerinin toplamı:** $1^2 + 4^2 = 1 + 16 = 17$.
2. **Şimdi 17'yi kullanalım; rakamlarının karelerinin toplamı:** $1^2 + 7^2 = 1 + 49 = 50$.
3. **Şimdi 50'yi kullanalım; rakamlarının karelerinin toplamı:** $5^2 + 0^2 = 25 + 0 = 25$.
4. **Şimdi 25'i kullanalım; rakamlarının karelerinin toplamı:** $2^2 + 5^2 = 4 + 25 = 29$.
5. **Şimdi 29'u kullanalım; rakamlarının karelerinin toplamı:** $2^2 + 9^2 = 85$.
6. **Şimdi 85'i kullanalım; rakamlarının karelerinin toplamı:** $8^2 + 5^2 = 64 + 25 = 89$.

7. **Şimdi 89'u kullanalım; rakamlarının karelerinin toplamı:** $8^2 + 9^2 = 64 + 81 = 145$.
8. **Şimdi 145'i kullanalım; rakamlarının karelerinin toplamı:** $1^2 + 4^2 + 5^2 = 1 + 16 + 25 = 42$.
9. **Şimdi 42'yi kullanalım; rakamlarının karelerinin toplamı:** $4^2 + 2^2 = 16 + 4 = 20$.
10. **Şimdi 20'yi kullanalım; rakamlarının karelerinin toplamı:** $2^2 + 0^2 = 4 + 0 = 4$.
11. **Şimdi 4'ü kullanalım; rakamlarının karelerinin toplamı:** $4^2 = 16$.
12. **Şimdi 16'yı kullanalım; rakamlarının karelerinin toplamı:** $1^2 + 6^2 = 1 + 36 = 37$.
13. **Şimdi 37'yi kullanalım; rakamlarının karelerinin toplamı:** $3^2 + 7^2 = 9 + 49 = 58$.
14. **Şimdi 58'i kullanalım; rakamlarının karelerinin toplamı:** $5^2 + 8^2 = 25 + 64 = 89$.

Son toplam olan 89'un 6. aşamada görüldüğüne dikkat ediniz; böylece 14. Basamaktan sonra bir tekrarlanma ortaya çıkacaktır. Bu bizim bir döngüye girdiğimiz anlamına gelmektedir.

Herhangi bir sayının rakamlarının kuvvetlerinin toplamlarıyla denemeler yapmayı ve bunların ortaya çıkardığı ilginç sonuçları incelemeyi deneyebilirsiniz. Döngü modellerini arayın ve orijinal sayının doğasına göre döngünün genişliğini belirlemeye çalışın.

Ne olursa olsun, bu şaşırtıcı matematik büyüsü burada sunulduğu gibi, bir eğlence kaynağı ya da daha meraklı okuyucular için ileri bir araştırmanın kaynağı olabilir.

1.21 Faktöriyel Bir Döngü

Bu küçük etkileyici bölüm, belli sayılarla ilgili sıra dışı bir ilişkiyi gözler önüne serecek. Fakat başlamadan önce, faktö-

riyel yazım şeklini bir hatırlayalım. $n!$'in tanımı şöyledir: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \ldots\ldots (n\text{-}1) \cdot n$.(*)

Şimdi faktöriyel kavramını anladığınıza göre; 145 sayısının rakamlarının faktöriyellerinin toplamını bulun.

$1! + 4! + 5! = 1 + 24 + 120 = 145.$

Sürpriz! Tekrar 145'e geri döndük.

Yalnızca belirli sayılar için, sayının rakamlarının faktöriyellerinin toplamı sayının kendisine eşittir.

Şimdi bunu bir de 40.585 ile deneyelim.

Yani, $4! + 0! + 5! + 8! + 5! = 24 + 1 + 120 + 40.320 + 120 = 40.585$

Bunun hemen hemen bütün sayılar için doğru olması gerektiğini düşünüyor olabilirsiniz. Peki, başka bir sayı deneyin. Muhtemelen işe yaramayacaktır. 871 ile başladığımızı var sayalım.

İşlemi kullanarak şuna ulaşacaksınız: $8! + 7! + 1! = 40.320 + 5.040 + 1 = 45.361$. Bu noktada yanıldığınızı düşünüyor olabilirsiniz. Acele temeyin. Yöntemi şimdi de 45.361 sayısına uygulayalım.

Bu şu sonucu ortaya çıkarır: $4! + 5! + 3! + 6! + 1! = 24 + 120 + 6 + 720 + 1 = 871$. Bu bizim başladığımız sayı değil miydi? Yeniden bir döngü oluşturduk.

Eğer bunu 872 ile tekrarlarsanız, $8! + 7! + 2! = 40.320 + 5.040 + 2 = 45.362$ sonucunu alırız. Daha sonra işlemi yeniden tekrarlamak bize şunu verir: $4! + 5! + 3! + 6! + 2! = 24 + 120 + 6 + 720 + 2 = 872$. Tekrar bir döngünün içine girdik.

(*) "!" faktöriyel işareti, faktöriyel işareti ile birlikte verilen sayının ve bu sayıdan küçük olan tam sayıların çarpımına eşittir. Örneğin $5! = (5)(4)(3)(2)(1) = 120$, $8! = (8)(7)(6)\ (5)(4)(3)(2)(1) = 40.320$ ve $n! = (n)(n\text{-}1)(n\text{-}2)(n\text{-}3) \ldots (3)(2)(1)$. Burada çarpma işlemi olarak parantez işaretini kullandığımıza dikkat ediniz. Bu arada, $0!$ tanım gereği 1'e eşittir (yani, matematikçiler işlemleri tutarlı halde tutmak için bu konuda anlaşma halindedirler).

Bazı insanlar genellemeler yapma konusunda çok acelecilerdir; öyle ki, örneğin onlar şöyle düşünürler, eğer bir sayının rakamlarının faktöriyellerin toplamı seni aynı sayıya geri döndürmezse bir kez daha dene, o sayıya ulaşacaksın. Ne var ki 169 sayısını düşündüğünüzde "baltayı taşa vurabilirsiniz." İki kere tekrar etmek bir döngü oluşturmaz. Bir defa daha deneyin. Bu sefer kesinlikle döngüyü oluşturacaksınız ve orijinal sayıya döneceksiniz.

Başlangıç Sayısı	**Faktöriyellerin Toplamı**
169	1! + 6! + 9! = 363.601
363.601	3! + 6! + 3! + 6! + 0! + 1! = 6 + 720 + 6 + 720 + 1 + 1 = 1.454
1.454	1! + 4! + 5! + 4! = 1 + 24 + 120 + 24 = 169

Sonuçlara ulaşırken dikkatli olunuz. Bu faktöriyellerle ilgili gariplik bulmaya çalışmanızı gerektirecek kadar çok yaygın değildir. Şu anda "elimizin altında" böyle döngüleri olan üç grup bulunmaktadır. Biz bunları, orijinal sayıya ulaşmak için yapılan tekrarların sayısına göre gruplandırabiliriz. Biz bu tekrarları "devirler" olarak adlandırıyoruz.

İşte numaralarımızın bu faktöriyel döngüler içindeki davranışlarına göre gruplanmalarının bir özeti.

1 devir	1; 2; 145; 40.585
2 devir	871; 45.361 ve 872; 45.362
3 devir	169; 363.601; 1.454

Faktöriyel döngülerle ilgili bu küçük çekici tuhaflık eğlenceli olabilir; fakat dikkatli olmanızı önerim; çünkü 2.000.000'dan önce böyle bir durum sergileyen başka bir sayı daha bulunmamaktadır. Bu nedenle beyhude bir çabayla zamanınızı harcamayın. Bize sadece bu birkaç güzelliği takdir etmek düşüyor.

1.22 √2'nin İrrasyoneliği

√2'nin *irrasyonel* olduğundan bahsettiğimizde ne demek isteriz? Belki en doğru yol, onun İngilizce'deki anlamına bakmak olacaktır.

İrrasyonel rasyonel olmayan demektir.

Rasyonel olmayan demek, onun, iki tamsayının oranı olarak yazılamayacağı anlamına gelmektedir.

Bir oran olarak yazılamaz demek, onun, bir bayağı kesir olarak ifade edilemeyeceği anlamına gelmektedir.

Yani, hiçbir kesir yoktur ki, $a \div b = \sqrt{2}$ olsun; burada a ve b tam sayılardır.(*)

Eğer bir hesap makinesi kullanırsak şu sonucu alacağız:

√2=1.414213562373095048801688724209698078569671875376948073176679737990732478462107038850387534327641572...

Dikkat ediniz ki, rakamlar arasında hiçbir model yoktur; rakam grupları arasında bile bir tekrar bulunmamaktadır. Bu, tüm rasyonel kesirlerin bir rakamlar tekrarına sahip olacağı anlamına mı gelir? Birkaç bayağı kesri inceleyelim.

1 ÷ 7=0.142857142857142857142857 ...; bu şu şekilde yazılabilir: 0.142857 (altı rakamlı bir devir)(**)

Şimdi de 1÷109 kesrine bakalım:

1÷109=0.009174311926605504587155963302752293577981651376146788990825688073394495412844036697247706422018348 6...

(*) Tam sayılar, hatırlayacağınız gibi, 0, pozitif ya da negatif olabilir.

(**) Rakamlardan oluşan bir devir, örnekte olduğu gibi tekrar eden rakam gruplarıdır.

Burada kesrin ilk 100 basamağını hesapladık ama hiçbir tekrar göremedik. Bu, kesrin irrasyonel olduğu anlamına mı gelir? Bu bizim yukarıdaki hoş tanımımızı alt üst edecektir. Değeri biraz daha kesin olarak hesaplamaya çalışalım ve örneğin 12 basamak daha gidelim.

1÷109=0.009174311926605504587155963302752293577
981651376146788990825688073394495412844036697247
706422018348623853211<u>0091</u>

Birden bire sanki bir tekrar ortaya çıkıyormuş gibi; çünkü 0091 başta da vardı.

Eğer 220 basamaklık bir hesaplama yaparsak göreceğiz ki, bu kesirde 108 rakamlık bir devir bulunmaktadır.

1÷109=0.009174311926605504587155963302752293577
981651376146788990825688073394495412844036697247
706422018348623853211<u>009174311926605504587155963</u>
<u>302752293577981651376146788990825688073394495541</u>
<u>284403669724770642201834862385321</u>1009174
Eğer hesaplamamızı 330 basamağa kadar götürürsek periyot daha açık olarak karşımıza çıkacak.

1÷109=0.**009174311926605504587155963302752293577981**
651376146788990825688073394495412844036697247706
422018348623853211009174311926605504587155963302
752293577981651376146788990825688073394495412844
036697247706422018348623853211**009174311926605504587**
155963302752293577981651376146788990825688073394
495541284403669724770642201834862385321100917417

Böylece (kanıtımız olmasa da) bir bayağı kesrin, tekrar eden rakamlardan oluşan bir ondalık karşılığı olduğu sonucunu çıkarabiliriz. Bazı, bizim de tanışık olduğumuz çok bilinen kesirler şunlardır:

$1 \div 3 = .33333333$

$1\text{-}13 = 0.076923076923076923076923076923$

Bu noktaya kadar gördük ki, bir bayağı kesir, bazen çok uzun ($1 \div 109$ örneği) ya da bazen çok kısa ($1 \div 3$ örneği) olabilen rakam periyotlarından oluşmuş ondalık sayılara dönüştürülebiliyor. Öyle görünüyor ki, biraz belirsiz de olsa, bir kesir devirli bir ondalık sayı verirken, bir irrasyonel sayı veremez. Ama bu, bir irrasyonel sayının bir kesir olarak ifade edilemeyeceğini kanıtlamaz.

İşte size, gayretli (ve meraklı) okuyucular için, $\sqrt{2}$'nin bir bayağı kesir olarak ifade edilemeyeceğini ve bu nedenle tanım gereği irrasyonel olduğunu gösteren hoş bir kanıt.

Varsayalım ki, $a \div b$ sadeleştirilmiş bir kesir; bu, a ve b'nin ortak çarpanı yok demektir.

Bu ispatı olmayana ergi metoduyla yapacağız; yani, önce bir versayım öne süreceğiz; daha sonra bunun yanlış olduğunu göstereceğiz ve bu da varsayımın tersinin doğruluğu gösterecek.

Varsayalım ki, $a \div b = \sqrt{2}$. O zaman $a^2 \div b^2 = 2$ ya da $a^2 = 2b^2$'dir; bu, a ya da a^2'nin 2 ile bölünebildiği anlamına gelir; başka türlü yazarsak, $a = 2r$;(*) r bir tam sayıdır.

O zaman $4r^2 = 2b^2$ ya da $2r^2 = b^2$.

Böylece diyebiliriz ki, b ya da b^2 2 ile bölünebilir.

Bu başta söylediğimiz, a ile b'nin hiçbir ortak çarpanı yoktur var sayımına aykırıdır; bu nedenle diyebiliriz ki $\sqrt{2}$ asla bir bayağı kesir olarak ifade edilemez.

İlk başta bu ispatı anlamak bazıları için biraz zor olabilir; ama yavaş, dikkatli ve adım adım takip onu, çoğu okuyucu için anlaşılır kılacaktır.

(*) Herhangi bir çift sayı, herhangi bir tam sayının 2 katı olarak yazılabilir ya da ifade edilebilir. Burada biz r tam sayısını kullanıyoruz.

1.23 Ardışık Tam Sayıların Toplamları

Hangi sayılar ardışık tam sayıların toplamı olarak yazılabilirler? Genel bir kural ortaya koymaya çalışmadan önce, belki bazı deneyler yapmak istersiniz. Örneğin, ilk doğal sayılardan bazılarını ardışık tam sayıların toplamı olarak yazmaya çalışın. Aşağıdaki listede biz size bazılarını sunuyoruz:

2 = not popsible	21 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6
3 = 1 + 2	22 = 4 + 5 + 6 + 7
4 = not popsible	23 = 11 + 12
5 = 2 + 3	24 = 7 + 8 + 9
6 = 1 + 2 + 3	25 = 12 + 13
7 = 3 + 4	26 = 5 + 6 + 7 + 8
8 = not popsible	27 = 8 + 9 + 10
9 = 4 + 5	28 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6+ 7
10 = 1 + 2 + 3 + 4	29 = 14 + 15
11 = 5 + 6	30 = 4 + 5 + 6 + 7 + 8
12 = 3 + 4 + 5	31 = 15 + 16
13 = 6 + 7	32 = not popsible
14 = 2 + 3 + 4 + 5	33 = 10 + 11 + 12
15 = 4 + 5 + 6	34 = 7 + 8 + 9 + 10
16 = not popsible	35 = 17 + 18
17 = 8 + 9	36 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8
18 = 5 + 6+ 7	37 = 18 + 19
19 = 9 + 10	38 = 8 + 9 + 10 +11
20 = 2 + 3 + 4 + 5 + 6	39 = 19 + 20
	40 = 6 + 7 + 8 + 9 + 10

Ne var ki, bu ardışık tam sayı toplamları ile ilgili gösterimler tek tip değillerdir. Örneğin 30 birden fazla şekilde ifade edilebilir:

30 = 9 + 10 + 11 ya da 30 = 6 + 7 + 8 + 9.

Tabloya şöyle bir bakmanız size gösterecektir ki, 2'nin kuv-

vetleri olan sayılar için böyle bir toplam mümkün değildir.

Gerçekten bu çok ilginç bir olgudur. Beklenebilecek bir şey değildir. Bu ardışık sayı toplamlarının listelerini yaparak bazı ilginç modelleri göremeye başlayabilirsiniz. Açıktır ki, üçgen sayılar ilk n doğal sayının(*) toplamına eşit olacaktır. 3 herhangi bir katı, örneğin 3n, her zaman şu toplamla ifade edilebilir: $(n\text{-}1) + n + (n+1)$. Başka modeller de keşfedebilirsiniz. İşin eğlenceli kısmı budur (onun sayı modelleri ve ilişkilerini görmeyle ilgili öğretici değeri bir yana).

Aşırı titizler ve daha meraklı ya da matematiğe hazırlıklı okuyucular için (şu ana kadar) varsayım olan ifademizi ispatlayalım. İlk başta ne zaman bir sayının en azından iki ardışık pozitif tam sayının toplamı şeklinde yazılabileceğini göstereceğiz.

Şimdi gelin hangi değerlerin (iki ya da daha fazla) a'dan b'ye ardışık pozitif tamsayıların toplamı (S) olarak alınabileceğini analiz edelim. $(b > a)$

$$S = a + (a+1) + (a+2) + \ldots\ldots (b\text{-}1) + b = (a+b\div 2)\,(b\text{-}a+1)$$

Bu sonuca aritmetik serilerin toplamı formülünü kullanarak ulaştık.† Daha sonra her iki tarafı da iki ile çarparsak: $2S = (a + b)\,(b - a + 1)$

$(a + b)$'ye x ve $(b - a + 1)$'e de y dersek, far ederiz ki, x ve y tam sayılardır ve toplamları, $x + y = 2b + 1$ olduğundan x ve y'den birisi tek sayı ve diğeri çift sayıdır. Dikkat ediniz ki $2S = xy$'dir.

Durum 1. S 2'nin bir kuvvetidir.

Varsayalım ki, $S = 2^n$. Elimizde $2(2^n) = xy$ ya da $2^{n+1} = xy$ vardır. 2^{n+1} sadece, eğer tek sayı 1 ise bir tek sayı ve çift sayının çarpımı olarak ifade edilebilir. Eğer $x = a + b = 1$ ise, o

(*) Unutmayın ki doğal sayılar sayma sayılarıdır: 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...

Bir aritmetik serinin toplamı şudur: $S = n/2(a+l)$; burada n terim sayısı, a ilk terim ve l son terimdir.

zaman a ve b pozitif tam sayılar olamazlar. Eğer $y = b - a + 1 = 1$ ise, o zaman $a = b$'dir ki bu da mümkün değildir; o halde S 2'nin bir kuvveti olamaz.

Durum 2. S 2'nin bir kuvveti değildir.

Varsayalım ki, $S = m2^n$; burada m 1'den büyük bir tek sayıdır. Elimizde şunlar var; $2(m2^n) = xy$ ya da $m2^{(n+1)} = xy$. Şimdi öye pozitif a **ve** b **tam sayıları** bulacağız ki, $b > a$ **ve** $S = a + (a+1) + \ldots b$ olacak.

2^{n+1} ve m eşit değillerdir; çünkü biri tek birisi de çifttir. Bu nedenle biri diğerinden büyüktür. x'e daha büyük, y'ye ise daha küçük diyelim. Bu isimlendirme bize a ve b için bir çözüm verir; b'ye pozitif bir tamsayı değeri vererek $x + y = 2b + 1$; a'ya pozitif bir tamsayı değeri vererek $x - y = 2a - 1$ olur. Ayrıca, $y = b - a + 1 > 1$'dir; böylece olması gereken şekilde $b > a$'dır. a ve b'yi elde ettik.

Bu nedenle, 2'nin kuvveti olmayan herhangi bir S değeri için a ve b gibi pozitif tamsayı değerleri bulabiliriz; öyle ki, $S = a + (a+1) + \ldots b$ olacak şekilde.

Özetlersek, bir sayı ancak ve ancak 2'nin kuvveti değilse, (en az iki) pozitif tamsayının toplamı olarak ifade edilebilir. Bu size gereksizmiş gibi görünebilir; ama biraz önce matematiğin hoş yanlarıyla uğraşarak bir şeyler başardığınızı ve matematiğin güzelliklerini daha iyi anladığınızı fark etmeniz gerekir.

2

Bazı Aritmatik Harikaları

Artık hesap makinesi hepimizin elinde olduğundan, aritmetiği ağır bir yük olarak görmemekteyiz. Şöyle bir değerlendirdiğimizde hep belli bazı aritmetik algoritmaları(*) ezberlemek zorunda kaldığımızı, aritmetiğin doğası ve güzelliğini anlama fırsatımızın pek olmadığını görüyoruz. Aritmetik prosedürlerin içinde kısa yollar ve hantal aritmetik işlemlerden kurtulmak için kullanılan kimi "hileler" vardır. Örneğin, bir sayının iyi bir şekilde gözlemlenmesi, onun bölenlerini bulma konusunda çok yararlı bir teknik olabilir. Ayrıca, çarpmanın bazı alternatif şekilleri yararlı olmanın yanında eğlencelidir de. Her durumda, bunlar aritmetik konusuna hayat verip konu hakkında yeni fikirler elde etmemizi sağlarlar.

Okuyacağınız bölüm, aritmetik işlemlerin doğasını anlamanızı kolaylaştıracak bazı eğlenceli bölümler içermektedir. Örneğin, "alfametik" hakkındaki bölüm, ezberci aritmetik algoritmaların ötesinde, basamak değeri sistemi üzerinde çalışma imkânı verir. Bu bölümde gerçekten eğleneceksiniz; çünkü olgunlaşmış kavrayışınızı temel bir durum üzerine yoğunlaştıracaksınız.

72 Kuralı ile ilgili bölüm özellikle yararlıdır; eğer bileşik faizle uğraşıyorsanız ya da bileşik faiz etkisinin gücü ile ilgili biraz bilgi istiyorsanız. Bu kısımdan ne kadar şey öğrene-

(*) Bir algoritma adım adım giden bir problem çözme prosedürüdür; özellikle, yerleşik, tekrarlamalı, bilgisayar tarafından bir problemi sonlu bir basamak sayısında çözmek için geliştirilmiş olan bir prosedür. Aritmetik algoritmalara örnek sayıları çarpma ve bölmeyle ilgili olan algoritmalardır.

ceğiniz sizin motivasyonunuza bağlıdır. Bu sadece bir algoritma olarak telakki edilebilir ya da nasıl işlediğini keşfetmek için yakından incelenebilir.

Özünde bu bölüm, aritmetiğin uygulamalarının çeşitli yönlerini okuyucuya sunar ve tek amacı kafasında kötü bir önyargı oluşmuş olan okuyucunun ilgisini konuya çekmektir.

2.1 11'le Çarpmak

Bir matematik "hile" ne kadar basitse, o kadar çekici olmaya eğilimlidir. İşte size 11 ile çarpmak için çok çekici bir yol. Bu her zaman, kuvvetli matematik korkusuna sahip kişilerin asabını bozacak bir yöntemdir; çünkü o kadar basittir ki bir hesap makinesine ihtiyacımız bile yoktur!

Kural çok basittir: *İki basamaklı bir sayıyı 11 ile çarpmak için yalnızca iki rakamı toplayın ve bu toplamı iki rakamın arasına koyun (tabii ki, aşağıda açıklandığı gibi uygun bir "taşımayla").*

Şimdi bu tekniği deneyelim. Varsayalım ki 45'i 11 ile çarpacağız. Kurala göre 4 ile 5'i toplayalım ve çıkan sonucu 4 ile 5 arasına yerleştirelim ki sonuç 495'tir.

Şimdi durum biraz zorlaşıyor. Varsayalım ki, rakamın toplamı yine iki basamaklı bir sayı ortaya çıkardı. Böyle bir durumda ne yapacağız? Artık elimizde ortaya yerleştireceğimiz tek basamaklı bir sayı yok. O zaman, eğer elimizdeki toplam 9'dan büyükse toplamın birler basamağındaki sayıyı 11 ile çarpılacak sayının iki rakamının arasına koyar, onlar basamağındaki sayıyı da çarpılan(*) sayının yüzler basamağına eklenmek üzere "taşırız." Şimdi bunu 78 • 11 çarpımında deneyelim.

(*) Çarpılan, başka bir sayı tarafından, çarpan tarafından çarpılan sayıdır. Aritmetikte, problemin nasıl sunulduğuna bağlı olarak çarpan ve çarpılan yer değiştirebilir; çünkü bunların ikisi yer değiştirdiğinde sonuç değişmeyecektir. Örneğin 2 x 3 ve 3 x 2.

7 + 8 = 15. 5'i 7 ile 8 arasına yerleştiriyoruz ve 1'i 7'ye ekliyoruz; [7 + 1] [5] [8] ya da 858.

Doğal olarak 11 ile çarpma kuralının iki basamaklı sayılardan daha büyük sayılar için de doğru olup olmadığını sorabilirsiniz.

Şimdi 12.345 gibi daha büyük sayıları 11 ile çarpmayı deneyelim.

Burada en sağdaki rakamdan başlıyoruz; sağdan sola doğru giderken her bir rakam çiftini birbirine ekliyoruz ve toplamları sırayla soldaki en son numaraya gelene kadar yerleştiriyoruz.

1[1 + 2] [2 + 3] [3 + 4] [4 + 5] 5 = 135.795.

Eğer herhangi bir rakam çiftinin toplamı 9'dan büyükse, daha önce bahsettiğimiz prosedürü uyguluyoruz. Birler basamağını bırakın ve onlar basamağında sayıyı yandaki, soldaki çiftin toplamına ekleyin; şimdi böyle bir örneği yapalım.

6.789'u 11 ile çarpalım.

Şimdi bu işlemi adım adım yapalım (italik yazılan sayılar taşınan sayılardır):

6 [6 + 7] [7 + 8] [8 + 9] 9	Sondaki rakamlar dışındaki rakamları birbirleriyle toplayın
6 [6 + 7] [7 + 8] [17] 9	8 + 9 = 17.
6 [6 + 7] [7 + 8 + *1*] [7] 9	1'i (17'den) bir sonraki toplama taşıyın.
6 [6 + 7] [16] [7] 9	7 + 8 + 1 = 16.
6 [6 + 7 + *1*] [6] [7] 9	1'i (16'dan) bir sonraki toplama taşıyın.
6 [14] [6] [7] 9	6 + 7 + 1 = 14.
[6 + *1*] [4] [6] [7] 9	1'i (14'ten) bir sonraki toplama taşıyın.
[7] [4] [6] [7] 9	6 + 1 = 7 ve sonuç 74.679'dur.

Bu 11 ile çarpma kuralını arkadaşlarınızla paylaşmalısınız. Yalnızca sizin zekânızdan etkilenmeyecekler; aynı zamanda bu kısa yolu öğrenmekten de çok hoşlanacaklardır.

2.2 Ne Zaman Bir Sayı 11 ile Bölünebilir?

En garip zamanlarda, bir sayının 11'le bölünüp bölünemediği meselesi çıkar karşımıza. Eğer elinizde bir hesap makinesi varsa, problem kolayca çözümlenebilir. Fakat her zaman bu böyle olmayabilir. Ayrıca, 11'le bölünebilirliği test eden çok akıllıca bir "kural" bulunmaktadır ve çekiciliği nedeniyle öğrenmeye değerdir.

Kural oldukça basittir: *Eğer almaşık rakam gruplarının toplamlarının farkları 11 ile bölünebiliyorsa, orijinal sayı da 11 ile bölünebilir.*

Bu biraz karışık gelmiş olabilir; ama aslında değildir. Bu kuralın uygulanmasına bir bakalım. Almaşık rakam gruplarıyla kastedilen, sayının bir ucundan başlayıp birinci, üçüncü, beşinci vb. sayıları alarak birbirleriyle toplamaktır. Daha sonra çift sayılı olan rakamlar toplanır. Bu iki toplam birbirinden çıkarılır ve farkın 11 ile bölünüp bölünmediğine bakılır.

Sanırım bu en iyi bir örnekle gösterilebilir. Şimdi 768.614'ü 11'e bölünebilirlik açısından test edeceğiz.

Almaşık rakam gruplarının toplamı şöyledir: 7 + 8 + 1 = 16 ve 6 + 6 + 4 = 16. Bu iki toplamın farkı 16 – 16 = 0'dır ki bu 11'le bölünebilir.(*) Böylece 768.614 sayısının 11'le bölünebileceği sonucuna varırız.

Başka bir örnek, bu prosedürle ilgili olan anlayışınızı kuvvetlendirmenizi sağlayabilir. 918.082'nin 11'e bölünüp bölün-

(*) Hatırlayın ki $0 \div 11 = 0$. Ne var ki, $11 \div 0$ = belirsiz.

mediğini anlamak için almaşık rakamların toplamını bulalım:

$9 + 8 + 8 = 25$ ve $1 + 0 + 2 = 3$.

Bu iki toplamın farkı $25 - 3 = 22$'dır ki bu 11'le bölünebilir. Böylece 918.082 sayısının 11'le bölünebileceği sonucuna varırız.(*)

Şimdi bu kuralla biraz pratik yapın. Bunu sadece yararlı bir şey olarak görmeyeceksiniz; aynı zamanda matematiğin tutarlılığını ve gücünü de fark edeceksiniz.

2.3 Ne Zaman Bir Sayı 3 ya da 9 ile Bölünebilir?

Günlük hayatta öyle durumlar vardır ki, bir sayının doğasını anlamak oldukça yararlı olabilir; özellikle bunu "kafanızda" aniden yapabiliyorsanız. Örneğin 71.22 dolar değerindeki bir restoran faturasının üçe bölünmesi gerekebilir. Gerçekte bölmeye başlamadan önce, faturanın gerçekten üçe bölünüp bö-

---

(*) İlgili okuyucular için bu kuralın niye işlediği ile ilgili burada kısa bir tartışma verilecektir. 10'luk sayı sisteminde ab,cde sayısını düşünün; bu sayı şöyle ifade edilebilir:

$N=10^4a + 10^3b + 10^2c + 10d + e = (11-1)^4a + (11-1)^3b + (11-1)^2c + (11-1)d + e$

$= [11M + (-1)^4]a + [11M + (-1)^3]b + [11M + (-1)^2]c + [11 + (-1)]d + e$

$= 11M [a + b + c + d] + a - b + c - d + e$; bu da bize, N'nin 11'e bölünebilirliğinin $a - b + c - d + e$'nin 11 ile bölünebilirliğine bağlı olduğunu gösterir; bu aynı zamanda $a - b + c - d + e = (a+c+e) - (b+d)$'ye yani almaşık olarak gruplanmış rakamların farkına eşittir.

Not: $11M$ 11'in bir katına tekabül eder.

İlgili okuyucular için bu kuralın niye işlediği ile ilgili burada kısa bir tartışma verilecektir. 10'luk sayı sisteminde ab, cde sayısını düşünün; bu sayı şöyle ifade edilebilir:

$N = 10^4a + 10^3b + 10^2c + 10^1 + e = (9+1)^4a + (9+1)^3b + (9+1)^2c + (9+1)d + e$

$= [9M + (1)^4]a + [9M + (1)^3]b + [9M + (1)^2]c + [9M + (1)]d + e$

$= 11M [a + b + c + d] + a + b + c + d + e$; bu da bize, N'nin 9'a bölünebilirliğinin $a + b + c + d + e$'nin 9 ile bölünebilirliğine bağlı olduğunu gösterir ki bu da rakamların toplamıdır.

Not: $9M$ 9'un bir katına tekabül eder.

lünemeyeceği –düşünsel anlamda tabii ki– sorusu gündeme gelebilir. Bunu belirlemek için bir aritmetik kısa yol olsaydı hoş olmaz mıydı? Peki, işte matematik sizi kurtarmaya geliyor. Şimdi siz bir sayının 3'e ya da (bu da hediyesi) 9'a bölünüp bölünemediği ölçen bir metot sunacağım.

Kural yine çok basit: *Eğer bir sayının rakamlarının toplamı 3'e (ya da 9'a) bölünebiliyorsa, sayının kendisi de 3'e (ya da 9'a) bölünebilir.*(*)

İşte bu kuralı anlamanızı sağlayacak bir örnek.

Şimdi 296.357 sayısını düşünelim ve onu 3'e (ya da 9'a) bölünebilirlik açısından test edelim.

Rakamlarının toplamı, 2 + 9 + 6 + 3 + 5 + 7 = 32'dir ki bu sayı 3'e ya da 9'a bölünmez.

Bu nedenle orijinal sayı 3'le ya da 9'la bölünemez.

İşte bir başak örnek: 457.875 sayısı 3'e ya da 9'a bölünebilir mi? Rakamlarının toplamı 4 + 5 + 7 + 8 + 7 + 5 = 36'dır(**) ki bu 9'la bölünebilir (ve tabii ki 3'le de bölünebilir); öyleyse 457.875 sayısı 3 ya da 9 ile bölünebilir diyebiliriz.

Son bir örnek: 27.987 3 ya da 9'la bölünebilir mi? Rakamlarının toplamı 2 + 7 + 9 + 8 + 7 = 33'dür ki bu 3'le bölünebilir fakat 9 ile bölünemez; öyleyse 27.987 sayısı 3 ile bölünebilir 9'la bölünemez diyebiliriz.

Şimdi bir sayının 3 ya da 9'la bölünüp bölünemeyeceğini belirleme konusunda uzman olduğunuza göre 71.22 dolarlık restoran faturasının 3'e bölünüp bölünemeyeceği ile ilgili orijinal sorumuza dönebiliriz. Onu üç eşit parçaya bölebilir mi-

(*) Eğer bir ihtimal, rakamlarının toplamının 3 ya da 9 ile bölünebildiği *sizin* için yeteri kadar açık değilse; o zaman bu sayının da rakamlarının toplamını alın ve 3 ya da 9 ile bölünebilirliğe gözünüzle karan verene kadar işleme devam edin. Bu arada, son iki basamağı 4 ile bölünebilen bir sayı 4 ile bölünebilir. Ayrıca, son üç basamağı 8 ile bölünebilen bir sayı 8 ile bölünebilir. Bu kuralı 2'nin daha büyük kuvvetleri için genelleştirebilirsiniz.

(**) Eğer bir sayının son iki rakamı 25 bölünebiliyorsa o sayı 25 ile bölünebilir. Bu kural 2'nin kuvvetleriyle ilgili olana benzerdir. 2 ile 5 arasında bir ilişki sezebildiniz mi? Evet, onlar bizim sayı sistemimizin tabanı olan 10'un çarpanlarıdır.

yiz? 7 + 1 + 2 + 2 = 12 olduğundan 12 üçle bölünebilir; böylece 71.22 de.

2.4 Asal Sayılarla Bölünebilirlik

Bir önceki bölümde bir sayının 3 ya da 9 ile bölünüp bölünemeyeceğini belirleyen küçük, etkileyici bir tekniği sunduk sizlere. Birçok kişi, bir rakamın son basamağına bakarak (yani, birler basamağı) bir sayının 2 ya da 5 ile bölünüp bölünemeyeceğini söyleyebilir. Yani, eğer bir sayının son rakamı bir çift sayı ise (0, 2, 4, 6, 8 gibi), o zaman o sayı 2 ile bölünebilir.(*) Benzer bir şey 5 için geçerlidir: Eğer incelenen sayının son basamağı 0 ya da 5 ise, o zaman sayı 5 ile bölünebilir.‡ O zaman şu soruyu sorabiliriz: diğer sayılarla ilgili böyle kurallar var mıdır? Mesela asal sayılar?

Hesap makinesinin yaygın olarak kullanılmasından bu yana, hangi sayının hangi sayıyı böldüğünün bulunması ile ilgili pek bir problem kalmamıştır. Bölme işlemini kolayca hesap makinesinde yapabilirsiniz. Ne var ki, matematiği daha iyi kavramak adına, bölünebilme kuralları, sayıların doğası ve özelliklerine doğru giden ilginç bir "pencere" açar. Bundan dolayı (diğerlerinin arasında), bölünebilme kuralları hâlâ matematik öğrenimi konuları arasında kendisine bir yer bulmaktadır.

Asal sayılarla ilgili bölünebilme kurallarının bulunması her zaman en kafa karıştırıcı şeylerden birisi olmuştur. Bu özellikle, 2'den 6'ya kadar gelen hoş bölünebilme testlerini takiben ortaya çıkan 7 ile bölünebilme kuralları için doğrudur.* Yakında göreceğiniz gibi, kimi asal sayılar için geliştirilmiş bölünebilme kuralları gerçek bölme algoritmaları kadar uğraştırıcıdır; yine de bunlar eğlendiricidirler ve ister inanın ister inanmayın

(*) 6 ile bölünebilme kuralı basitçe 2 ve 3 ile bölünebilme kuralının birlikte kullanılmasıdır –bir sayının 6 ile bölünebilmesi için her ikisi ile de bölünebilmesi gerekir.

kimi zaman da yararlıdırlar.

Gelin şimdi 7 ile bölünebilme kuralına bakalım ve bunun diğer asal sayılar için nasıl genelleştirilebileceğini inceleyelim.

7 ile bölünebilme kuralı: *Verilen sayının son basamağını silin. Bu sayıyı kalan sayıdan iki kere çıkartın. Eğer çıkan sayı 7 ile bölünebiliyorsa orijinal sayı da 7 ile bölünebiliyor demektir. Eğer çıkan sayı 7 ile bölünebilmenin tespiti için çok büyükse, bu işlem tekrar tekrar kullanılabilir.*

Bu kuralın nasıl işlediğini bir örnek üzerinde görelim. Varsayalım ki, 876.547'nin 7 ile bölünüp bölünmediğine bakmak istiyoruz.

876.547 ile başlıyoruz ve birler basamağını, 7'yi siliyoruz; daha sonra bunu ikiyle çarpıp, 14, kalan sayıdan çıkarıyoruz; 87.654 – 14 : 87.640.

Bu sayının 7'ye bölünüp bölünemeyeceği hakkında bir yorumu sayıya bakıp yapamayacağımızdan dolayı işleme devam edelim.

87.640'la devam ediyoruz; birler basamağını, 0'ı silelim; bunu ikiyle çarpalım, yine 0, ve kalan sayıdan çıkaralım; 8.764 – 0 : 8.764.

8.764 da bizim 7 ile bölünebilme ile ilgili yapacağımız yorumu kolaylaştırmadı; öyleyse işleme devam edelim.

8.764 ile devam edelim; birler basamağındaki sayıyı silelim, 4; bu sayıyı iki ile çarpıp, 8, bu sayıyı kalan sayıdan çıkaralım:

876 – 8 : 868.

Bu sayının 7'ye bölünüp bölünemeyeceği hakkında bir yorumu sayıya bakıp yapamayacağımızdan dolayı işleme devam edelim.

868 elimizde olan sayı; birler basamağını silelim, 8, onun iki katını, 16, elimizdeki sayıdan çıkartalım; böylece elimizde, 86 – 16 = 70 olur; bu sayı 7 ile bölünebilir. Bu nedenle 876.547 sayısının 7 ile bölünebildiğini söyleyebiliriz.

Asal sayılarla bölünebilme bahsimize devam etmeden önce, bu kuralla biraz pratik yapmalısınız; birkaç rastgele sayı seçip daha sonra da sonuçları hesap makinesi ile karşılaştırın.

Şimdi de matematiğin güzelliğine bakalım biraz. Bu prosedürün nasıl çalıştığını anlamak matematiksel açıdan muhteşem bir şeydir. Matematik genellikle bizim kanıtlayamayacağımız şeyler yapmaz.(*) Bu prosedürde olanları anladıktan sonra ne demek istediğimi daha iyi kavrayacaksınız.

7 ile bölünebilirliği kanıtlamak için çeşitli, olası ("attığınız") son rakam durumlarını ve buna bağlı olarak son rakamın atılmasıyla oluşan çıkarma işlemini düşünün. Aşağıdaki tablo size, çıkarılacak sayının birler basamağını elde etmek için sondaki sayıyı atıp ikiyle çarpmanın nasıl her durumda 7'nin bir katını verdiğini gösterecek. Bu demektir ki, siz her defasında orijinal sayıdan "7 kümelerini" alıyorsunuz. Bu nedenle, eğer kalan sayı 7 ile bölünebiliyorsa, bu durumda orijinal sayı da bölünecektir; çünkü siz orijinal sayıyı ikiye böldünüz; öyle ki her iki küme de 7'ye bölünebiliyor; öyleyse orijinal sayının da bölünebilmesi gerekir.

Son rakam	**Orijinalden çıkarılacak sayı**	**Son rakam**	**Orijinalden çıkarılacak sayı**
1	$20 + 1 = 21 = 3 \cdot 7$	5	$100 + 5 = 105 = 15 \cdot 7$
2	$40 + 2 = 42 = 6 \cdot 7$	6	$120 + 6 = 126 = 18 \cdot 7$
3	$60 + 3 = 63 = 9 \cdot 7$	7	$140 + 7 = 147 = 21 \cdot 7$
4	$80 + 4 = 84 = 12 \cdot 7$	8	$160 + 8 = 168 = 24 \cdot 7$
		9	$180 + 9 = 189 = 27 \cdot 7$

13 ile bölünebilme kuralı: *Bu, 7 ile bölünebilme kuralının bir benzeridir; 13, 7 ile yer değiştirir; ama sildiğimiz rakamın iki katını çıkarmak yerine her defasında sildiğimiz rakamın dokuz katını çıkarırız.*

(*) Matematikte uygun bir doğrulama (ya da ispata) sahip olmayan bir kaç fenomen vardır; fakat bu, gelecekte bunların çözümünü bulamayacağız demek değildir. Fermat'nın varsayımının kanıtlanması 350 yıl almıştır. Bu, birkaç yıl önce Dr. Andrew Wiles tarafından yapılmıştır.

Şimdi gelin 13'le bölünebilmeyi 5.616 sayısında test edelim.

5.616 ile başlayalım ve onun birler basamağını silelim; 6, ve 6 • 9 = 54'ü kalan sayıdan çıkaralım:

561 – 54 = 507

Bu sayının 13'e bölünüp bölünemeyeceği hakkında bir yorumu sayıya bakıp yapamayacağımızdan dolayı işleme devam edelim.

507 ile başlayalım ve onun birler basamağını silelim; 7, ve 7 • 9 = 63'ü kalan sayıdan çıkaralım:

50 – 63 = -13; bu sayı 13 ile bölünebilir ve bu nedenle orijinal sayınında 13 ile bölünebildiğini söyleyebiliriz.

9 "çarpanını" belirlemek için, 13'ün 1 ile biten en küçük katını aradık. Bu 91'di; burada onlar basamağı birler basamağının 9 katıdır. Bir kez daha aşağıdaki tabloya bakıp olası son rakam durumlarını ve buna bağlı olarak son rakamın atılmasıyla oluşan çıkarma işlemlerini düşünün.

Son rakam	Orijinalden çıkarılacak sayı	Son rakam	Orijinalden çıkarılacak sayı
1	90 + 1 = 91 = 7 • 13	5	450 + 5 = 455 = 35 • 13
2	180 + 2 = 182 = 14 • 13	6	540 + 6 = 546 = 42 • 13
3	270 + 3 = 273 = 21 • 13	7	630 + 7 = 637 = 49 • 13
4	360 + 4 = 364 = 28 • 13	8	720 + 8 = 728 = 56 • 13
		9	810 + 9 = 819 = 63 • 13

Her durumda 13 bir ya da daha fazla kere orijinal sayıdan çıkartılmaktadır. Bu nedenle eğer kalan sayı 13 ile bölünebiliyorsa, orijinal sayı da bölünebiliyor demektir.

17 ile bölünebilme: *Son rakamı silin ve son rakamı 5 ile*

çarptıktan sonra kalan sayıdan çıkarın; ta ki sonuçta ortaya çıkan sayının 17 ile bölünüp bölünemediğini belirleyene kadar.

17 ile bölünebilme kuralını, tıpkı 7 ve 13 için yaptığımız gibi kanıtlarız. Prosedürdeki her bir aşama sayıdan "17 kümelerini" çıkarmamamızı sağlar; ta ki biz gözümüzle sayının 17 ile bölünüp bölünemeyeceğine karar verene kadar.

Yukarıdaki (7, 13 ve 17 için) geliştirilmiş olan 3 model sizi, daha büyük asal sayılarla bölünebilmenin test edilmesine yarayan metotları geliştirmeye yönlendirmiş olmalı. Aşağıdaki tablo, birçok asal sayı için silinecek olan rakamın kaçla "çarpılması" gerektiğini göstermektedir.

Bölünebilmenin test edileceği sayı:	7	11	13	17	19(*)	23	29	31	37	41	43	47
Çarpan :	2	1	9	5	17	16	26	3	11	4	30	14

Bu tabloyu genişletmek isteyebilirsiniz. Bu eğlencelidir ve matematiği algılayışınızı kuvvetlendirecektir. Ayrıca, bölünebilmeyle ilgili kurallar hakkındaki bilginizi bileşik (asal olmayan) sayılara doğru genişletmek de isteyebilirsiniz. Aşağıdaki kuralın neden herhangi bir çarpanla değil de aralarında asal olan çarpanla ilgili olduğu sorusu, sizin sayıların özellikleriyle ilgili kavrayışınızı keskinleştirecek bir şeydir. Belki de bu soruya verilebilecek en basit yanıt, aralarında asal çarpanların bağımsız kurallara sahip olduğu ama herhangi bir çarpanın tek başına olmadığıdır.

Bileşik sayılarla bölünme: Verilen bir sayı, bir bileşik sayı tarafından, ancak verilen sayı onun her bir aralarında asal çarpanı(**) tarafından bölünebiliyorsa bölünebilir.

Aşağıdaki tablo bu kuralı resmeder. Bu tabloyu 48'e kadar tamamlamayı deneyin.

(*) 19 için bir başka ilginç bölünebilme kuralı vardır: yani, 19 için test edilecek sayının son rakamını silin ve onun iki katını kalan sayıya ekleyin; bu işlemi 19 ile bölünebilmeyi görene kadar sürdürün.

(**) İki sayı, eğer 1'den başka ortak çarpanları yoksa aralarında asaldır.

Bölmeyi yapacak sayı	6	10	12	15	18	21	24	26	28
Verilen sayının bölünmesi gereken sayılar	2,3	2,5	3,4	3,5	2,9	3,7	3,8	2,13	4,7

İşte şimdi bu noktada, yalnızca elinizde bölünebilmeyle ilgili geniş bir kurallar listesi yoktur; aynı zamanda temel sayılar teorisiyle ilgili de ilginç bir kavrayış edinmiş durumdasınız. Bu kuralları kullanarak pratik yapın (ta ki daha fazla aşina olana kadar) ve onluk tabandaki diğer sayılarla ilgili de kurallar geliştirmeye çalışın; bu kuralları diğer tabanlara genelleştirmeye çalışın. Ne yazık ki, yer azlığı daha yüksek bir ilerlemeyi burada engellemekte. Ama, açlığınızı biraz olsun bastırdığımı umuyorum.

2.5 Rus Köylüsünün Çarpma Metodu

Bir söylenceye göre, iki sayıyı çarpmak için Rus köylüleri oldukça garip ve belki de oldukça ilkel bir metot kullanıyorlardı. Aslında bu oldukça basittir; ama bir o kadar da yorucudur. Şimdi gelin bu metoda bir göz atalım.

Varsayalım ki, 43 • 92 çarpımının sonucu bulma problemiyle karşı karşıyayız:

Şimdi gelin bu çarpma işlemini beraber yapalım. İki kolonlu bir tablo yapmakla işe başlıyoruz; ilk sırada çarpının iki üyesi bulunuyor. Aşağıda göreceğiniz gibi 43 ve 92 kolonların ilk sırasındadır. İlk kolon bir sonraki sayıyı bulmak için her sayının ikiyle çarpılmasıyla oluşacak; diğer kolon ise sayıların ikiye bölünmesi ve kalanın atılmasıyla oluşacak. Kolaylık olsun diye, ilk kolonumuz ikiyle çarpma kolonu, ikinci kolonumuz ise ikiye bölme kolonu olacak. Dikkat ediniz

ki, 23 gibi bir tek sayıyı ikiye bölmek (ikinci kolondaki üçüncü sayı) 1 kalanıyla birlikte bize 11'i verecek; burada basitçe 1'i atıyoruz. Artık ikiye bölme işleminin geri kalanı daha açık hale gelmiş olmalı. İşlem "ikiye bölme" kolonunda 1'e geldiğimiz zaman bitiyor.

İkiyle çarpma	*İkiye bölme*
43	92◊
86	46◊
172	**23◊**
344	**11◊**
688	**5◊**
1.376	2◊
2.752	**1◊**

İkiye bölme kolonundaki tek sayıları bulun (sağdaki kolon); bu sayıların ikiyle çarpma (soldaki kolon) kolonundaki karşılıklarının toplamını alın. Bunlar koyu olarak yazılmışlardır. Soldaki kolondaki koyu yazılmış sayıların toplamı size 43 ve 92 sayılarının çarpımını verecektir. Diğer bir deyişle, Rus köylüsünün çarpma metoduyla şunu elde ederiz; 43 • 92 = 172 + 344 + 688 + 2.752 = 3.956.

Önceki örnekte ilk kolonu ikiyle çarpma kolonu olarak, ikinci kolonu ise ikiye bölme kolonu olarak belirlemiştik. Biz bu Rus köylüsü metodunu, ilk kolondaki sayıları ikiye bölerek ve ikinci kolondaki sayıları da ikiyle çarparak da uygulayabiliriz. Aşağıya bakınız.

İkiyle bölme	*İkiyle çarpma*
◊ **43**	**92**
◊ **21**	**184**
◊ 10	368

◊ 5	736
◊ 2	1.472
◊ **1**	**2.944**

Çarpmayı tamamlamak için ikiye bölme kolonundaki tek sayıları buluyoruz (koyu yazılmışlar); bu sayıların yan kolondaki (ikiyle çarpma) eşlerinin toplamını alıyoruz. Bu bize şunu verir: 43 • 92 = 92 + 184 + 736 + 2.944 = 3.956.

Bu ileri teknoloji çağında, çarpma işlemlerinizi Rus köylüsü metodunu kullanarak yapmanız beklenmiyor. Ne var ki, bu ilkel aritmetik sisteminin (ilkel bir algoritmanın örneği)(*) gerçekte nasıl işlediğini anlamak eğlenceli olsa gerek. Bu çeşit incelemeler yalnızca öğretici değil, eğlendiricidir de.

İşte yukarıdaki çarpma algoritmasında yapılanları görüyorsunuz.

◊ 43 • 92 = (21 • 2 + 1)(92) = 21 • 184 + 92 = 3.956
◊ 21 • 184 = (10 • 2 + 1)(184) = 10 • 368 + 184 = 3.864
10 • 368 = (5 • 2 + 0)(368) = 5 • 736 + 0 = 3.680
◊ 5 • 736 = (2 • 2 + 1)(736) = 2 • 1.472 + 736 = 3.680
2• 1.472 = (1 • 2 + 0)(1.472) = 1 • 2.944 + 0 = 2.944
◊ 1 • 2.944 = (0 • 2 + 1)(2.944) = 0 +2.944 = 2.944
3.956

İkilik sisteme (yani; ikilik tabana) aşina olanlar için, Rus köylüsü metodunu aşağıdaki şekilde de ifade ederek açıklanabilir.

$(43)(92) = 1 \cdot 2^5 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0)(92)$
$= 2^0 \cdot 92 + 2^1 \cdot 92 + 2^3 \cdot 92 + 2^5 \cdot 92$
$= 92 + 184 + 736 + 2.944$
$= 3.956$

(*) Bir algoritma adım adım giden bir problem çözme prosedürüdür; özellikle, yerleşik, tekrarlamalı, bilgisayar tarafından bir problemi sonlu bir basamak sayısında çözmek için geliştirilmiş olan bir prosedür. Aritmetik algoritmalara örnek sayıları çarpma ve bölmeyle ilgili olan algoritmalardır.

Rus köylüsü çarpma metoduyla ilgili tartışmamızı tam olarak anlamış olun ya da olmayın, günümüzde çoğu insan çarpmayı hesap makinesi ile yapıyor olsa da, sizin şu anda en azından, okulda öğrendiğiniz temel çarpma algoritması hakkında daha derin bir kavrayışa sahip durumdasınız. Daha birçok çarpma algoritması vardır; ne var ki buradaki belki de en gizemlilerinden biridir ve bu gizemlilikle biz, bize böylesi algoritmalar yaratmak için izin veren, matematiğin yıkılmaz tutarlılığını kavrayabiliriz.

2.6 21, 31, 41 ve Diğerleri ile Hızlı Çarpma

Aritmetiğin çoğu algoritmaların kullanılmasına bağlıdır; yani aritmetik hesaplamaların yapılması için kullanılan prosedürlere. Bu algoritmaları ilkokul yıllarımızda öğrendiğimizde, onların neden çalıştıklarına aldırmaksızın kullanmıştık. Günümüzün teknolojik olarak çok ileri olan uygarlığından, bunları anlamaya hiç mi hiç ihtiyaç duymayız. Bu algoritmaların aslında nasıl işlediklerini anlamayı deneyerek çok hoş vakit geçirebilirsiniz. Aşağıdaki "yeni" algoritmayı düşünürseniz ki belki bunu daha önce hiç görmemişsinizdir, tanışık olmadığınız bir algoritmaya kendinizi alıştırma fırsatına sahip olacaksınız; daha sonra onun niye çalıştığını açıklamayıp açıklayamayacağınıza bakın. Algoritmaya bir kere alıştınız mı, göreceksiniz ki, onu bu modele uyan diğer sayılara da uygulayabiliyorsunuz. Burada sunulan örnekler 21, 31 ve 41 ile çarpma algoritmalarıdır. Bunları 51, 61 ve başka sayılara genişletmekte hiçbir sorun yaşamayacaksınız. Bu küçük egzersizi bitirdiğinizde, ilkokul yıllarında ezbere öğrendiğiniz standart algoritmaların yapısıyla ilgili daha derin bir kavrayışa malik olacaksınız.

21 ile çarpmak için: *Sayıyı iki ile çarpın; daha sonra 10*

ile çarpın ve buna orijinal sayımızı ekleyin.

Örnek: 37'yi 21 ile çarpalım.

37'yi ikiyle çarparsak 74 eder; bunu 10'la çarparsak 740 elde ederiz ve buna 37 eklersek sonuç 777'dir.

31 ile çarpmak için: *Sayıyı üç ile çarpın; daha sonra 10 ile çarpın ve buna orijinal sayımızı ekleyin.*

Örnek: 43'yi 31 ile çarpalım.

43'ü üçle çarparsak 129 eder; bunu 10'la çarparsak 1.290 elde ederiz ve buna 43 eklersek sonuç 1.333'dür.

41 ile çarpmak için: *Sayıyı dört ile çarpın; daha sonra 10 ile çarpın ve buna orijinal sayımızı ekleyin.*

Örnek: 47'yi 41 ile çarpalım.

47'yi dörtle çarparsak 188 eder; bunu 10'la çarparsak 1.880 elde ederiz ve buna 47 eklersek sonuç 1.927'dir.

Artık modeli tanıdığınıza göre bunu diğer sayılara genişletmeniz için önünüzde hiçbir engel bulunmamaktadır.

2.7 Zekice Toplama

Matematik tarihinde hep tekrarlanan ünlü hikâyelerden birisi de ünlü matematikçi Carl Friedrich Gauss'un hikâyesidir; on yaşında hocası tarafından verilen 1'den 100'e kadar olan sayıların toplamı problemini kafasından yaptığı söylenir. Gauss cevabı kâğıt kalem kullanmadan bulmasına rağmen, sınıfın geri kalanı bir saat uğraşmış ve doğru cevabı bulamamıştır.(*) Bu, hoş bir hikâye olsa da ve genellikle her zaman hoş

(*) E. T. Bell'in *Men of Mathematics* kitabına (New York: Simon & Schuster, 1937) göre Gauss'a verilen problem şöyleydi: 81,927 + 81,495 + 81,693 + ... + 100,899; burada ardışık sayılar arasındaki ortak fark 198 ve terim sayısı 100'dü. Bugün ağızlarda 1'den 100'e kadar olan toplam dolaşır; bu, ana fikri, daha basit bir şekilde de olsa doğru olarak verir.

bir reaksiyon alıyor olsa da, aynı zamanda bize aritmetik dizilerdeki sayıların toplanmasıyla ilgili küçük, derli toplu bir formül de sunar.

Bir aritmetik dizi, aralarında ortak bir fark olan ardışık sayılardan oluşmuş bir sayı kümesidir. Örneğin, 2, 4, 6, 8, 10 ... dizisi, ortak farkın 2 olduğu bir aritmetik dizidir. Aşağıdakiler başka aritmetik dizilere örneklerdir:

5, 10, 15, 20, 25, 30 ... (ortak fark 5)
7, 11, 15, 19, 23, 27 ... (ortak fark 4)

Belki de en basit aritmetik dizi şudur: 1, 2, 3, 4, 5 ... Bu sayılar doğal sayılar olarak adlandırılırlar.

Bir sayı bile yazmadan ilk 100 doğal sayının toplamını bulmak için Gauss'un yaptığı, sayıları ortaya çıktıkları sıra ile toplamak değildi; daha çok onları şu şekilde toplamaktı:

İlk sayı artı son sayı,
İkinci sayı ve sondan bir önceki,
Üçüncü sayı ve sondan iki önceki, vb.

Eğer bunu $1 + 2 + 3 + ... + 98 + 99 + 100$ toplamına uygularsak şunu elde ederiz:

$$\begin{aligned} 1 + 100 &= 101 \\ 2 + 99 &= 101 \\ 3 + 98 &= 101 \\ 4 + 97 &= 101 \\ &... \\ 50 + 51 &= 101 \end{aligned}$$

Dikkat ediniz ki her çiftin toplamı 101'dir. Böylece 50 çiftin toplamı $50 \cdot 101 = 5.050$'dir.

Bu örnekten, bir aritmetik dizideki sayıların toplamı ile ilgili kullanışlı bir formül türetebiliriz. Diğer bir değişle, baş-

taki ve sondaki sayıyı toplarız ve bunu, dizideki sayıların adedinin yarısı ile çarparız. Bunu genelleştirebiliriz ve *n* terimli ve ilk terimi *a*, son terimi l olan bir aritmetik seri için (Gauss'un metodunu kullanarak) şu formülü yazabiliriz: Toplam = $n \div 2\ (a+l)$.

Burada, çok kullanışlı bir matematiksel formülün türetilmesinin ne kadar kolay olduğuyla ilgili bir örneğe sahipsiniz; bu formül, ilk bakışta açık olarak görülemeyen nefis bir modele dayanmaktadır.

Şimdi formülümüzü ilk 50 tek sayının bulunması için kullanalım; yani, 1 + 3 + 5 + 7 + ... + 99. Toplam= $50 \div 2\ (1+99) = 25\ (100) = 2500$.

2.8 Alfametik

Batı medeniyeti tarafından (Arap medeniyetinden aldığı mirasla) atılan önemli ilerici adımlardan biri, aritmetiğimiz için basamak değeri sisteminin kullanılmasıdır. Romen rakamlarıyla çalışmak hem kullanışsızdı, hem de bazı algoritmaları imkânsız hale getiriyordu. Hindu-Arap rakamlarının ilk ortaya çıkışı, daha önce de belirttiğimiz gibi, Fibonacci'nin 1202'deki *Liber abaci* adlı kitabındaydı. Kullanışlılığı bir yana, basamak değeri sistemi bize, kendisini ve onunla kullandığımız algoritmaları daha iyi anlamamızı sağlayan eğlenceli bir matematik de sunabilir.

Uslamlama yeteneklerinizi bir toplama algoritmasına uygulamanız, matematiksel düşüncenizin gelişmesinde çok önemli bir rol oynayabilir. Bu faaliyet, sayılarla ilgili yeteneğinizi biraz zorlayabilir. Onu deneyin; ondan zevk alacaksınız. Aşağıdaki örneği inceleyin.

Aşağıdaki harfler, eğer her bir harf tek bir rakamı simgeliyorsa ve M sıfıra eşit değilse, basit bir toplamanın rakamlarını simgelemektedir.

```
  SEND
+ MORE
 MONEY
```

Bu toplamayı geçerli hale getirmek için, her bir harfin temsil ettiği sayıyı bulun. Bir tek çözümün olduğunu gösterin.

Bu faaliyetteki en önemli özellik analizdir; ayrıca yapılan uslamlamaya dikkati yoğunlaştırmak da çok önemlidir. İlk bakışta bu çok zor bir görevmiş gibi gelebilir; fakat adım adım giderseniz göreceksiniz ki, bu çok öğretici ve eğlendiricidir.

İki dört rakamlı sayının toplamı 19.998'den büyük bir sayı edemez; bu nedenle **M =1**'dir.

Böylece şunu diyebiliriz; MORE < 2.000 ve SEND < 10.000. Bunu MONEY < 12.000 takip eder. Böylece O ya 0 ya da 1'dir. Fakat 1 zaten kullanılmıştır; öyleyse **O = 0**'dır.

Şimdi elimizde şu var:

```
  SEND
+ 10RE
 10NEY
```

Şimdi MORE < 1.100'dür. Eğer SEND 9.000'den küçükse, MONEY < 10.100 demektir ki bu N = 0 demektir; fakat bu olamaz; çünkü 0 daha önce kullanılmıştı. Bu nedenle SEND > 9.000'dir ve böylece **S = 9**'dur.

Şimdi elimizde şu var:

```
  9END
+ 10RE
 10NEY
```

Problemi tamamlamak için elimizde kalan rakamlar 2, 3, 4, 5,

6, 7, 8'dir.

Gelin şimdi birler basamağını inceleyelim. En yüksek toplam 7 + 8 = 15'dir ve en küçük toplam 2 + 3 = 5'dir.

Eğer D + E < 10 ise, D + E = Y'dir ve onlar basamağına taşınacak bir şey olmaz. Diğer durumda D + E = Y + 10'dur ve 1 onlar basamağına taşınır.

Bu argümanı onlar basamağına kaydırırsak şunu elde ederiz; eğer onlar basamağından yüzler basamağına bir şey taşınmazsa N+ R = E'dir ya da N + R = E + 10'dur ki bu durumda onlar basamağından yüzler basamağına 1 taşınır. Ne var ki, eğer yüzler basamağına bir şey taşınmıyorsa E + 0 = N'dir ki bu N = E demektir; fakat bu olamaz. Bu nedenle yüzler basamağına 1 taşınmış demektir. Öyleyse N + R = E + 10'dur ve E + 0 + 1 = N ya da E + 1 = N'dir.

N için olan değeri bir önceki denklemde yerine koyarsak şunu elde ederiz: (E + 1) + R = E + 10; böylece R = 9 olur. Fakat bu değer daha önce S için kullanılmıştı; bu nedenle farklı bir yaklaşım denemeliyiz.

Böylece D + E = Y + 10 olduğunu varsayacağız; çünkü bir çıkmaz sokağa geldiğimiz onlar basamağına açıkça 1'i götürmemiz gerekiyor.

Böylece onlar basamağının toplamı şunlar olabilir: 1 + 2 + 3 < 1 + N + R < 1 + 7 + 8. Ne var ki eğer 1 + N + R < 10 olursa, yüzler basamağına 1 götüremeyeceğiz; yalnızca E = N durumunda bu olabilir ama bu durumda mümkün değildir. Şimdi elimizde 1 + N + R = E + 10 var ve bu yüzler basamağına gitmesi gereken 1'i sağlıyor.

Bu nedenle 1 + E + 0 = N ya da E +1 = N.

Bunu yukarıdaki denklemde (1 + N + R = E + 10) yerine koyarsak bu bize 1 + (E+1) + R = E + 10 ya da **R = 8**'i verir.

Şimdi elimizde şu var:

$$\begin{array}{r} 9\,E\,N\,D \\ +1\,0\,8\,E \\ \hline 1\,0\,N\,E\,Y \end{array}$$

Kalan rakamların listesinden D + E < 14 olduğunu buluyoruz.

Böylece D + E = Y + 10 denkleminden dolayı Y ya 2 ya da 3'dür. Eğer Y = 3 ise, o zaman D + E = 13'tür ve bu demektir ki, D ve E rakamları sadece 6 ve 7 olabilir.

Eğer D = 6 ve E = 7 ise, bir önceki E + 1 = N denkleminden N = 8 bulacağız; fakat bu olamaz; çünkü R = 8 bulmuştuk zaten.

Eğer D = 7 ve E = 8 ise, o zaman bir önceki E + 1 = N denkleminden N = 9 olacaktır ki bu mümkün değildir; çünkü S = 9'dur.

Bu nedenle **Y = 2**'dir.

Şimdi elimizde şu var:

$$\begin{array}{r} 9\,E\,N\,D \\ +\ 1\,0\,8\,E \\ \hline 1\,0\,N\,E\,2 \end{array}$$

Böylece D + E = 12'dir. Bu sonuca ulaşmanın tek yolu 5 ve 7'yi kullanmaktır.

Eğer E = 7 ise, yeniden E + 1 = N'den çelişkili bir şekilde N = 8 olarak bulacağız ki bu kabul edilemez.

Bu nedenle **D = 7** ve **E = 5**'tir. Ve yeniden E + 1 = N denklemini kullanarak **N = 6** sonucunu buluruz.

Sonuçta çözümü bulduk:

$$\begin{array}{r} 9\,5\,6\,7 \\ +\ 1\,0\,8\,5 \\ \hline 1\,0\,6\,5\,2 \end{array}$$

Bu oldukça zorlu faaliyet, toplama algoritmasının kavranmasında oldukça yararlı olacaktır.

2.9 Gülünç Hatalar

İlkokul hayatımızda kesirleri sadeleştirmeyi öğrenmişizdir. Bunu doğru bir şekilde yapmak için spesifik yollar vardır. Akıllı bir adam, kesirleri sadeleştirmek için daha kısa bir yol

bulmuş gibi görünüyor. Acaba haklı mı?

Bir kesiri sadeleştirmesi istendiğinde bunu şöyle yapmış:

$$\frac{26}{65} = \frac{2}{5}$$

Yani, doğru cevaba ulaşmak için yalnızca 6'ları sildi. Bu prosedür doğru mudur? Diğer kesirlere de uyarlanabilir mi? Eğer böyleyse ilkokul hocalarımız bize çok adaletsizce davrandı demektir; çünkü yapmanın çok kolay bir yolu var görünüşe göre. Burada ne yapıldığına bakalım ve genelleştirilip genelleştirilemeyeceğini görelim.

E. A. Maxwell, *Fallacies in Mathematics* (Cambridge: Cambridge University Press, 1959) adlı kitabında aşağıdaki sadeleştirmelere "gülünç hatalar" adını vermiştir:

$$\frac{16}{64} = \frac{1}{4} \qquad \frac{26}{65} = \frac{2}{5}$$

Belki de, biri kesir sadeleştirmelerini bu şekilde yaptığında ve yine de doğru sonucu aldığında, bu sizin gülmenize sebep olabilir.

Bu güldürücü sadeleştirmelere iki örnek daha:

$$\frac{19}{95} = \frac{1}{5}$$

$$\frac{49}{98} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

Bu noktada biraz şaşırmış olabilirsiniz. İlk reaksiyonunuz muhtemelen, bunun, bu çeşit iki rakamlı sayılardan oluşan her kesire uygulanıp uygulanamayacağıdır. Bu tip bir sadeleştirmenin işlediği başka bir (iki rakamlı sayılardan oluşan) kesir bulabilir misiniz? Belki de $55 \div 55 = 5 \div 5 = 1$ kesrini bir örnek olarak verebilirsiniz. Bu 11'in iki basamaklı tüm katları için geçerlidir; ama biz bayağı kesirlerle uğraşacağız (yani, değeri 1'den az olanlarla).

Temel cebiri iyi olan okuyucular için bu durumu "açıklayabiliriz". Yani, neden sadece yukarıdaki dört kesir (iki basa-

maklı sayılardan oluşan), bu tip sadeleştirmenin uygulanabildiği kesirlerdir sorusunu.

$\frac{10x + a}{10a + y}$ kesrini düşünün.

Yukarıdaki dört kesri düşündüğümüzde, a sadeleştirildiğinde kesir $x \div y$'ye eşit oluyordu.

Bu nedenle, $10x + a \div 10a + y = x \div y$.

Buradan; $y(10x+a) = x\,(10a+y)$

$10xy + ay = 10ax + xy$

$9xy + ay = 10ax$

$y\,(9x+a) = 10ax$

Ve böylece; $y = \frac{10ax}{9x+a}$

Bu noktada denklemi incelemeliyiz. x, y ve a'nın tam sayı olması zorunludur; çünkü onlar bir kesrin payındaki ve paydasındaki rakamlardır. Böylece görevimiz, hangi kesirli olmayan y değerleri için x ve a tamsayılarının var olduğunu bulmaktır.

Birçok cebirsel işlemden kurtulmak için, $y = 10a\,x \div 9\,x + a$ denkleminden y değerleri üreten bir tablo çizmek isteyebilirsiniz. Unutmayın ki, y, x ve a tek rakamlı tam sayılar olmalıdır. Aşağıdaki göreceğiniz bu tablonun bir parçasıdır. Dikkat ediniz ki, $x = a$ durumları dışlanmıştır; çünkü $x \div y = 1$'dir.

x\a	1	2	3	4	5	6	...	9
1		$\frac{20}{11}$	$\frac{30}{12}$	$\frac{40}{13}$	$\frac{50}{14}$	$\frac{60}{15}=4$		$\frac{90}{18}=5$
2	$\frac{20}{19}$		$\frac{60}{21}$	$\frac{80}{22}$	$\frac{100}{23}$	$\frac{120}{24}=5$		
3	$\frac{30}{28}$	$\frac{60}{29}$		$\frac{120}{31}$	$\frac{150}{32}$	$\frac{180}{33}$		
4								$\frac{360}{45}=8$
⋮								
9								

Önceki sayfada gördüğünüz tablo parçası, kesirli olmayan dört tane y değeri oluşturmuştur: iki tanesi, $x = 1$ ve $a = 6$ için $y = 4$ ve $x = 2$ ve $a = 6$ için $y = 5$. Bu değerler sırasıyla $16 \div 64$ ve $26 \div 65$ kesirlerini oluşturur. Geri kalan iki y değeri, $x = 1$ ve $a = 9$ olduğunda $y = 5$ ve $x = 4$ ve $a = 9$ olduğunda $y = 8$ değerleridir. Bunlar sırasıyla $19 \div 95$ ve $49 \div 98$ kesirlerini verir. Bunun sizi inandırması gerekir ki, doğru bir sadeleştirmeye izin veren bu garip işlem sadece iki basamaklı kesirler içinde sadece bunlara uygulanabilmektedir.

Şimdi, daha fazla rakamdan oluşan pay ve paydalardan teşekkül etmiş diğer kesirlere, bu garip işlemin uygulanıp uygulanamayacağını merak ediyorsunuzdur. Bu tip bir sadeleştirmeyi $499 \div 998$'de deneyin. Şunu bulmalısınız: $499 \div 998 = 4 \div 8 = 1 \div 2$.

Bir kalıp ortaya çıkmakta ve siz şunu fark etmiş olabilirsiniz ki,

$$\frac{49}{98} = \frac{499}{998} = \frac{4999}{9998} = \frac{49999}{99998} = \ldots$$

$$\frac{16}{64} = \frac{166}{664} = \frac{1666}{6664} = \frac{16666}{66664} = \frac{166666}{666664} = \ldots$$

$$\frac{19}{95} = \frac{199}{995} = \frac{1999}{9995} = \frac{19999}{99995} = \frac{199999}{999995} = \ldots$$

$$\frac{26}{65} = \frac{266}{665} = \frac{2666}{6665} = \frac{26666}{66665} = \frac{266666}{666665} = \ldots$$

Hevesli okuyucular bu gülünç hatanın uzantılarını doğrulamak isteyebilir. Bu noktada, bu tip bir sadeleştirmeye izin verebilen diğer kesirleri de bulmak isteyen okuyucu aşağıdaki kesirleri inceleyebilir. Bunların, sadeleştirmenin doğruluğuna sizi ikna etmiş ve diğerlerini de bulmak için heveslendirmiş olması gerekir.

$$\frac{332}{830} = \frac{32}{80} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{385}{880} = \frac{35}{80} = \frac{7}{16}$$

$$\frac{\cancel{13}8}{\cancel{3}45} = \frac{18}{45} = \frac{2}{5}$$

$$\frac{\cancel{27}5}{7\cancel{7}0} = \frac{25}{70} = \frac{5}{14}$$

$$\frac{\cancel{163}}{\cancel{32}6} = \frac{1}{2}$$

Birçok önemli noktayı motivasyon sağlayıcı bir şekilde sunmak için kullanılabilecek cebirsel bir uygulama sağlamak bir yana, kavram aynı zamanda bize eğlenceli aktiviteler de sunmaktadır. İşte karşınızda daha fazla "gülünç hata".

$$\frac{\cancel{48}4}{\cancel{8}47} = \frac{4}{7} \qquad \frac{\cancel{54}5}{6\cancel{5}4} = \frac{5}{6} \qquad \frac{\cancel{42}4}{7\cancel{4}7} = \frac{4}{7} \qquad \frac{\cancel{24}9}{9\cancel{9}6} = \frac{24}{96} = \frac{1}{4}$$

$$\frac{\cancel{48}\cancel{48}4}{\cancel{8}\cancel{48}47} = \frac{4}{7} \qquad \frac{\cancel{54}\cancel{54}5}{6\cancel{5}\cancel{45}4} = \frac{5}{6} \qquad \frac{\cancel{42}\cancel{42}4}{7\cancel{4}\cancel{24}7} = \frac{4}{7}$$

$$\frac{\cancel{32}43}{4\cancel{32}4} = \frac{3}{4} \qquad \frac{\cancel{64}86}{8\cancel{64}8} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{147\cancel{4}}{7\cancel{4}68} = \frac{14}{68} = \frac{7}{34} \qquad \frac{8\cancel{78}048}{98\cancel{78}04} = \frac{8}{9}$$

$$\frac{142\cancel{85}7\cancel{4}}{4\cancel{28}57\cancel{4}3} = \frac{1}{3} \qquad \frac{28\cancel{57}\cancel{4}42}{8\cancel{57}\cancel{4}26} = \frac{2}{6} = \frac{1}{3} \qquad \frac{346\cancel{4}538}{46\cancel{4}5394} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{76\cancel{74}23\cancel{48}7}{8\cancel{76}7\cancel{4}2\cancel{3}28} = \frac{7}{8} \qquad \frac{3\cancel{74}32\cancel{4}3\cancel{4}3}{43\cancel{74}3\cancel{4}3\cancel{4}24} = \frac{3}{4}$$

$$\frac{102\cancel{50}41}{41\cancel{02}564} = \frac{1}{4} \qquad \frac{32\cancel{43}243}{43\cancel{24}324} = \frac{3}{4} \qquad \frac{457\cancel{4}428}{57\cancel{4}285} = \frac{4}{5}$$

$$\frac{48\cancel{48}48\cancel{4}}{8\cancel{48}\cancel{48}47} = \frac{4}{7} \qquad \frac{59\cancel{52}380}{95\cancel{23}808} = \frac{5}{8} \qquad \frac{42\cancel{85}7\cancel{4}}{64\cancel{28}57\cancel{4}} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$$

$$\frac{54\cancel{54}54\cancel{5}}{6\cancel{54}54\cancel{54}} = \frac{5}{6} \qquad \frac{69\cancel{23}076}{92\cancel{30}768} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \qquad \frac{42\cancel{4}2\cancel{4}24}{74\cancel{4}24\cancel{4}2} = \frac{4}{7}$$

$$\frac{53\cancel{84}67\cancel{5}}{75\cancel{38}46\cancel{7}} = \frac{5}{7} \qquad \frac{20\cancel{51}282}{8205\cancel{12}8} = \frac{2}{8} = \frac{1}{4} \qquad \frac{3\cancel{77}5883}{83\cancel{77}688} = \frac{3}{8}$$

$$\frac{64\cancel{86}496}{86\cancel{49}64\cancel{8}} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4} \qquad \frac{48\cancel{48}\cancel{48}\cancel{48}4}{8\cancel{48}\cancel{48}\cancel{48}47} = \frac{4}{7}$$

Bu kısım, temel cebirin, bir sayılar teorisi durumunu incelemek için nasıl kullanılabileceğini örnekler ki bu aynı zamanda da oldukça eğlencelidir. Görüyorsunuz; matematik nasıl da hâlâ birçok gizi içinde barındırıyor.

2.10 Sıradışı Sayı 9

Daha önce de belirtildiği gibi, bugün kullandığımız Hindu-Arap rakamlarının Batı Avrupa'da ilk ortaya çıkışı *Liber abaci* (New York: Springer Verlag, 2002) adlı kitaptadır ki bu 1202'de Pisa'lı Leonardo (Fibonacci olarak da bilinir) tarafından yazılmıştır. Kendi işi dışında matematikten de büyülenmiş olan bu tüccar, Arap ülkeleri boyunca geniş bir alanı gezmiştir; bu sırada da yerel matematikçilerle çalışmıştır. Bu klasik kitabın ilk bölümünde şöyle der:

> Bunlar Hindistanlıların dokuz sembolüdür; 9, 8, 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1. Bu dokuz sembolle ve Arapların zefirum dedikleri 0 sembolüyle, aşağıda da kanıtlayacağımız gibi istenilen her sayı yazılabilir.

Bu kitapla birlikte bu rakamların kullanımı Avrupa'da ilk defa halka açıldı. Bundan önce Romen rakamları kullanılıyordu. Açıktı ki, bu rakamlar hesap yapmak için çok hantaldılar.

İslam dünyasında kullanılan aritmetik hesaplamalardan etkilenen Fibonacci, kitabında ilk olarak "dokuzların silinmesi"(*) metodunu bir aritmetik kontrol olarak ortaya koydu. Bugün bile bu hâlâ kullanışlıdır. Ne var ki, bununla ilgili hoş olan şey, sıradan aritmetikte bile gizli bir büyünün varlığının gösterilmesidir.

Bu aritmetik kontrol prosedürünü tartışmadan önce, 9'la bölmeden kalanın nasıl sayının rakamlarının toplamından dokuzların çıkarılmasıyla benzerlik gösterdiğini inceleyeceğiz. Gelin 8.768'in 9 ile bölünmesinden kalanı bulalım; bölüm 974 ve kalan 2'dir.

Bu kalan aynı zamanda 8.768 sayısının rakamlarının top-

(*) "Dokuzların atılması" cevabınızın bir olasılıkla doğru olup olmadığını söyleyen bir aritmetik kontrol yöntemidir. Bu işlem, bir sayının rakamlarının toplamından 9 kümelerinin çıkarılmasını ya da belli bir sayıda 9'un rakamların toplamından çıkarılmasını ya da tek bir rakam kalana kadar sayının rakamlarının toplamıyla oluşan rakamların alınmasıyla sayının küçültülmesini gerektirir. Tüm bunlar aynı rakamı (sayıyı) üretecektir.

lamından "dokuzların silinmesi"yle de elde edilebilir: bu demektir ki, biz rakamların toplamını bulacağız; eğer rakamların toplamı tek basamaktan yüksekse, prosedürü bu sayı üzerinden tekrar edeceğiz. Örneğimize dönersek, 8.768'in rakamlarının toplamı 29 (8 + 7 + 6 + 8 = 29); böylece prosedürü tekrar edelim. Tekrar dokuzların silinmesi prosedürünü uygulayalım: 2 + 9 = 11 ve tekrar: 1 + 1 = 2 ki bu 8,768'in 9'la bölünmesinden kalan sayıdır.

Şu çarpıma bir bakın; 734 • 879 = 645.186. Biz bu işlemi bölmeyle(*) kontrol edebiliriz; ama bu oldukça uzun olacaktır. Aynı zamanda, bunun doğru olma olasılığının var olup olmadığını "dokuzların silinmesiyle de" görebiliriz. Her bir faktörü, çarpanı, çarpılanı ve çarpımı alın ve dokuzları silin. Her birinin rakamlarının toplamını ta ki tek basamaklı bir sayıya ulaşana kadar toplamaya devam edin. Tek basamaklı sayıya ulaştığınızda çarpanla çarpılanın bu tek basamaklı sonuçlarını çarpın ve çarpımdan ulaştığınız rakamla aynı olup olmadığına bakın. Gelin şimdi bu prosedürü 645.186 çarpımını kontrol etmek için kullanalım:

734 için	:	7 + 3 + 4 = 14 ve 1 + 4 =5
879 için	:	8 + 7 + 9 = 24 ve 2 + 4 = 6
645.186 için:		6 + 4 + 5 + 1 + 8 + 6 = 30

5 • 6 = 30 olduğundan ki 3'ü üretir (dokuzların silinmesi: 3 + 0 = 3); çarpımdan elde edilen sonuçla aynıdır; böylece cevap doğru olabilir.

Pratik olsun diye bir başka çarpım için dokuzların silinmesi metoduyla "kontrol" yapacağız:

56.589 • 983.678 = 55.665.354.342

56.589: 5 + 6 + 5 + 8 + 9 = 33; → 3 + 3 = 6

983.678: 9 + 8 + 3 + 6 + 7 + 8 = 41; → 4 + 1 = 5

55.665.354.342: 5 + 5 + 6 + 6 + 5 + 3 + 5 + 4 + 3 + 4 + 2 = 48; → 4 + 8 = 12; 1 + 2 = 3

(*) 645,198'i 879 ile bölersek, eğer çarpma doğruysa 734 verecektir.

Doğru çarpıma sahip olup olmadığımızı kontrol edelim: 6 • 5 = 30. 3 + 0 = 3; bu çaprımdan elde edilen sonuca uymaktadır.

Aynı prosedür bir toplamın (ya da bölümün) doğruluğunun olasılığını kontrol etmek için de kullanılabilir; toplamı (ya da bölümü) alın ve dokuzları silin, toplamdan (ya da bölümden) çıkan bu "kalanları", toplamın (ya da bölümün) diğerinden kalanla karşılaştırın. Eğer cevap doğru ise bunların aynı olması gerekir.

9 sayısı bir başka sıra dışı özelliğe sahiptir; bu özellik bize şaşırtıcı bir çarpma algoritmasını kullanabilmemizi sağlar. Bir parça karışık olsa da, onun çalıştığını görmek ve bunun neden böyle olduğunu anlamaya çalışmak yine de büyüleyicidir. Bu prosedür, iki veya daha fazla rakamların 9'la çarpılmasına yöneliktir.

1	Çarpılanın birler basamağını 10'dan çıkarın.	10 -'4 = 4
2	Kalan rakamlarının her birini (onlar basamağından başlayın) 9'dan çıkarın ve sonucu çarpılandaki bir önceki rakama ekleyin (iki basamaklı toplamlar için onlar basamağını bir sonraki toplama taşıyın.)	9-5=4, 4+4=8 9-3=6, 6+5=11,**1** 9-6=3, 3+3=6, 6+1=7 9-7=2, 2+6=**8**
3	Çarpılanın en sonundaki rakamından bir çıkarın.	7-1=**6**
4	Istenilen çarpımı almak için sonuçları ters sırada yazın.	**687.186**

Prosedürü en iyi bağlam içinde görebiliriz: 76.354'ü 9'la çarpın.

Biraz hantal bir işlem olsa da, hesap makinesiyle karşılaştırıldığında bu algoritma sayılar teorisi hakkında biraz kavrayış sağlamaktadır. Ama her şeyin ötesinde şaşırtıcıdır!

2.11 Ardışık Yüzdeler

İnsanların çoğu yüzde problemlerini aşılmaz engeller olarak düşünmüştür hep. Bu problemler, eğer aynı problem içinde birden fazla yüzde işlemi gerekiyorsa daha da içinden çıkılmaz bir hal alır. Bu etkileyici kısım, bu bir zamanlar aşılmaz engeller olarak düşünülen şeyi, yararlı uygulamalara dönüşebilen ve ardışık yüzde problemlerinin daha iyi kavranmasını sağlayan zevkli aritmetik algoritmalarına dönüştürebilir. Bu çok iyi bilinmeyen prosedür sizi büyüleyecektir. Şu problemi inceleyerek başlayalım:

> Bir palto almak isteyen Barbara şu ikilemle karşılaşır. Birbiriyle yan yana olan iki rakip firma aynı marka paltoyu aynı fiyatla ama farklı indirim seçenekleriyle sunmaktadır. A firması yıl boyunca tüm ürünlerinde %10 indirim yapmaktadır; ama o gün indirimli fiyatların üstüne %20 ek bir indirim daha yapmıştır. B firması ise rekabetini sürdürmek için o gün %30 indirim yapmıştır. Barbara'nın seçenekleri arasında ne kadarlık yüzde farkı vardır?

İlk bakışta fiyatlarda hiçbir fark olmadığını düşünebilirsiniz; çünkü 10+20=30'dur; yani her iki durumda da indirim aynıdır. Fakat biraz daha düşünürseniz bunun doğru olmadığını göreceksiniz; çünkü A mağazasında %10 indirim orijinal fiyat üzerinden; ama %20 indirim indirimli fiyat üzerinden hesaplanırken, B mağazasında %30 indirim orijinal fiyat üzerinden hesaplanmaktadır. Şimdi yanıtlanacak soru şudur: A ve B mağazalarındaki indirim oranları arasındaki yüzde farkı nedir?

Düşünülebilecek bir prosedür, paltonun fiyatını 100 lira saymak, %10 indirimi hesaplamak ki bu 90 lira eder ve diğer %20 indirimi (18 lira) hesaplayarak 72 liralık fiyata ulaşmak olabilir. B mağazasında ise %30'luk bir indirim 100 lirayı 70 liraya indirecektir; burada 2 liralık bir indirim farkı, yani %2'lik bir indirim oranı farkı vardır. Bu prosedür doğru ve çok zor olmasa da, birazcık kullanışsızdır ve her zaman olayın tam olarak kavranmasına izin vermez ya da sayılar her zaman bu kadar basit değildir.

İlginç ve oldukça sıra dışı bir prosedür(*) eğlenmeniz için sunulacaktır ve bu probleme yeni bir bakış sağlayacaktır:

İşte karşınızda, fiyattaki iki (ya da daha fazla) ardışık indirim (ya da artışı) fiyattaki tek bir indirim (ya da artışa) eşitleyen mekanik bir metot (ya da algoritma).

(1) Her iki yüzdeyi de ondalık haline çevirin:
.20 ve .10
(2) Her birini 1.00'dan çıkarın:
.80 ve .90 (fiyattaki bir artış için 1.00'a ekleyin)

(3) Farkları çarpın:
(.80)(.90) = .72

(4) Yukarıdaki çarpımı (yani, .72) 1.00'dan çıkarın:
1.00 - .72 = .28 ki bu birleştirilmiş indirimi temsil eder (eğer 3. Basamağın sonucu 1.00'dan büyükse, bunu 1.00'dan çıkarın ve artış oranını bulun.)

Eğer .28'i yüzde biçimine çevirirsek %28 değerini elde ederiz ki bu ardışık %10 ve %20 indirimlerine eşittir.

Bu bileşik %28'lik indirim, %30 indirimden %2 farklıdır.

(*) Problemin çözümünden uzaklaşmamak için bunun burada doğrulaması verilmemiştir; Ne var ki bu prosedürün daha geniş bir incelemesi için okuyucu şuna başvurabilir: A. S. Posamentier ve J. Stepelman, *Teaching Secondary School Mathematics: Techniques and Enrichment Units* (Columbus, Ohio: Merrill/Prentice Hall, 6. Basım, 2002), syf. 272-74.

Aynı prosedürü talkip ederek ikiden daha fazla ardışık indirimleri de birleştirebilirsiniz. Buna ilaveten, ardışık artışlar, bir indirimle birleşmiş olsun ya da olmasın, ondalık hali 1.00'a eklenerek, indirimler 1.00'dan çıkartılarak ve prosedüre aynı şekilde devam edilerek bu prosedürle bir araya getirilebilir. Eğer ortaya çıkan sonuç 1.00'dan büyükse, yukarıdaki problemden farklı olarak bu bir indirimi değil, toplamda bir artışı simgeler.

Bu prosedür oldukça zor olan bir durumu kolaylaştırmakla kalmaz; aynı zamanda genel tabloyla ilgili bir kavrayış da sağlar. Örneğin şu soruyu düşünün: "Yukarıdaki alıcı için önce %20 ve sonra %10 indirim almak mı, yoksa önce %10 sonra %20 indirim almak mı daha avantajlıdır?" Bu soruya cevap hemen ve sezgisel olarak verilebilir. Yine de biraz önce sunulan prosedürü düşündüğümüzde bu bize gösterir ki, hesaplama bir çarpma işlemi olduğundan, yani komütatif bir işlem olduğundan, *ikisi arasında bir fark olmadığını* hemen bulabiliriz.

Şu anda ardışık indirimleri, artışları ya da her ikisinin bir kombinasyonunu hesaplamak için kullanılabilecek bir algoritmaya sahipsiniz. Bu sadece kullanışlı değil, aynı zamanda hesap makinesinin uygunsuz olduğu durumlarda yüzdelerle uğraşmak için kullanabileceğiniz kuvvetli bir araçtır. Eğer fiyat önce %10 arttırılıp sonra %10 azaltılırsa fiyatla ilgili ne düşünürsünüz? Prosedürü kullanmayı deneyin. Yanıt sizi çok şaşırtacak!

2.12 Ortalamalar Gerçekten Ortalama mıdır?

Beysbol vuruş ortalamaları spor tartışmalarının içine girmiş olsa da, çok az insan bu "Beysbol vuruş ortalamalarının" kelimenin tam anlamıyla ortalama olmadığını fark eder: Onlar aslında yüzdelerdir. Birçok insan, özellikle bu kavramı açıklamaya çalıştıktan sonra, fark etmeye başlar ki, bu bir "ortalamayla" –yani, aritmetik ortalama– kastedilen ortalama de-

ğildir. Aynı vuruş ortalamasına sahip, ama bu ortalamalara farklı isabet sayılarıyla ulaşmış olan iki oyuncu bulmak için yerel bir gazetenin spor sayfalarını araştırmak yararlı olabilir. Burada hipotetik bir örnek kullanacağız.

İki oyuncu düşünün: David ve Lisa, her ikisinin de vuruş ortalaması .667. David bu vuruş ortalamasına 30 vuruşta 20 isabet kaydederek, Lisa ise 3 vuruşta 2 isabet kaydederek ulaştı.

Bir sonraki gün ikisi de aynı performansı gösterdi; 2 vuruşta 1 isabet (.500 vuruş ortalaması); günün sonunda her ikisinin de aynı vuruş ortalamasına sahip olduğunu düşünebilirsiniz. Ortalamalarını hesaplayalım:

David şimdi 20 + 1 = 21 isabet ve 30 + 2 = 32 vuruş sayısına sahiptir; bu 21 ÷ 32 = .656 vuruş ortalaması demektir.

Lisa ise şimdi 2 + 1 = 3 isabet ve 3 + 2 = 5 vuruş sayısına sahiptir; bu 3 ÷ 5 = .600 vuruş ortalaması demektir. Sürpriz! Eşit vuruş ortalamasına sahip değiller.

Bir sonraki günü de düşünelim; o gün Lisa David'in yaptığından çok daha yüksek bir performans gösteriyor. Lisa 3 vuruşta 2 isabet yaparken, David 3 vuruşta 1 isabet yapıyor. Şimdi onların ortalamalarını hesaplayalım:

David şimdi 21 + 2 = 22 isabet ve 32 + 3 = 35 vuruş sayısına sahiptir; bu 22 ÷ 35 = .629 vuruş ortalaması demektir.

Lisa ise şimdi 3 + 2 = 5 isabet ve 5 + 3 = 8 vuruş sayısına sahiptir; bu 5 ÷ 8 = .625 vuruş ortalaması demektir. Sürpriz! Eşit vuruş ortalamasına sahip değiller.

Şaşırtıcı bir şekilde, o gün Lisa'nın üstün performansına rağmen, onun başta David'le aynı olan vuruş ortalaması şimdi daha düşük.

"Ortalama" kelimesinin bu "yanlış kullanımından" öğrenilecek daha çok şey vardır; ama daha önemlisi, değişik ağırlıktaki cisimlerin ortalamasının alınması kavramı anlaşılabilir.

2.13. 72 Kuralı

Bu kitaptaki önceliğim, uygulamalarının gücünden çok, matematiğin kendi içindeki güzelliği ortaya koymaktı. Sanırım bu bölüm, özünde her ikisini birden yapıyor. Şimdi bir metot sunacağım; bu metotta, belli bir yıllık faizle bankaya yatırdığınız paranızın ne kadar zamanda ikiye katlandığını bulmaya çalışacağız. Açıktır ki bunu bilmek güzeldir; ama bunu size açıklamamı sağlayan şey kuralın sıra dışılığı. Tadını çıkarın. Bu kural "72 kuralı" olarak adlandırılır; çünkü bu sayıya dayanmaktadır. Yakında göreceksiniz.

"72 kuralına" göre, kabaca ifade edersek, *paranız eğer %r'lik bir yıllık faizle bankaya yatırılırsa 72 / r yılda ikiye katlanacaktır.*

Böylece, örneğin, %8'lik bir yıllık faizle paramızı yatırırsak, bu para 72 ÷ 8 = 9 yılda ikiye katlanacaktır. Benzer şekilde %6'lık bir yıllık faizle paramızı yatırırsak, bu para 72 ÷ 6 = 12 yılda ikiye katlanacaktır.

İlgili okuyucular bunun neden böyle olduğunu ve ne kadar kesin olduğunu öğrenmek isteyeceklerdir. Aşağıdaki tartışma bunu açıklamaktadır.

Bunun işleyip işlemediğini ya da niçin işlediğini araştırmak için önce bileşik faiz formülünü hatırlayalım: $A = P(1+r \div 100)^n$; burada A ortaya çıkan parayı, P yatırılan parayı, n zamanı ve $\%r$ yıllık faizi ifade eder.

A = 2P olduğunda ne olduğunu incelememiz gerekiyor.
O zaman yukarıdaki denklem şu hale gelir: $2 = (1+ r \div 100)^n$
Bunu şu takip eder: $n = log2 \div log(1+r \div 100)$

Şimdi bilimsel bir hesap makinesi yardımıyla yukarıdaki denklemden bir değerler tablosu yapalım:

r	*n*	*nr*
1	69.66071689	69.66071689
3	23.44977225	70.34931675
5	14.20669908	71.03349541
7	10.24476835	71.71337846
9	8.043231727	72.38908554
11	6.641884618	73.06073080
13	5.671417169	73.72842319
15	4.959484455	74.39226682

Eğer *nr* değerlerinin aritmetik ortalamasını (bildiğimiz ortalama) alırsak, 72'ye çok yakın bir sayı olan 72.04092314 değerini elde ederiz; böylece "72 kuralımız", *n* zamanda *%r* yıllık faiz altında bir paranın ikiye katlanmasıyla ilgili oldukça yakın bir ölçüm gibi görünmektedir.

Hevesli bir okuyucu ya da oldukça kuvvetli bir matematik alt yapısına sahip olanlar, üçe katlanma ya da dörde katlanma konusunda da bir "kural" belirlemeye deneyebilir; kullanacağı metot bizim iki kat için kullandığımız metoda benzeyecektir. Yukarıdaki denklem (2) '*k*' kat için $n = \log k / \log(1+r \div 100)$ olacaktır; örneğin $r = 8$ için $n = 29.91884022 (\log k)$ olur.

Böylece $nr = 239.35072118 \log k$ ve $k = 3$ (üç katı) için bize $nr = 114.1993167$ verir. Böylece diyebiliriz ki, parayı üçe katlamayla ilgili olarak "114 kuralına" sahibiz.

Ne var ki bu konuyu inceledikçe göreceğiz ki, buradaki asıl mesele "72 kuralının" sizin yönetiminizde bir araç olduğudur ve eğer onu genişletebilecek kadar ileri gidebildiyseniz ne ala! Bu yararlı kuralı unutmayın. Bu kısımın çoğu para mevzularıyla ilgilenenler için hazırlanmıştır.

2.14 Bir Karekökü Bulmak

Niçin bir kişi hesap makinesi kullanmadan bir sayının karekökünü bulmak ister? Tabii ki, hiç kimse böyle bir şey yap-

maz. Ne var ki, bazı meraklı insanlar bir karekök bulunurken aslında neler yapıldığını merak edebilirler. Bunlar süreçle ilgili daha iyi bir kavrayış geliştirebilmişlerdir ve en azından genelde hesap makinesinden bağımsız olabilmişlerdir. Genellikle okullarda öğretilmeyen bir metot sunacağız; ama karekök hakkında size oldukça iyi bir kavrama şansı sunacak. Bu metodun güzelliği size, aslında neler olup bittiğini gösterebilmesidir. Bu metot ilk olarak 1960'da İngiliz matematikçi Joseph Raphson (ya da Ralphson) tarafından, *Analysis alquationum universalis* adlı kitabında Newton'a atfedilerek yayınlanmıştır; bu nedenle Newton-Raphson metodu olarak bilinir.

Belki de bunu öğrenmenin en iyi yolu bir örnekle göstermektir: Diyelim ki $\sqrt{27}$'yi bulmak istiyoruz. Aşikardır ki, burada hesap makinesi kullanılacaktır. Ne var ki, bu değerin ne olacağını tahmin etmek isteyebilirsiniz. Açıktır ki, bu $\sqrt{25}$ ile $\sqrt{36}$ arasındadır ya da 5 ve 6 arasındadır ve 5'e daha yakındır.

Diyelim ki 5.2 dedik. Eğer bu doğru karekök ise, o zaman 27'yi 5.2'ye böldüğümüzde 5.2 elde etmemiz gerekir. Fakat bu doğru değildir; çünkü $\sqrt{27} \neq 5.2$'dir.

Daha yaklaşık bir sonuç arıyoruz. Bunu yapmak için, şunu buluyoruz; $27 \div 5.2 \approx (*) 5.192$. $27 \approx 5.2 \bullet 5.192$ olduğundan, bir çarpan (burada 5.2) $\sqrt{27}$'den büyük ve diğer çarpan (burada 5.192) $\sqrt{27}$'den küçük olmalıdır. Böylece $\sqrt{27}$ iki sayı arasına, 5.2 ve 5.192 arasına sıkıştırılmıştır; yani,

$$5.192 < \sqrt{27} < 5.2,$$

böylece ortalamayı almak (5.196), $\sqrt{27}$'ye 5.2 ve 5.192'den çok daha iyi bir yaklaşımdır.

Süreç böylece devam eder; her defasında bir ondalık basamak ilave edilir ve daha iyi bir yakınlaşma sağlanır. Yani, $5.192+5.196 \div 2 = 5.194$ olduğundan, o zaman $27 \div 5.194 = 5.19831$.

Böylece devam eden süreç, tam kare olmayan bir sayının

(*) $\approx$ semboli "yaklaşık olarak eşittir" demektir.

kare kökünün bulunmasıyla ilgili daha iyi anlayış sağlar bize.

Bu işlem biraz hantal olsa da, bir kare kökün ne demek olduğunu daha iyi temsil etmektedir. Hesap makinesi ortaya çıkmadan önce, bu zarif metodun okullarda niçin öğretilmediği hâlâ bir gizdir.

3

Şaşırtıcı Sonuçları Olan Problemler

Okullarda öğretilen matematiği düşündüğümüzde, ilk aklımıza gelen prombem çözmektir. Ne var ki çözülmesi gereken problem, tipik ders kitaplarında yer alan zor ve basmakalıp problemlerle (ya da egzersizlerle) ilişkilidir. Bu tip bir problem çözme, hayal gücünden tamamen yoksundur. Kimi insanlar bunu problem çözme olarak bile nitelendirmezler. Bunun yerine onlar bu tip problem çözmeyi, değişik niceliklerle aynı tekniği kullanmayı gerektiren egzersizler olarak değerlendirirler. Gerçek problem çözme yaratıcıdır ve hayal gücüne bağlı bir girişimdir; bu hiçbir şekilde matematikle sınırlandırılamaz. Günlük hayatımızda bu hep olan bir şeydir. Tiyatroya ne kadar zamanda gideceğimizi belirlemek istediğimizde, bir yere nasıl ulaşacağımızı hesapladığımızda, birini kendi görüşlerimize inandırmaya çalıştığımızda, nasıl ve ne zaman bir caddeyi geçeceğimize baktığımızda ve bir matematiksel problemi nasıl çözeceğimizi düşündüğümüzde hep problem çözüyoruzdur. Günlük yaşamda karşılaştığımız bu tip durumlar problem çözmenin çeşitli biçimleridir. Önem dereceleri değişik olsa da, hepsi bir çözüme ulaşılması için bir stratejinin geliştirilmesini gerektirir.

Problem çözme eğlenceli de olabilir. Yani, eğer bu yıldırıcı bir tecrübeye dönüşmezse. İnsanların eğlenceli bulduğu şey, kolayca anlaşılan bir problemin –yani, görünüşte inanılmaz derecede basit olan bir problemin– geleneksel metotlarla kendisinin çözülmesine izin vermemesidir; ama onu çözmek için sıra dışı bir yaklaşım kullanıldığında onun şaşırtıcı

derecede (hemen hemen) önemsiz bir hale gelmesidir. Burada sunulan birçok problem için durum böyledir. Hepsi çok kolay anlaşılabilir ve akılcı çözümleri gördüğünüzde "vay canına!" demekten kendinizi alamayacaksınız.

Oysa bunların çoğu en temel lise matematiğinden başka bir şey gerektirmemektedirler. Ayrıca gerekli olduğunda hatırlatıcılar konulmuştur. Şimdi bunların içine dalın ve kendinizin bir problem çözme aşığı haline dönüşümünü izleyin.

3.1 Akılcı Uslamlama

Birçok insan, bir problemle karşılaştığında genellikle ilkel düşünme biçimlerine başvurmayı tercih eder. Zaman zaman eğitimli olanlar, bilinçli bir şekilde daha önce çözülmüş problemlerle benzerlik kurmaya çalışarak yeni problemde bunlardan yararlanılıp yararlanılamayacağını anlamaya çalışırlar. İlkel yöntemler kullanıldığında (ki biz bunları "köylünün yolu" olarak da adlandırabiliriz) çözüm pek olası değildir. Ortaya çıksa bile, akılcı bir uslamlamadan kaynaklanmış olan zarif çözüme (ki biz bunu "şairin yolu" olarak adlandırabiliriz) nazaran çok daha fazla zaman alacaktır. Bunun güzel bir örneği aşağıdadır. Bu örnek size, eğitimsiz bir düşünmenin sizi nasıl da çözüme yaklaştıramadığını göstermektedir.

> Bir satranç tahtası ve her biri satranç tahtasındaki iki kare büyüklüğünde olan 32 domino taşı verilmiş olsun; köşelerdeki karşılıklı iki kare ortadan kaldırıldığında, 31 tane domino taşının satranç tahtasını nasıl kaplayabileceğini gösterebilir misiniz?

Soru ortaya konulur konulmaz, birçok insan karelerin kaplanmasıyla ilgili çeşitli düzenlemeler deneyeceklerdir. Bu gerçek taşlarla ya da bir tablo çizip taş koymayı temsil etmek üzere her defasında iki kareyi boyayarak gerçekleştirilebilir. Çok

uzun değil, bir süre sonra yılgınlık kendisini göstermeye başlar; çünkü bu metot pek başarılı olamaz.

Burada asıl mesele orijinal soruya geri dönmektir. Soruyu dikkatli okuduğumuzda göreceğiz ki, o bizden bu kaplamayı yapmamızı istemiyor; sadece bunun yapılıp yapılamayacağını söylememizi istiyor. Ne var ki, aldığımız eğitimden dolayı genelde bu soru yanlış okunur ve "onu yap" olarak algılanır.

Biraz öngörünün bize yardımı olabilir. Kendinize soruyu sorun: Eğer bir domino taşı tahtaya konulursa hangi çeşit kareler kaplanır? Bir siyah kare ve bir beyaz kare konulan domino taşıyla birlikte kapanması gerekir. Peki, bu kısaltılmış tahtada eşit sayıda siyah ve beyaz kare var mıdır? Hayır! Beyaz kareler iki tane daha fazladır. Bu nedenle bu tahtayı 31 tane domino taşıyla kaplamak mümkün değildir; çünkü bunun olması için eşit sayıda siyah ve beyaz karenin olması gerekir.

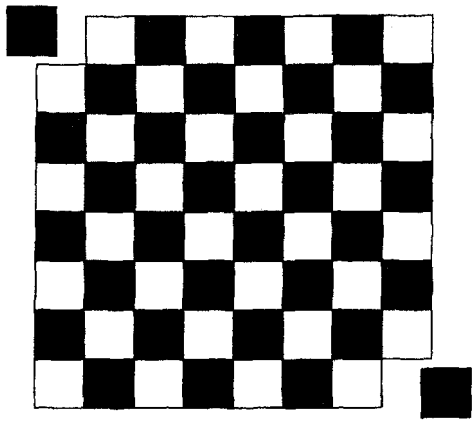
Matematikte doğru soruları sormak ve sorulan soruyu dikkatle incelemek, problem çözmede başarılı olmanın önemli yönlerinden ikisidir. Bu bölüm bize basit ama derin matematiksel düşünmedeki güzelliği göstermektedir.

3.2 Şaşırtıcı Çözüm

İşte karşınızda oldukça basit bir problem ve onun daha da basit çözümü. Ama çoğu insanın bulacağı çözüm bundan çok daha karmaşık olacaktır. Niçin? Çünkü onlar probleme psikolojik olarak geleneksel açıdan bakacaklardır: onun sunulduğu ve göründüğü şekilde. Problemi kendiniz çözmeye çalışın (aşağıdaki çözüme bakmayın) ve "çoğunluktaki-çözücüler" grubuna girip girmediğinizi öğrenin. Daha sonra sunulacak çözüm muhtemelen birçok okuyucuyu büyüleyecektir (aynı zamanda gelecekle ilgili rehberlik de yapacaktır).

Tek elemeli (yenilen takım turnuva dışı kalır) bir basketbol

turnuvasında 25 takım yarışmaktadır. Bir turnuva şampiyonu çıkana kadar kaç maçın oynanması gerekmektedir?



Tipik olarak çoğunluktaki-çözücüler (oynanan oyunların sayısını kafalarında tutarak) turnuvayı gözlerinde canlandırmaya başlayacaklardır; 12 takımdan iki grup yapıp ilk turu oynatacaklardır; böylece 12 takım elenmiş olacak (12 maç oynanmış olacak). Geri kalan 13 takımın 6'sı diğer 6'ya karşı oynayacak; böylece geriye turnuvada 7 takım kalacak (18 maç oynanmış olacak). Bir sonraki turda geri kalan 7 takımın 3'ü elenebilir (21 maç oynanmış olacak). Geriye kalan 4 takım 2 maç daha yaparak final maçını hazırlar (23 maç oynanmış olacak). Final maçı da 24. maçtır.

Çoğu insanın ilk denemede bulamayacağı, bu problemi çözmenin başka bir yolu ise yukarıda yaptığımız gibi kazananlara değil de kaybedenlere odaklanmaktır. Anahtar soruyu soralım: 25 takımlı bir müsabakada bir kazanan olması için kaç kaybedenin olması gerekir? Yanıt basittir: 24 kaybeden. 24 kaybeden olması için kaç maç oynanmalıdır? Tabii ki 24. Böylece cevabı bulmuş oldunuz; kolayca elde ettik. Şimdi, çoğu insan düşünecektir; niçin bunu ben düşünemedim? Cevap şudur: bu, bizim aldığımız eğitim biçimine ve tecrübelerimize terstir. Probleme farklı bir bakış açısından bakma stra-

tejisinin farkında olmak kimi zaman inanılmaz yararlar sağlayabilir bizlere; tıpkı burada olduğu gibi. Hangi stratejinin çalışacağı bilinemez; yalnızca bir tanesini deneyin ve görün. Bu örnekte biz, herkesin odaklandığı şeyin –kazananların– tersine odaklandık. Kaybedenleri incelememiz bize çözümü yakalamamız için güzel bir yol açtı.

3.3 Bu Problemin Şerefine İçmeyin

Okunması uzun bir problem bazı insanların içine ne sorulduğunu dahi anlamama korkusunu salabilir. Şimdiki problem için biraz okuma yapmamız gerekse de, anlaşılması oldukça kolaydır ve dramatize bile edilebilir. Bir kere problemin yazısını okumayı bitirdikten sonra anlaşılması çok kolay; ama geleneksel araçlarla çözülmesi oldukça zordur.

İşte problemin güzelliğinin geldiği yer burasıdır. İleride sunulacak zarif bir çözüm –tabii ki beklenmedik olacak– problemi bir anda önemsiz bir hale getirecektir. Ne var ki, bizim geleneksel düşünce kalıplarımız problem üzerine kafa karıştıran bir sis bulutu yerleştirecektir. Yılmayın. Zekice bir deneme yapın. Mücadele edin biraz. Daha sonra da çözümü okuyun. Problemi ifade ederek başlıyoruz.

> İki tane bir galonluk şişemiz var. Bir tanesinde bir kuart kırmızı şarap, diğerinde bir kuart beyaz şarap bulunuyor. Bir kaşık dolusu kırmızı şarabı alıyoruz ve beyaz şarabın içine döküyoruz. Daha sonra bu karışımdan (beyaz ve kırmızı şarap) bir kaşık dolusu alıp bunu kırmızı şarap şişesine döküyoruz. Beyaz şarap şişesinde daha fazla mı şarap vardır; ya da kırmızı şarap şişesinde daha fazla mı beyaz şarap vardır?

Bu problemi çözmek için herhangi bir geleneksel yolu deneyebiliriz –örneğin lise yıllarından bildiğimiz "karışım problemleri" yöntemlerini– ya da daha akılcı bir uslamlamayla

çözüme gidebiliriz; problemin aşağıdaki çözümüne bakın.

İlk şarap "taşınmasında" kaşıkta yalnızca kırmızı şarap vardır. İkinci şarap "taşınmasında" ise kaşıkta beyaz şarap olduğu kadar "beyaz şarap şişesindeki" kırmızı şaraptan da vardır. Bu bazı okuyucuların biraz düşünmesini gerektirebilir; ne var ki sonuçta bu "kavranacaktır".

Anlaşılması en kolay ve en kuvvetli olduğu görülecek olan strateji uç noktaları kullanmaktır. Bu tip bir uslamlamayı günlük yaşantımız içinde her zaman kullanırız: "en kötü durumda şöyle şöyle olursa, o zaman biz şuna karar verebiliriz ki..."

Şimdi gelin yukarıdaki problem için bunu kullanalım. Bunu yapmak için kaşık dolusu miktarı biraz daha büyük olarak düşüneceğiz. Açıkça ortadadır ki, problemin, cevabı kullanılan nicelikten bağımsızdır. Böylece biz en uç niceliği kullanacağız. Bu niceliği gelin tam bir kuart yapalım. Yani, problemde verilen yönergeleri takip edersek, ilk başta miktarı alacağız (bir kuart kırmızı şarap), bunu beyaz şarap şişesine dökeceğiz. Şimdi karışımda % 50 beyaz şarap, % 50 kırmızı şarap var. Şimdi bunun bir kuartını kırmızı şarap şişesine geri dökeceğiz. Şimdi iki şişedeki karışım da aynı. Bu nedenle, kırmızı şarap şişesinde ne kadar beyaz şarap varsa, beyaz şarap şişesinde de o kadar kırmızı şarap var.

Uç durumun bir başka biçimini de düşünebiliriz; bu durumda taşımayı yapan kaşıkta hiçbir şey olmasın. Bu durumda sonuç hemen karşımıza çıkar: kırmızı şarap şişesinde ne kadar beyaz şarap varsa, beyaz şarap şişesinde de o kadar kırmızı şarap vardır; yani sıfır!

Dikkatle sunulmuş olan bu problemin, bireyin daha sonraki matematik problemlerine yaklaşımını değiştirebilir ve günlük yaşamdaki karar verme mekanizmalarını kuvvetlendirebilir.

3.4 Geriye Doğru Çalışmak

Kimi durumlar vardır ki, basit yaklaşımlar bir problemi çözmek için en iyi yol değildir. Bu matematikte olduğu kadar günlük yaşam olaylarında da böyledir. Örneğin, eğer 19:30'da başlayacak bir filmi görmek istiyorsanız ve sinemaya gitmeden önce yapacak şeylerinizin olduğunu biliyorsanız, en iyi, ne zaman sinemaya gitmek için hazır olmanız gerektiğini hesaplamak için 19:30'dan geriye doğru hesap yapmaya başlarsınız. 30 dakika yolculuk zamanı, 1 saat akşam yemeği süresi, 15 dakika giyinme süresi ve 45 dakika yapmanız gereken bir işi bitirme süresi olarak yapmanız gerekenleri öngörebilirsiniz. Bu, sinemaya gitmek için 17'de hazırlanmaya başlanmanız gerektiği anlamına gelir.

Matematikte, geriye doğru çalışmanın sizi zarif bir çözüme doğru götürdüğü birçok örnek bulunmaktadır. Buna en iyi örneklerden bir tanesi biraz "sıra dışı" bir problemdir; yine de yalnızca birazcık temel cebir gerektirir. Şimdi bu probleme bir bakalım.

> Eğer iki sayının toplamı 2 ve bu sayıların çarpımı 3 ise, bu iki sayının terslerinin toplamını bulun.

Bu probleme verilecek olan beklenir bir tepki, yukarıda anlatılan durumu ifade eden denklemleri kurmaktır. Şunları görmeyi bekleyebilirsiniz:

$$x + y = 2 \text{ ve } xy = 3$$

Bu denklemleri aynı anda çözmek için verilecek reaksiyon, ilk denklemi y için çözmek, $y = 2\text{-}x$ ve bunu ikinci denklemde y'nin yerine koymaktır. Bu şu sonucu doğuracaktır:

$$x\,(2\text{-}x) = 3 \text{ ya da}$$
$$x^2 - 2x + 3 = 0$$

Bu kuadratik (şans eseri) çarpanlarına ayrılabilir değildir. Kuadratik formül(*) ona uygulandığında, köklerin kompleks sayılar olduğunu görürüz. O zaman bu kompleks sayıların terslerinin toplamı gerekmektedir. Cevap sonunda gelecektir; fakat ona ulaşmak için biraz cebir gerekli olacaktır. Siz yol boyunca ilerleyerek sonunda sonuca ulaşacak olsanız da, fark edeceksiniz ki bu "köylünün yoludur"; "şairin yolu" değil.

Geriye doğru çalışmak, akılcı bir alternatiftir ve sizden şu soruyu sormanızı ister: Nerede sonuca ulaşacağım? Terslerin toplamı arandığına göre, şöyle bir şey karşımıza çıkacaktır: $1 \div x + 1 \div y$. Bu düşünceyle devam edersek şunu sormalıyız: Buradan ne çıkabilir? Bir olasılık bu kesirlerin toplamıdır; yani, $x+y \div xy$. Akıllı bir kişi hemen fark edecektir ki, çözüm tam karşımızda durmaktadır. Orijinal denklemleri hatırlayınız, $x+y = 2$ ve $xy = 3$. Bunlar bize, $x+y \div xy$ kesrinin pay ve paydasının değerlerini, yani 2 ve 3'ü vermekteler. O zaman başlangıçtaki sorumuzun (problemin) cevabı $2 \div 3$'tür. Geleneksel metottan çok daha basit değil mi bu yaklaşım? Böyle etkili kısa yollar her zaman olası değildir; fakat problemleri bu şekilde pratik yollarla çözmenin getirdiği tecrübe size çok iyi hizmet edebilir ve gelecekteki problemlerin çok daha basitçe geriye doğru çalışma stratejisi kullanılarak çözülmesini sağlayabilir.

3.5 Mantıksal Düşünme

İlk bakışta yıldırıcı görünen bir problem ortaya konulduğunda ve daha sonra da –kolayca anlaşılan– bir çözüm sunulduğunda, genellikle bu basit çözümü niçin kendimizin düşünemediğini merak ederiz hep. Aslında, üzerimizde etki bırakan problemler hep bu tiptendir ve bize gelecekteki (benzer) durumlar

(*) Kuadratik bir denklem ikinci dereceden bir denklemdir (yani, ondaki en yüksek üs değeri 2'dir) ve onun kökleri (ya da çözümü) şu kuadratik formül ile bulunur: $x = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}) \div 2a$.

için yardımcı olması gerekir. İşte size böyle bir problem.

> Danny'nin bodrumundaki bir rafta üç kutu var. Biri sadece beş sentleri, biri sadece on sentleri ve sonuncusu da hem beş sentleri hem de on sentleri içeriyor. Üzerinde "beş sentler", "on sentler" ve "karışık" yazan kâğıtlar kutuların üzerinden düşmüşler ve hepsi de yanlış kutulara geri yapıştırılmışlar. Bu durumda Danny içlerine bakmadan, yanlış işaretlenmiş kutuların birinden bir tane para çekebilir ve daha sonra tüm kutuların içinde ne olduğunu belirleyebilir. *Danny hangi kutudan seçim yapmalıdır?*

Problemin içindeki "simetrinin" bizi şunu söylemeye mecbur bıraktığını söyleyebilirsiniz: "beş sentler" kutusu için söylenebilecek her şey, "on sentler" kutusu için de aynı şekilde söylenebilir. Böylece Danny bu kutuların herhangi birinden bir para çekerse, durum aynı kalacaktır.

Bu nedenle araştırmamızı, "karışık" kutusundan para çekersek ne olacağı üzerine yoğunlaştırmalıyız. Varsayalım ki Danny "karışık" kutusundan bir beş sent çekti. Bu kutu yanlış işaretlenmiş olduğundan dolayı karışık kutusu olamaz ve bu nedenle beş sentler kutusu olması gerekir. On sentlik kutusu olarak işaretlenmiş kutu gerçekte on sentlikler kutusu olamayacağından bu kutu da "karışık" kutusu olmalıdır. Bu da son kutunun on sentlikler kutusu olduğu anlamına gelir. Muhtemelen problemin ne kadar kolay olduğunu düşünüyorsunuzdur –sonuca sahip olduğunuza göre. Bu örnek mantıksal düşünmenin güzelliğini ortaya koyar.

3.6 Bu Sadece Sizin Verileri Organize Etmenizle İlgili

İşte size (oldukça temel!) cebirle biraz tanışık olmanızı gerektiren bir problem. Problem sunulduğunda simetri onu ol-

dukça basit gibi gösterecektir; ama bekleyin.

İşte problem:

Aşağıdaki ifadenin sayısal değerini bulun:

$$(1 - \frac{1}{4})\,(1 - \frac{1}{9})\,(1 - \frac{1}{16})\,(1 - \frac{1}{25})\ldots\,(1 - \frac{1}{225})$$

Genellikle bu soruya "düşünmeden" verilen tepki her ifadenin "basitleştirilmiş" halini oluşturmaktır. Yani, her bir parantez içindeki çıkarma işlemini yapmaktır (yani, $1 - 1 \div 4 = 3 \div 4$); böylece karşımıza şu çıkar:

$$(\frac{3}{4})\,(\frac{8}{9})\,(\frac{15}{16})\,(\frac{24}{25})\ldots\,(\frac{224}{225})$$

Her bir kesiri (hesap makinesi yardımıyla) ondalık bir şekle çevirmek ve (yeniden hesap makinesi ile) bunları birbirleriyle çarpmak alışmamış bir şey değildir. Ne var ki, bu işlem gerçekten çok hantal bir hesaplama yöntemidir.

Alternatif bir metot, verileri farklı bir şekilde organize etmektir. Bu, probleme farklı bir açıdan bakmamızı sağlar ve bir şekilde işimizi kolaylaştıracak bir kalıp bulma umudumuzu arttırabilir.

$$(1^2 - \frac{1}{4^2})\,(1^2 - \frac{1}{3^2})\,(1^2 - \frac{1}{4^2})\,(1^2 - \frac{1}{5^2})\ldots\,(1^2 - \frac{1}{15^2})$$

Şimdi parantez içindeki ifadeleri, iki tam karenin farkları(*) olduklarından dolayı çarpanlarına ayırıyoruz; bu şunu üretir:

$$(1 - \frac{1}{2})\,(1 + \frac{1}{2})\,(1 - \frac{1}{3})\,(1 + \frac{1}{3})\,(1 - \frac{1}{4})\,(1 + \frac{1}{4})\ldots$$

$$(1 - \frac{1}{5})\,(1 + \frac{1}{5})\ldots(1 - \frac{1}{15})\,(1 + \frac{1}{15})$$

Şimdi parantez içindeki toplamları ya da çıkarmaları yaparak şunu elde ediyoruz:

$$(\frac{1}{2})\,(\frac{3}{2})\,(\frac{2}{3})\,(\frac{4}{3})\,(\frac{3}{4})\,(\frac{5}{4})\,(\frac{4}{5})\,(\frac{6}{5})\ldots$$

(*) İki tam kare farkı şu şekilde çarpanlarına ayrılabilir: $x^2 - y^2 = (x-y)\,(x+y)$.

$(\frac{13}{14})(\frac{15}{14})(\frac{14}{15})(\frac{16}{15})$

Bir kalıp açığa çıkmıştır; kesir çiftlerini çarpabiliriz ve ifade edildiği gibi her defasında 1 elde ederiz.

$(\frac{1}{2})$ $(\frac{3}{2})(\frac{2}{3})$ $(\frac{4}{3})(\frac{3}{4})$ $(\frac{5}{4})(\frac{4}{5})$

$(\frac{6}{5})(\frac{5}{6})\ldots(\frac{14}{13})(\frac{13}{14})$ $(\frac{15}{14})(\frac{14}{15})$ $(\frac{16}{15})$

Sonuç olarak elimizde şu kalır: $(1 \div 2)(16 \div 15) = 8 \div 15$.

Burada, kullanışlı bir kalıba dönüşen iyi organize edilmiş verilerin gücünü görüyorsunuz.

3.7 Doğru Bilgiye Odaklanmak

Birçok bilgiyi içeren bir problemle karşılaşıldığında, marifet, gerekli bilgiden uzaklaştırılmamaktır. Bazen de marifet, problemin koşullarının sizi yararlı olmayacak bir bilgiye doğru çekmesine izin vermemektir. Sizden neyi bulmanız isteniyorsa ona odaklanın ve bunun size yol göstermesine izin verin. Bu belki de en iyi şu problemle örneklenebilir.

Dolu bir 16 ons şişedeki şarap miktarını arttırmak isteyen Barbara şu prosedürü uygulamaya karar verir.

İlk gün yalnızca 1 ons şarap içecek ve daha sonra bunun yerine şişeye su koyacak (yani, şarabı suyla değiştirmiş olacak).

İkinci gün karışımdan 2 ons içecek ve tekrar şişenin kalanını suyla dolduracak.

Üçüncü gün karışımdan 3 ons içecek ve tekrar şişenin kalanını suyla dolduracak.

16 gün şişenin içindeki karışımın tamamını içinceye kadar her gün bu prosedürü tekrar edecek. Barbara toplamda kaç ons su içmiş olacaktır?

Bu tip bir problemde çıkmaza girmek oldukça kolaydır. Kimi teşebbüsler, her gün şişedeki şarap ve su oranını gösteren tablolar yapmakla başlayacak ve Barbara'nın herhangi bir günde içtiği sıvıların oranını hesaplamaya çalışmakla devam edecektir. Bunlar oldukça kullanışsız yollardır.

Bu problemi başka bir bakış açısından çok daha rahat bir şekilde sonuçlandırabiliriz; yani, Barbara karışıma her gün ne kadar su ekledi? Şarabın miktarıyla uğraşarak çıkmaza girip, dikkatinizi dağıtmayın. Nihayetinde (16. günde) tüm şişeyi içtiğine göre ve başlangıçta hiç su olmadığına göre, şişeye koyduğu tüm suyu içmiş olması gerekir. Böylece sadece Barbara'nın her defasında koyduğu su miktarını hesaplayacağız.

İlk gün Barbara 1 ons su ekledi.

İkinci gün Barbara 2 ons su ekledi.

Üçüncü gün Barbara 3 ons su ekledi.

15. gün Barbara 15 ons su ekledi (açıktır ki, 16. gün hiç su eklememişti).

Bu nedenle Barbara'nın tükettiği su miktarı, onun her gün eklediği su miktarlarının toplamına eşittir; yani:

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 = 120$ ons.

Bu sonucun doğruluğuyla birlikte, daha basit benzer bir problem de şu şekilde düşünülebilir: Barbara toplamda ne kadar sıvı tüketmiştir? Tek yapmamız gereken içtiği şarap miktarını da buna eklemektir; yani 16 ons. Böylece:

$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13 + 14 + 15 + 16 - 16 = 136$ ons.

Barbara 136 ons sıvı tüketmiştir; bunun 16 onsu şarap olduğuna göre geri kalanı, 120 onsu su olmalıdır. Bu çözmesi oldukça basit bir problemdir; yeter ki biz istenilen bilgiye odaklanalım ve diğer bilgilerin dikkatimizi dağıtmasına izin vermeyelim.

3.8 Güvercin Yuvası Prensibi

En ünlü (ama sıklıkla gözden kaçan) problem çözme tekniklerinden birisi de güvercin yuvası prensibi olarak adlandırılır. En basit şekliyle, güvercin yuvası prensibi şunu söyler: Diyelim ki, 25 nesne ve bunları koyacak 24 kutuya sahipsiniz; o zaman en azından bir kutu içine birden fazla nesne alacaktır. Genel terimlerle söylersek, biz matematik çevresinde bunu şöyle söyleriz: *Eğer k deliğe koymak için k + 1 tane objeniz varsa, o zaman en azından bir tane deliğin içinde 2 veya daha fazla obje olacaktır.*

İşte karşınızda güvercin yuvası prensibinin nasıl çalıştığını gösteren bir örnek.

> Bir okulun genel ofisinde öğretmenlere ait 50 tane posta kutusu olsun. Bir gün postacı öğretmenler için 151 tane mektup getirir. Tüm mektuplar dağıtıldıktan sonra, bir posta kutusu diğerlerinden bir fazla mektup alıyor. Onun alabileceği minimum mektup sayısı nedir?

Böyle problemlerle karşılaşıldığında genellikle problemin içinde "amaçsızca debelenme" eğilimi vardır; çünkü genellikle nereden başlanılması gerektiği bilinmez. Bazen, tahmin ve test etme burada işleyebilir. Ne var ki, bu tip problemlerde tavsiye edilen yaklaşım uç noktaları düşünmektir. Doğaldır ki, bir öğretmenin gelen tüm mektupları almış olması olasıdır; fakat bu *garanti* değildir.

Durumu en iyi şekilde değerlendirmek için biz en uç durumu düşüneceğiz; mektupların olabilecek en eşit şekilde dağıldığı durumu. Bu durumda her öğretmen 3 tane mektup alacaktır; fakat bir öğretmen bunun dışında 151. mektubu da alacaktır. Bu nedenle en çok mektubu alan kutunun alabileceği en az mektup sayısı 4'tür. Güvercin yuvası prensibiyle görürüz ki, 50 kutunun her biri 3 mektup alabilir; fakat 151. mektup 50 kutudan birine yerleştirilmelidir.

3.9 Balarısının Uçuşu

Problem çözme, yalnızca eldeki problemi çözmeyle bitmez. O aynı zamanda, çeşitli problem tiplerini ve daha da önemlisi çözüm için gerekli çeşitli prosedürleri sunmayı da içerir. Problem, çözüm için gerekli tekniğin sunulması için bir araçtır. Bir kişi problem çözmeyi gerçekte çözüm tiplerinden öğrenir; çünkü çözülecek bir probleme yaklaşımda kullanılacak en önemli tekniklerden biri, kendine şu soruyu sormaktır: Daha önce bu problemle karşılaşmış mıydım? Bunu akılda tutarak, önemli bir "dersle" birlikte şimdi bir problem sunulacaktır. Problemi anlamak için karşınızda olan görece uzun bir yazıdan dolayı mücadeleden vazgeçmeyin. Çözümün beklenmedik basitliği karşısında şaşıracaksınız (ya da eğleneceksiniz).

> Chicago'dan New York'a giden 800 mil uzunluğundaki bir tren yolunda hizmet veren iki tren (aynı yol üzerinde), birbirlerine doğru hareket etmeye başlıyorlar. Biri saatte 60 mil hızla yol alırken, diğeri saatte 40 mille gidiyor. Aynı zamanda, bir balarısı trenlerin birinin önünden saatte 80 mil hızla diğer yaklaşan trene doğru harekete geçiyor. Bu trene dokunduktan sonra istikametini ters çevirip bu sefer ilk trene doğru harekete geçiyor (yine saatte 80 mil hızla). Balarısı bu ileri geri hareketine iki tren çarpışıp kendisini ezene kadar devam ediyor. Ezilmeden önce balarısı kaç mil yol almıştır?

Teker teker balarısının aldığı yolları hesaplamaya çalışma eğilimi doğaldır. İlk reaksiyon (lise matematiğinden bildiğimiz) ünlü ilişkiye dayalı olan denklemler kurmaktır: hız çarpı zaman eşittir yol. Ne var ki bu ileri geri hareketten dolayı alınan yolları belirlemek çok zordur ve bir sürü hesaplama gerektirmektedir. Bunu yapmak fikri bile insana yılgınlık verebilir. Bu yılgınlığın ortaya çıkmasına izin vermeyin. Balarısının aldığı yolların her birini hesaplayabilseniz bile, yine de problemi bu şekilde çözmek çok zordur.

Çok daha zarif bir yaklaşım daha basit benzer bir problemi çözmek olacaktır (kimileri de probleme farklı bir bakış açısından yaklaştığımızı söyleyebilirler). Balarısının aldığı yolu bulmaya çalışacağız. Eğer balarısının yolculuk zamanını bulabilirsek, balarısının aldığı yolu bulabiliriz; çünkü zaten balarısının hızını biliyoruz. Denklemin iki parçasını elde ederek, hız • zaman = yol, üçüncü parçasına ulaşacağız. Böylece *hız* ve *zamanı* elde ederek, çeşitli yönlerde de olsa yola ulaşacağız.

Balarısının yolculuk zamanı kolayca hesaplanabilir; çünkü o, iki tren (çarpışana kadar) birbirine doğru ne kadar zaman yaklaşmışlarsa o kadar zaman hareket etmiştir. Trenlerin yolculuk zamanını, t'yi hesaplamak için şu denklemi kuruyoruz: Birinci trenin aldığı yol $60\,t$ ve ikinci trenin aldığı yol ise $40t$. İki trenin toplamda aldığı yol ise 800 mildir. Bu nedenle $40\,t + 60\,t = 800$ ya da $100\,t = 800$; böylece $t = 8$'dir; yani, balarısı 8 saat yolculuk etmiştir. Şimdi balarısının aldığı yolu bulabiliriz; hız çarpı zaman eşittir yol formülünden, $8 \times 8 = 640$ mildir.

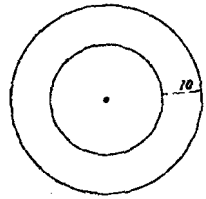
Problemin direk olarak söylediği şeyi yapmaya çalışmak tuzağına düşmekten nasıl kurtulacağımızı vurgulamak önemlidir. Gün gelir daha dolaylı bir yol daha etkili bir hal alır. Birçok şey bu çözümden öğrenilebilir. Gördüğünüz gibi böyle etkili çözümler genelde geleneksel çözümlerden daha etkilidirler; çünkü "kalıpların dışında düşünmek" için bize fırsatlar yaratırlar.

3.10 Ortak Merkezli Çemberleri İlişkilendirmek

Kullanılacak çözüm problemin kendisinden daha önemlidir. Bu konuya daha sonra tekrar döneceğiz (sizi bekleyen sürprizin zevkini kaçırmamak için).

Şu probleme bakın:

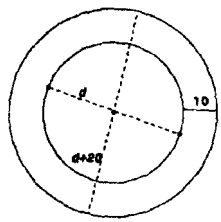
İki ortak merkezli çember, aşağıda da gösterildiği gibi birbirinden 10 birim uzaklıktadır. Çemberlerin çevreleri arasındaki fark ne kadardır?



Bu problemin çözülmesine uygulanacak geleneksel, en açık çözüm, iki çemberin de çapını bulmaktır. Daha sonra da her çemberin çevresini bulup iki değeri birbirinden çıkarılır. Çaplar verilmediğinden bu problem biraz karışıktır. Küçük çemberin çapına d diyelim. O zaman büyük çemberin çapı $d + 20$(*) olacaktır. Böylece çemberlerin çevreleri sırasıyla πd ve $\pi\ (d + 20)$ olacaktır.

Çevreler arasındaki fark ise,

$$\pi\ (d + 20) - \pi d = \pi d + 20\pi - \pi d = 20\pi \text{ olur.}$$



Daha zarif ve oldukça etkili bir metot ise bir uç durumu kullanmaktır. Bunu yapmak için iki çemberden küçüğünü gittikçe küçülteceğiz; ta ki "ekstrem bir küçüklüğe" ulaşana kadar; yani bir "nokta" olana kadar. Bu durumda, bir noktaya kadar *küçültülmüş* olan bizim küçük çemberimiz, büyük çemberimizin merkezi haline gelmiştir. Böylece şu anda iki

(*) Yani, küçük çemberin d çapı artı, iki çember arasındaki uzaklık olan iki kere 10.

çember arasındaki uzaklık basitçe büyük çemberin yarıçapı haline gelmiştir. İki çemberin çevreleri arasındaki fark (başta istenen), büyük çemberin çevresi(*) haline yani, 20π haline gelmiştir.

Her iki prosedür de aynı sonucu verse de, geleneksel metotla iki çemberin çevrelerinin farkını alırken ne kadar daha çok emek harcandığına ve uç bir noktayı düşünerek (hiçbir genellemeyle çatışmadan) problemi nasıl da basit bir hale indirgediğimize dikkat ediniz. Böylece burada da matematik güzelliğini, problemi çözmede kullandığımız metotlarda ortaya koymuştur.

3.11 Bariz Olanı Kaçırmayın

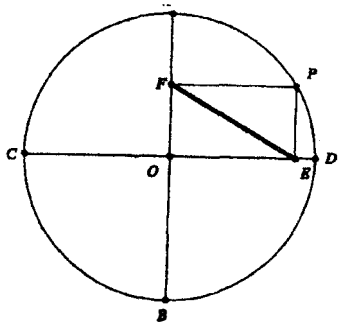
İşte size, çözümü ortaya konduğunda sizi hayal kırıklığına uğratacak bir problem (çünkü neden böyle bariz bir çözümü göremedin diyeceksiniz). Bu aslında, eğer bir öğrenci Pisagor teoremini daha önce görmüşse çözülebilecek bir problem. Aslında bu bilgi, genellikle zarif çözümlerde bize yardımcı olabilir. İşte problem:

> P, merkezi O olan bir dairenin üzerinde herhangi bir noktadır. P'den, birbirine dik olan $\overline{AB}$ ve $\overline{CD}$ çizgilerine doğru dik çizgiler çizilmiştir; bu çizgiler E ve F noktalarında bu birbirine dik çizgilerle karşılaşırlar. Eğer çemberin çapı 8 ise $\overline{EF}$'nin boyu nedir?

Öğrendiklerimiz doğrultusunda burada Pisagor teoremini(**) uygulamaya çalışacağız ve göreceğiz ki teoremi uygulamak için "derli toplu" bir yol yok. Problemde bir adım geriye git-

(*) Bunu yapabiliriz; çünkü bize herhangi bir çemberin büyüklüğü verilmemiştir. 10 uzunluğunu koruduğumuz sürece iki çemberi istediğimiz büyüklüğe getirebiliriz.

(**) Çünkü küçük çember 0 çevreye sahiptir.



mek ve ona daha başka bir perspektiften bakmak şu olguyu ortaya koyacaktır: bir dörtkenarlı olan *PFOE* aslında bir dikdörtgendir (üç açısının dik olduğu bize verilmiştir). Bir dikdörtgenin iki köşegeni de eşit uzunlukta olduğundan *FE* *PO*'ya eşit olmalıdır ki bu da çemberin yarıçapına, çapın yarısına, yani 4'e denktir.

Probleme bir başka bakış açısı ise *P* noktasını çok daha kolay bir yerde almaktır; örneğin *A* noktasında. Bu durumda $\overline{FE}$ ve $\overline{AO}$ birbiriyle çakışacaktır (çünkü çaplar birbirine diktir) ki $\overline{AO}$ çemberin yarıçapıdır.

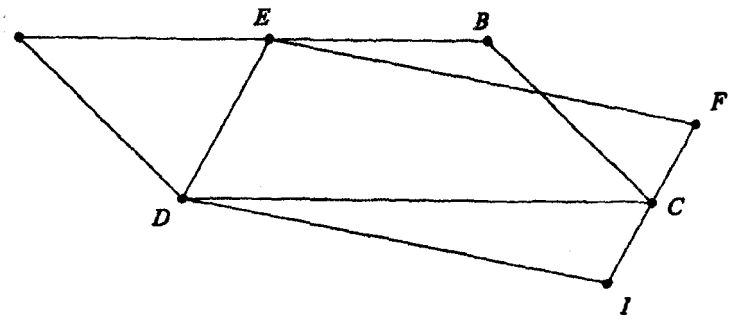
Her iki çözümde de muhtemelen kendinizi kaybettiniz. Bu hem bir eğlencenin hem de bariz olanı kaçırmamanın güzel bir örneğidir.

3.12 Görünüşte Zor (Kolay)

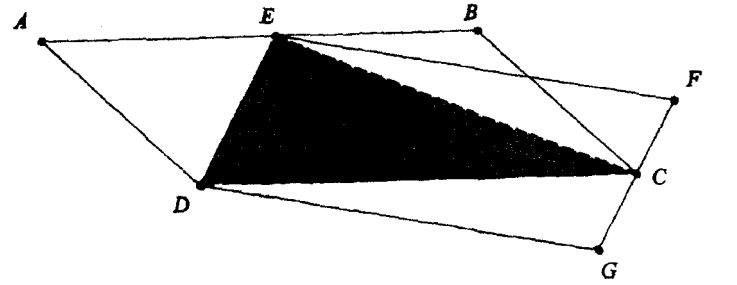
İşte size kolay görünen ama olmayan bir problem. Bu problem bütün bir lise matematik departmanını şaşkınlığa uğratmıştır. Ne var ki çözüm bir kere ortaya konunca soru oldukça kolay bir hale gelir. Sonuç, elbette çözümü baştan görememenin getirdiği rahatsızlıktır. İşte karşınızda. Onu ikinci diyagrama bakmadan çözmeye çalışın. Yoksa çözümü hemen anlayacaksınız.

Aşağıdaki resimde *E* noktası $\overline{AB}$ ve *C* noktası $\overline{FG}$ üzerin-

dedir. *ABCD* paralelkenarının alanı 20 birim karedir. *EFGD* paralelkenarının alanını bulunuz.(*)



Aslında çözüm, herkesin bir anda bulabileceği gibi olmasa da, sıradan bir lise geometri dersinde gösterilen araçlarla rahat rahat çözülebilir. Aşağıdaki resimde de görüldüğü gibi bir $\overline{EC}$ çizgisi çizerek işe başlayalım.



EDC üçgeni ve *ABCD* paralelkenarı ortak bir taban ($\overline{DC}$) ve yükseklik (*E*'den $\overline{DC}$'ye çizilecek dikme) paylaştıklarından, *EDC* üçgeninin alanı, *ABCD* paralelkenarının alanının yarısına eşittir.

(*) Pisagor teoremine göre bir dik üçgenin a, b ve c kenarları arasında (c burada hipotenüstür) şu ilişki vardır: $a^2 + b^2 = c^2$.
Genellikle bir paralelkenarın alanı, yüksekliği ile tabanının çarpılmasıyla bulunur. Bu burada mümkün değildir; bu nedenle başka bir prosedürün bulunması gerekecektir.

Benzer şekilde, *EDC* üçgeni ve *EFGD* paralelkenarı ortak bir taban ($\overline{ED}$) ve yükseklik (*C*'den $\overline{ED}$'ye çizilecek dikme) paylaştıklarından, *EDC* üçgeninin alanı, *EFGD* paralelkenarının alanının yarısına eşittir.

Böylece, *ABCD* ve *EFGD* paralelkenarlarının alanları *EDC* üçgenin alanının iki katı olduğuna göre, bu ikisinin alanlarının birbirine eşit olması gerekir. Bu nedenle, hem *ABCD* hem de *EFGD* paralelkenarlarının alanları 20 birimkaredir.

Bu sunulan çözüm her zaman kullanılmasa da, hem etkili hem de etkileyicidir.

Yine de bu problem, (genel kurallardan sapmadan) benzer daha basit bir başka yöntemle zarif bir biçimde çözülebilir. Hatırlayın; başlangıçta verilen şartlar, iki paralelkenarın ortak bir tepe noktasına (*D*) sahip olması ve birinin tepe noktasının, *E* ve *C*'de görüldüğü gibi diğerinin kenarında olmasıydı. Şimdi varsayalım ki, *C G* ile çakışıyor ve *E A* ile çakışıyor. Bu çakışma, başta belirtilen şartları sağlar ve bunun neticesinde iki paralelkenar, üst üste binerler. Böylece *EFGD* paralelkenarının alanı 20 birim karedir.

Bu çözüme de uç durumların kullanıldığı bir örnek gözüyle bakabiliriz. Yani, E noktasını $\overline{AB}$ üzerinde ama uç bir yerde, örneğin *A* noktasında. Benzer şekilde, *C* noktasını da G üzerine yerleştirebiliriz. Bunlar başlangıçtaki sorumuzun şartlarını sağlarlar. Böylece, iki paralelkenarımız çakıştığından sorumuz çok basit bir hal alır.

Başta problemin ne kadar zor olduğunu düşündüğünüzü hatırlıyor musunuz?

3.13 En Kötü Durum Senaryosu

Uç noktalarla akıl yürütmek bazı problemlerin çözülmesinde oldukça kullanışlı bir yoldur. Bu kimi zaman en kötü durum senaryosu olarak da düşünülebilir. Bunu ifade etmenin en gü-

zel yolu bir örnekle göstermektir. Şimdi gelin bazı, güzel akıl yürütme stratejilerini görelim.

> Bir çekmecenin içinde 8 mavi çorap, 6 yeşil çorap ve 12 siyah çorap vardır. Henry'nin bu çekmeceden görmeden minimum ne kadar sayıda çorap alması gerekir ki elinde aynı renkte iki çorap olduğundan emin olsun?

"Aynı renkte iki çorap olduğundan emin olsun" ibaresi problemin kalbini oluşturmaktadır. Problem hangi renk çorabın olması gerektiğini belirtmez; bu nedenle üç renkten herhangi biri olabilir. Bu problemi çözmek için "en kötü durum senaryosu" stratejisi kullanılabilir. Henry önce bir mavi çorap, sonra bir yeşil çorap ve daha sonra bir siyah çorap alır. Ne var ki bunların hiçbirisi birbirine uymaz. (Haklısınız, ilk iki çekmede o aynı renkte bir çift çekebilirdi; ama problem "emin" olmasından bahsediyor). Dikkat ediniz ki, bir sonra çekeceği çorap, bu elindeki çoraplardan birine mutlaka uyacaktır ve artık elinde bir çift aynı renk çorap olacaktır.

İkinci bir probleme bakalım:

> Bir çekmecenin içinde 8 mavi çorap, 6 yeşil çorap ve 12 siyah çorap vardır. Evelyn'in bu çekmeceden görmeden minimum ne kadar sayıda çorap alması gerekir ki elinde iki siyah çorap olduğundan emin olsun?

Bu problem bir öncekine benzese de, önemli bir fark vardır. Bu problemde belirli bir renk gereklidir. Bu nedenle, bir çift siyah çorabın gelmesi garanti edilmelidir. Tekrar, tümdengelimsel bir akıl yürütmeyle "en kötü durum senaryosu" stratejisini kullanalım. Varsayalım ki, Evelyn ilk başta bütün mavi çorapları (8), daha sonra bütün yeşil çorapları çekti (8). Siyah çoraplar hâlâ gelmemiştir. Şimdi 14 tane çorabı vardır; ama hiçbirisi siyah değildir. Ne var ki, daha sonra çekeceği çorap-

ların siyah olması gerekir; çünkü geriye sadece siyah çoraplar kalmıştır. İki siyah çorap çektiğinden emin olmak için Evelyn minimum 8 + 6 + 2 = 16 çorap çekmelidir. Bu tip problemler üretip çözmeye çalışın. Eğlenceli olabilir.

4

Cebirsel Eğlenceler

Cebiri bir eğlence biçimi olarak görmek pek kolay olmayabilir. Kimileri cebirsel eğlencenin tamamıyla bir zıtlıklar bileşimi olduğunu bile düşünebilir. Bu bölümde, matematiğin dili olarak da adlandırılan cebir, eğlendirmeye yönelik bir bakış açısıyla, sayıların davranışlarındaki ve diğer matematik alanlarındaki görüngülerin aydınlatılmasında kullanılacaktır. Örneğin, aritmetik kısa yollar incelenmiş, bazı sıra dışı sayı ilişkileri açıklanmış ve matematikteki bazı güzel modeller ortaya konulmuştur. Tüm bunların amacı, kendisini okul yıllarında pek de bir işe yaramayan basma kalıp egzersizler biçiminde gösteren cebirin kullanımını yeni bir açıdan sizin gözünüzde değerlendirmeye aldırmaktır. Cebir okul çağlarında kullanıldığında, genellikle rutin problemlerin çözümüne yarar. Burada biz cebiri, matematiğin öteki dallarını keşfetmek için kullanıyoruz. Örneğin Pisagor üçlüleriyle ilgili bölüm, bu çok popüler sayı gruplarıyla ilgili çok derin bir kavrayış sağlar. Amaç, cebiri kullanarak matematiksel ilişkilerin aydınlatılmasının nasıl mümkün olabildiğinin gösterilmesidir. Cebirsel işlemlerin güzelliğinin ortaya konuluşuna tanıklık ederken son derece eğleneceğimizi de garanti ediyorum.

4.1 Aritmetik Kısa Yollar Oluşturmak İçin Cebiri Kullanmak

Varsayalım ki, $36^2 - 35^2$ işlemini yapmanız gerekiyor. Tabii ki bir hesap makinesiyle bu işlem çok kolay olurdu. Ne var ki çevrenizde hesap makinesinin olmadığını düşünüyoruz. Basit bir şekilde bu işlemi nasıl yapardınız?

İki kare farkının çarpanlara ayrılmasını kullanabiliriz:
$x^2 - y^2 = (x-y)(x+y)$.
Bu bize şunu verir;
$362 - 352 = (36-35)\ (36+35) = (1)\ (71) = 71$

Dağılım özelliği $8 \cdot 67$ işleminde bize yararlı olabilir. 67'yi (70 - 3) ile yer değiştirmek, bu işlemi şu şekilde tekrar yazabilmemizi sağlar: $8\ (70 - 3) = 8\ (70) - 8\ (3) = 560 - 24 = 536$.

Ya da $36 \cdot 14$ çarpımını şu şekilde tekrar yazabiliriz: $36\ (10 + 4) = 36\ (10) + 36\ (4) = 360 + 144 = 504$. Hesap makinesinin yokluğunda, bu metotlar çarpma işlemlerinin yapılmasında oldukça etkilidirler.

Aralarında 4 fark olan sayıların çarpılması konusu da genel anlamda (yani, cebirsel olarak) incelenerek basitçe çözümlenebilir:

İki sayı $(x + 2)$ ve $(x - 2)$ olarak ifade edilebilir. Bunların arasındaki fark 4'tür. Bunların çarpımı bize şunu verir: $(x+2) \cdot (x - 2) = x^2 - 4$. Böylece önce sayıların ortalamasını bulmalıyız, x, daha sonra bunun karesini alıp 4 çıkarmalıyız. Örneğin, $67 \cdot 71$ çarpımına bunu uygulayalım. Ortalamayı buluyoruz, 69. 69'un karesini alıyoruz, 4.761 ve bundan 4 çıkarıyoruz, 4.757. Bazı çarpmaları yapmak her zaman kolay olmayabilir; ama bu örnek size öğrendiğiniz cebirin kimi zamanlardaki "yararlılığını" göstermektedir.

İki ardışık sayıyı birbiriyle çarpma durumda şu kuraldan yararlanabiliriz: $x\,(x + 1) = x^2 + x$. $23 \cdot 24$'e bunu uygulayalım: $23^2 + 23 = 529 + 23 = 552$ olur ki bu geleneksel çarpma algoritmasını yeni bir alternatif oluşturur. Tekrar vurgulamak gerekir ki, bunlar –kimi insanın onsuz yapamadığı– hesap makinesinin yerini alabilecek şeyler değillerdir.

Şimdiye kadar kendi kısa yol algoritmalarınızı keşfetmeye heveslenmişsinizdir. Bu gerçekten eğlenceli olacaktır –bulacaklarınız hesap makinesinin yerini almasa da!

4.2 Gizemli Sayı 22

İlk olarak, bu bölüm sizi büyüleyecek ve sonucun niçin böyle olduğunu merak etmenizi sağlayacaktır. Bu, cebrin yararlılığını görmeniz için çok güzel bir fırsattır; çünkü merakınız cebir kullanılarak giderilecektir.

Okuyucunun daha aşağıda verilen örneği incelemeden önce aşağıdaki yönergeleri çalışması gerekmektedir.

> Tüm basamakları farklı üç basamaklı bir sayı seçin. Bu üç rakamla yazılabilecek bütün iki basamaklı sayıları oluşturun. Daha sonra bu iki basamaklı sayıların toplamını, üç basamaklı sayımızın rakamlarının toplamıyla bölün.

Herkesin aynı sonucu alması gerekir, 22. Bu gerçekten büyük bir "vay canına!"yı hak ediyor.

Örneğin, 365 sayısını aldığımızı düşünün. Bu üç rakamla yazılabilecek bütün iki basamaklı sayıların toplamını alın.

$36 + 35 + 63 + 65 + 53 + 56 = 308$.

Üç basamaklı sayımızın rakamlarının toplamını bulun,

$3 + 6 + 5 = 14$.

Ve karşınızda $308 \div 14 = 22$.

Bu sıra dışı sonucu daha gayretli okuyucular için analiz edeceğiz; sayıların genel ifadesini yazarak başlıyoruz.

$100x + 10y + z$.

Bu üç rakamla yazılabilecek bütün iki basamaklı sayıların toplamını alıyoruz:

$(10x + y) + (10y + x) + 10x + z) + (10z + x) + (10y + z) + (10z + y) = 22x + 22y + 22z = 22\ (x + y + z)$'dir;

ki üç basamaklı sayının rakamlarının toplamı tarafından bölündüğünde, $(x + y + z)$, ortaya çıkan sayı 22'dir.

Bu temel problemle birlikte cebirle ilgili çok kuvvetli bir kavrayış elde etmiş oluyoruz.

Bu bölümün gösterdiği gibi, basit aritmetik fenomenlerin açıklanmasında ve matematiğin güzelliğinin ortaya konulmasında cebrin kullanımı oldukça yararlıdır.

4.3 Bir Garipliği Doğrulamak

Okul çağının ilk yıllarında hepimize, cebirin yalnızca, matematiği anlamak için bir araç olduğu söylenmişti. Bu nedenle, garip bir matematiksel fenomenle karşılaştığımızda, bunu cebir kullanarak açıklamaya çalışmak oldukça anlaşılır bir şeydir. Bu bölümde de cebir kullanarak garip bir ilişkiyi tespit edeceğiz:

> 9 ile biten iki basamaklı bir sayı, rakamlarının toplamı ve çarpımının toplamı biçiminde ifade edilebilir.

Basitçe ifade edersek: *9 ile biten herhangi iki basamaklı sayı: [rakamların çarpımı] + [rakamların toplamı].*

İşte yukarıda söylediklerimizin örnekleri:

$$\begin{aligned}
9 &= (0 \cdot 9) + (0 + 9)\\
19 &= (1 \cdot 9) + (1 + 9)\\
29 &= (2 \cdot 9) + (2 + 9)\\
39 &= (3 \cdot 9) + (3 + 9)\\
49 &= (4 \cdot 9) + (4 + 9)\\
59 &= (5 \cdot 9) + (5 + 9)
\end{aligned}$$

$$69 = (6 \cdot 9) + (6 + 9)$$
$$79 = (7 \cdot 9) + (7 + 9)$$
$$89 = (8 \cdot 9) + (8 + 9)$$
$$99 = (9 \cdot 9) + (9 + 9)$$

Cebirin gerçek avantajlarından birisi de, onunla birçok matematiksel uygulamayı doğrulayabilmemizdeki kolaylıktır.

Bu kalıptan çok fazla büyülenmeyin; bunu sadece hedefe giden bir araç olarak kullanacağız, hedefin kendisi olarak değil. Yani bu ifadeleri, cebrin matematiksel bir garipliği nasıl açıkladığını göstermek için kullanmak istiyoruz.

Tipik olarak iki basamaklı bir sayıyı $10t + u$ şeklinde yazarız; burada u birler basamağını ve t onlar basamağını göstermektedir. Rakamların toplamı $t + u$ ve rakamların çarpımı tu'dur.

Yukarıdaki şartları sağlayan sayı $= 10t + u = (tu) + (t + u)$

$$10t = tu + t$$
$$9t = tu$$
$$u = 9 \ (t \neq 0 \text{ için})(*)$$

Bu tartışma, iki basamaklı sayılardan daha büyük sayılar için de içinizde bir merak uyandırmış olabilir. Örneğin:

$$109 = (10 \cdot 9) + (10 + 9)$$
$$119 = (11 \cdot 9) + (11 + 9)$$
$$129 = (12 \cdot 9) + (12 + 9)$$

Gördüğünüz gibi burada, 9'un solundaki iki basamaklı sayılar onlar basamağı gibi düşünülmüştür ve sonuçlar aynıdır. Bu kural, birler basamağı 9 olduğu müddetçe herhangi bir sayıya uygulanabilir. Peki, yukarıda yaptığımız cebirsel işlem daha büyük sayılar için de geçerli midir? Bu genişlemeyi gerçekleştirmek için, yukarıdaki cebirsel işleme küçük değişiklikler eklemeniz gerekebilir.

(*) Bu durumda $t = 0$ için de kural doğrudur.

4.4 Sayılar Teorisi İçin Cebri Kullanmak

Birçok sıra dışı sayı motifi ve sayı ilişkisi sıklıkla kafaları karıştırmaktadır. Ünlü Goldbach(*) varsayımı gibi bazıları (henüz!) kanıtlanamamışlardır bile. Bu varsayım şunu söyler:

2'den büyük her çift sayı, iki asal sayının toplamı şeklinde yazılabilir.

O aynı zamanda şunu da iddia etmiştir:

5'ten büyük her tek sayı üç asalın toplamı şeklinde yazılabilir.

Son varsayım, o da kanıtlanmamış olsa da, ilki kadar bilinmemektedir. Bir hesap makinesi kullanarak bu varsayımların doğruluğunu görebiliriz. Bu sizin, varsayımlarda olan biteni daha iyi kavramanıza yardımcı olacak.

Şimdi gelin "kanıtlanabilir" bir ilişki üzerinde duralım.

Bir artı herhangi üç ardışık sayının karelerinin toplamı her zaman 12 ile bölünebilir.

Buradaki güzellik, bunu ispatlamak için kullanılan prosedürün basitliğinde kendisini gösterir. İlk başta, çift ve tek sayıyı ifade edebilecek bir yol bulmalıyız. Bir n tamsayısı için, $2n$ her zaman bir çift sayıyı, bir sonraki $2n + 1$ sayısı ise bir tek sayıyı ifade eder.

$2n + 1$'i üç ardışık sayının ortasındaki sayı varsayarak işlemimize başlıyoruz. Bu durumda bir önceki küçük tek sayı bunun 2 eksiği olacak, $[2n + 1] - 2 = 2n - 1$. Benzer şekilde bir sonraki büyük tek sayı bunun 2 fazlası olacak, $[2n + 1] + 2 = 2n + 3$. Şimdi doğru olduğunu göstermeye çalıştığımız ifade yazmaya hazırız.

$(2n - 1)^2 + (2n + 1)^2 + (2n + 3)^2 + 1 = 12n^2 + 12n + 12$

(*) Christian Goldbach (1690-1764) tarafından bir mektup da ünlü matematikçi Leonhard Euler'e 1742'de gönderilmiştir.

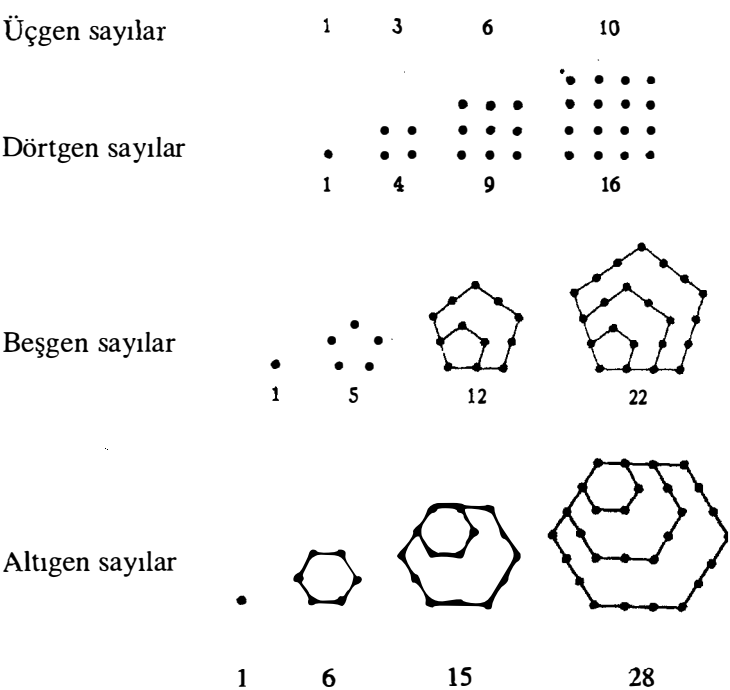
$= 12(n^2 + n + 1) = 12M$, burada M bir tam sayıyı temsil etmektedir.(*)

Böylece, bu karelerin toplamı artı birin, her zaman 12'ye bölünebildiği sonucunu çıkarabiliriz.

Bu örnekten yola çıkarak sayılar teorisindeki başka araştırmalara da yönlenebilirsiniz.

4.5 Şekilsel Sayılardaki Kalıpları Bulmak

Daha önce de dediğimiz gibi, şekilsel sayılar, aşağıda da gördüğünüz gibi, düzgün çokgen biçiminde olan noktalarla temsil edilebilen sayılardır. Bu sayılarla ilgili birçok şaşırtıcı iliş-



(*) n bir tamsayı olduğundan n^2 de bir tamsayı olmalıdır; bu nedenle $n^2 + n + 1$ de bir tamsayıdır. Kolaylık olsun diye bu tam sayıyı M olarak ifade ediyoruz.

ki bulunmaktadır. Burada sadece bir kaçınıgöstereceğiz; ama umuyoruz ki siz de daha fazla araştırarak "benim" diyebileceğiniz ilişkiler keşfedeceksiniz.

Aşağıdaki tabloyu inceleyin:

	Üçgen Sayılar	Dörtgen Sayılar	Beşgen Sayılar	Altıgen Sayılar
1	1	1	1	1
2	3	4	5	6
3	6	9	12	15
4	10	16	22	28
5	15	25	35	45
6	21	36	51	66
7	28	49	70	91
8	36	64	92	120
9	45	81	117	153
10	55	100	145	190
11	66	121	176	231
12	78	144	210	276
13	91	169	247	325
14	105	196	287	378
15	120	225	330	435
16	136	256	376	496
17	153	289	425	561
18	171	324	477	630
19	190	361	532	703
20	210	400	590	780
n	$n(n+1)^* \div 2$	$n(2n-0) = n^2 \div 2$	$n(3n-1) \div 2$	$n\,(4n-2) \div 2$

n satıra geldiğimizde oluşan kalıba dayanarak, yedigen, sekizgen ve dokuzgen vb. sayıların genel biçimini belirleyebiliriz.

Bunlar $\frac{n(5n-3)}{2}$, $\frac{n(6n-4)}{2}$, $\frac{n(7n-5)}{2}$ vb.'dir.

(*) Bu şuradan gelir: $n(1n-[-1])/2 = n(n+1)/2$.

Daha önce, iki ardışık doğal sayının çarpımı olan oblong sayıları tanıtmıştık; şu biçimdelerdi:(*)

$$1 \cdot 2 = 2$$
$$2 \cdot 3 = 6$$
$$3 \cdot 4 = 12$$
$$4 \cdot 5 = 20$$
$$5 \cdot 6 = 30 \text{ vb.}$$

Şimdi elinizde aşağıdaki ilişkileri cebir kullanarak doğrulamak ya da örneklerle kendinizi bunların aslında doğru olduğuna inandırma seçenekleri bulunmaktadır. Unutmayın, yalnızca genel bir ispat her durum için geçerli bir çözüm ortaya koyabilir.

Bir oblong sayı, 2 ile başlayan ardışık çift sayıların toplamı olarak yazılabilir.

Örnek: $2 + 4 + 6 + 8 = 20$.

Bir oblong sayı bir üçgen sayının iki katıdır.

Örnek: $15 \cdot 2 = 30$

İki ardışık karenin ve bunlar arasındaki oblong sayının karesinin toplamı bir kare sayıdır.(**)

Örnek: $9 + 16 + 12^2 = 169 = 13^2$

İki ardışık oblong sayının ve bunlar arasındaki kare sayının iki katının toplamı bir kare sayıdır.(***)

Örnek: $12 + 20 + 2 \cdot 16 = 64 = 8^2$

Bir oblong sayının bir sonraki kare sayının toplamı bir üç-

(*) İki ardışık sayının çarpımı.

(**) Bu oldukça zahmetli bir ispattır ve sizin için burada sunuyoruz. İfade cebirsel olarak şu şekilde gösterelim: $n^2 + (n+1)^2 + [n(n+1)]^2$. Denklemi açıp benzer terimleri bir araya toplayalım. Bu bize şunu verir: $n^2 + n^2 + 2n + 1 + (n^2 + n)^2 = 2n^2 + 2n + 1 + n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 2n + 1 = (n^2 + n + 1)^2$.

(***) Açıktır ki bir kareye sahip olduk! Bu ispatı size çarpanlara ayırmadaki bir "numarayı" göstermek için sunuyoruz. Şu cebirsel ifadeye bakın: $n(n+1) + (n+1)(n+2) + 2(n+1)^2$. Şimdi bunları $(n+1)$ parantezine alalım:
$(n+1)\,[n + (n+2) + 2(n+1)] = (n+1)\,[4n+4] = 4\,(n+1)^2$ ki bu da bir tam karedir.

gen sayıdır.
Örnek: 20 + 25 = 45

Bir kare sayının ve bir sonraki oblong sayının toplamı bir üçgen sayıdır.
Örnek: 25 + 30 = 55

Bir sayı ile bu sayının karesinin toplamı bir oblong sayıdır.
Örnek: 9 + 81 = 90

İşte karşınızda doğrulamak isteyebileceğiniz birkaç ilişki. İşe, spesifik örneklerle ve onların doğruluklarını kendinize göstererek başlıyalım; daha sonra cebir kullanarak ispatlama aşamasına geçin.

- Her tek kare sayı, bir üçgen sayının sekiz katı ve 1'in toplamıdır.
- Her beşgen sayı, üç üçgensel sayının toplamından büyüktür.
- Altıgen sayılar, tek sayıda noktadan oluşan üçgensel sayılara eşittir.

Belki siz de başka modeller bulmak istersiniz ve bunların doğruluklarını kanıtlarsınız –cebirsel olarak tabii ki.

4.6 Bir Serinin Toplamını Bulmak İçin Bir Kalıp Kullanmak

Bir serinin toplanması problemiyle karşılaşan çoğu kişi, bir seriyi toplamak için her ne öğrenmişlerse kullanarak direk problemin içine atlarlar. Bu ciddi bir eziyet olabilir. Ayrıca hiç de zarif değildir!

Aşağıdaki, birçok etkileyici alternatifle çözülebilecek duruma bir göz atın ve aşağıdaki serinin toplanması problemini çözmeye çalışın:

$$\frac{1}{2\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\ldots+\frac{1}{49\cdot50}$$

Kullanılabilecek ilk yol bir kalıbın olup olmadığına bakmaktır. Bir olasılığı inceleyelim:

$$\frac{1}{1\cdot2}=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}=\frac{2}{3}$$

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}=\frac{3}{4}$$

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{4\cdot5}=\frac{4}{5}$$

$$\frac{1}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{4\cdot5}\ldots\frac{1}{n(n+1)}=\frac{n}{n+1}$$

Bu modelden gördüğümüz, her serinin toplamının, serilerdeki(*) son kesirlerin çarpanlarından oluşmuş bir bayağı kesir olduğudur; böylece $1 \div 49.50$ kesrinde biten serinin toplamının şu olduğu sonucuna varabiliriz:

$$\frac{1}{2\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\frac{1}{3\cdot4}+\frac{1}{4\cdot5}\ldots+\frac{1}{49\cdot50}=\frac{49}{50}$$

Burada pay ve payda, son kesrin paydasının çarpanlarıdır.

Bu seri için bir başka kalıp, serideki her kesri aşağıdaki gibi bir fark olarak göstererek elde edilebilir:

$$\frac{1}{1\cdot2}=\frac{1}{1}-\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2\cdot3}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3\cdot4}=\frac{1}{3}-\frac{1}{4}$$

$$\vdots$$

$$\frac{1}{49\cdot50}=\frac{1}{49}-\frac{1}{50}$$

Bu denklemleri topladığımızda, sol taraf aradığımız toplamı verir; sağ taraftaki tüm kesirler (ikisi hariç) ortadan kalkar

(*) Bayağı kesir, paydanın (aşağıdaki sayı) paydan (yukarıdaki sayı) büyük ya da paya eşit olduğu kesirdir.

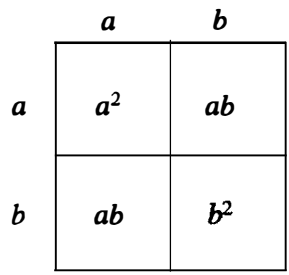
(çünkü $-1 \div 2 + 1 \div 2 = 0$ gibi sıfır toplamlar oluşur) ve şunu geride bırakır; $1 \div 1 - 1 \div 50 = 49 \div 50$.

Bu pratik modellerin çok şaşırtıcı örnekleri her zaman şöyle bir reaksiyona sebep olacaktır: "Oo, ben bunu asla kendi başıma yapamazdım." Ne var ki bu kabul edilebilecek bir tepki değildir; çünkü pratik mükemmelleştirir.

4.7 Cebrin Geometrik Görünümü

Cebrin geometriyle olan ilişkisi pek bilinmez. Zaman zaman cebrin temellerinin sağlamlaştırılması, bu temellerin geometrik bir bakış açısından anlamlı olduğunun gösterilmesiyle gerçekleştirilir. Daha da önemlisi, cebirsel eşitlikleri geometrik olarak göstermek eğlencelidir. Burada gösterilen bir taneyi inceledikten sonra, kendiniz başkalarını da göstermek isteyebilirsiniz.

Cebirsel eşitlik(*) kavramı, ikinci derece terimleri göstermek için alanlar ve birinci derece (ya da lineer) terimleri göstermek için de doğruların kullanılmasıyla geometrik olarak ifade edilebilir. Böylece a^2 ve ab bir alan tarafından, a ve b ise bir doğru tarafından temsil edilecektir. Şimdi, $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$ eşitliğinin geometrik temsilini göstermekle işe başlayacağız.



Şekil 1

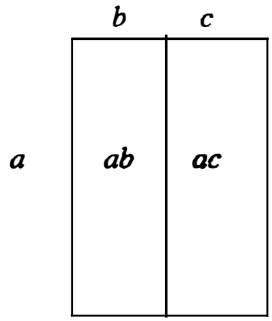
(*) Cebirsel eşitlik, denklemin tüm değişken değerleri için eşit olması durumu.

Başlarken, kenarları $(a + b)$ olan bir kare çiziyoruz. Bu kare, şekil 1'de de görüldüğü gibi, kare ve dikdörtgenlere ayrılmalıdır. Çeşitli kenarların uzunlukları uygun bir şekilde yazılmıştır.

Her bölgenin alanını çıkarabilirsiniz. Parçalara bölünmüş karenin dört parçasının alanının toplamı, karenin kendi alanına eşit olduğundan şu sonuca varacaksınız:

$$(a + b)^2 = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b2(*)$$

Şimdi de, $a(b + c) = ab + ac$ eşitliğini geometrik olarak göstereceğiz. Başlarken, kenarlarının uzunluğu a ve $(b + c)$ olan bir dikdörtgen çiziyoruz. Daha sonra bu dikdörtgen şekil 2'de görüldüğü gibi parçalara ayrılmalıdır. Kenarların uzunlukları yazılmıştır.



Şekil 2

Her bölgenin alanını hesaplamak oldukça kolaydır. Parçalara bölünmüş dikdörtgenin iki parçasının alanının toplamı, dikdörtgenin kendi alanına eşit olduğundan diyagram şunu gösterir: $a(b + c) = ab + ac$.

Şu eşitliğe bakınız: $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$.

Kenarları $(a + b)$ ve $(c + d)$ olan bir dikdörtgen çiziniz. Dikdörtgenin şekil 3'te görüldüğü gibi parçalara ayrılması gerekir. Kenarların uzunlukları ve alanların büyüklükleri uy-

(*) Daha ince bir ispat, Öklid, *Elemanlar*, Kitap 2, Önerme 4'te bulunabilir.

gun bir şekilde yazılmıştır. Diğer durumlarda olduğu gibi, parçalara bölünmüş dikdörtgenin dört parçasının alanının toplamı, dikdörtgenin kendi alanına eşittir.

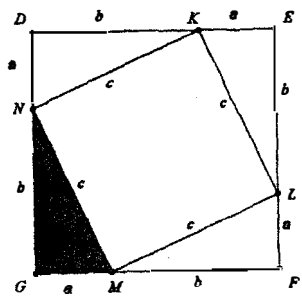
	a	*b*
c	*ac*	*bc*
d	*ad*	*bd*

Şekil 3

Diyagram (şekil 3) $(a + b)(c + d) = ac + ad + bc + bd$ eşitliğini resmeder.

Alanların kullanılması metodu birçok cebirsel eşitliğin gösterilmesinde kullanılabilir. Burada doğru yapılması gereken şey, dörtkenarlıların ve yapılan bölümlenmelerin boyutlarının seçilmesidir.

Cebirsel eşitlikleri alanlar olarak gösterme tekniğinde ilerledikten sonra Pisagor teoremini düşünebilirsiniz, $a^2 + b^2 = c^2$. Aslında bu bir eşitlik olmasa da, alanların uygulanması hâlâ yerinde bir işlemdir. Kenarları $(a + b)$ olan bir kare çiziniz. Bu kareyi, şekil 4'te görüldüğü gibi dört benzer üçgene ve bir kareye bölünüz. Kenarların uzunlukları işaretlenmiştir.



Şekil 4

Diyagram (şekil 4) şunu resmeder:

1. Alan $DEFG$ = 4 (ΔGNM üçgeninin alanı) + alan $KLMN$

2. Bu nedenle $(a + b)^2 = 4(1 \div 2\ ab) + c^2$.

3. Eğer $(a + b)^2$ yerine yukarıda ispatladığımız eşitliği koyarsak şunu elde ederiz; $a^2 + 2ab + b^2 = 2ab + c^2$.

Buradan basitçe tabii ki şu çıkar, $a^2 + b^2 = c^2$, iştePisagor teoremi. Oldukça temiz değil mi?

4.8 Altın Oranla Biraz Cebir

Matematiğin güzelliğinden bahsettiğimizde, genelde dikdörtgenlerin en güzeli düşünülür. Bu dikdörtgenin, sıklıkla Altın Dikdörtgen olarak da adlandırılır, psikologlar tarafından estetik açıdan en rahatlatıcı dikdörtgen olduğu gösterilmiştir (5.11 bölümüne bakın). Biz Altın Dikdörtgen'e cebirsel bir açıdan bakacağız –yani, onun kenarlarının oranına, Altın Kesim ya da Altın Oran olarak da bilinir.(*)

Altın Oran şudur: $1\text{-}x \div x = x \div 1$.

İçler dışlar çarpımı yaparsak: $x^2 + x - 1 = 0$'dır ve bu denklemin köklerinden biri, x pozitif için $x = (\sqrt{5}\text{-}1) \div 2$'dir.

$(\sqrt{5}\text{-}1) \div 2 = 1 \div \phi$ diyelim.

Yalnızca $\phi \cdot 1 \div \phi = 1$ değildir (bekleneceği gibi); aynı zamanda $1 - 1 \div \phi = 1$'dir.

Bu sayı bu iki ilişkinin birden olduğu tek sayıdır.(**)

Şimdiye kadar ø'nin değerinin ne olduğunu merak ediyorsunuzdur. Bir hesap makinesi yardımıyla bunu bulabiliriz:

Ø=1.6180339887498948482045868436563811772030917980576...

Ve1 ÷ ø=0.6180339887498948482045868343656381177203091798 0576...

(*) Altın Oran, Altın Dikdörtgen'in genişliğinin uzunluğuna oranına tekabül eder. Yani, genişlik÷uzunluk = uzunluk ÷ (uzunluk+genişlik).

(**) Meraklı okuyucular bunun doğru olduğunu görebilir. İşte elde edilen sonuç: $1 \div \phi = (\sqrt{5} - 1)/2$ olduğundan, o zaman $\phi = 2 \div (\sqrt{5}\text{-}1)$. $(\sqrt{5}+1) \div (\sqrt{5}+1) = (\sqrt{5}+1) \div 2$.

$\phi - 1 \div \phi = (\sqrt{5}+1) \div 2 - (\sqrt{5} - 1) \div 2 = 1$.

Yukarıda da söylediğimiz gibi, farklarının 1 olduğuna dikkat ediniz.

ø'nin birçok değişik özelliği vardır. Örneğin şu sonsuz kesre bakın:

$$\phi = 1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cfrac{1}{1 + \cdots}}}}}}}$$

Bunu ispatlamak için, sonsuz kesirlerde onu payda kesmenin hiçbir şey kaybettirmeyeceğini fark etmeniz gerekir. Böylece bu işlem bize şunu verir:

ø = 1 + 1 ÷ ø ki bu da Altın Oranı üretir.

Bir başka ilginç ilişki birbirini takip eden sonsuz köklü sayılarla ilgilidir.

$$\phi = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots}}}}}}}}$$

Tüm bu ø gösterimleri kolayca doğrulanabilir ve bu basit benzer bir teknikle başarılır. Burada ikinciyi biz yapacağız ve birinciyi sizin yapmanız için bırakacağız.

$$x = \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots}}}}}}}}$$

Eşitliğin her iki tarafının da karesini alalım.

$$x^2 = 1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \sqrt{1 + \cdots}}}}}}}}$$

Sonsuz kökler yerine x'i yerleştirin; çünkü yukarıdan da göreceğiniz gibi x bunlara eşittir.

$x^2 = 1 + x$

$x^2 - x - 1 = 0$ ve bu durumda,

$x = ø$; çünkü başta ø'yi bu denklemin kökü olarak tanımladık.

ø'nin kuvvetlerini aldığımızda olanları görmek büyüleyicidir.

$$ø^2 = \frac{(\sqrt{5}+1)^2}{2} = \frac{\sqrt{5}+3}{2} = \frac{\sqrt{5}+1}{2} + 1$$

$ø^3 = ø \cdot ø^2 = ø(ø + 1) = ø^2 + ø = (ø + 1) + ø = 2ø + 1$

$ø^4 = ø^2 \cdot ø^2 = (ø + 1)(ø + 1) = ø^2 + 2ø = 1 (ø + 1) + 2ø + 1 = 3ø + 2$

$ø^5 = ø^3 \cdot ø^2 = (2ø + 1) (ø + 1) + 2ø^2 + 3ø + 1 = 2(ø + 1) + 3ø + 1 = 5ø + 3$

$ø^6 = ø^3 \cdot ø^3 = (2ø + 1)(2ø + 1) = 4ø^2 + 4ø + 1 = 4(ø + 1) + 4ø + 1 = 8ø + 5$

$ø^7 = ø^4 \cdot ø^3 = (3ø + 2)(2ø + 1) = 6ø^2 + 7ø + 2 = 6(ø + 1) + 7ø + 2 = 13ø + 8$

Bu tablonun bir özeti bize, ø'nin katsayıları (aynı zamanda sabitler!) arasında bir kalıbın bulunduğunu gösterir.

$$ø^2 = ø + 1$$
$$ø^3 = 2ø + 1$$
$$ø^4 = 3ø + 2$$
$$ø^5 = 5ø + 3$$
$$ø^6 = 8ø + 5$$
$$ø^7 = 13ø + 8$$

ø'nin katsayıları ve sabitler Fibonacci sayılarıdır (bölüm 1.18'e bakınız).

Bu zamana geldiğimizde muhtemelen Altın Oran'la kurulabilecek ilişkilerin bir sonu olmadığını düşünüyorsunuzdur.

Aslında, haklısınız! Kimi matematik çevreleri bu ilişkiler üzerine yoğunlaşmışlardır. Bizim için onlar matematikteki güzelliğin bir yönünü oluştururlar. Diğerlerine göre de bunlar, ciddi matematik için kimi fırsatları simgelerler.

4.9 Cebir Kullanışlı Olmadığında

Cebrin gücünü ortaya koyan birçok örnek gördük. Ne var ki kimi zaman probleme getirilecek cebirsel çözüm bir avantaj olmayabilir. Şu probleme bir bakalım:

> Çarpımı 120 olan dört tane ardışık sayı bulunuz.

Bu problemin altından kalkmak için kendinize birazcık zaman verin. Birçok insan hemen, bu problemi resmedecek bir cebirsel denklem yazmaya kalkışacaktır. Ve denklem şuna benzeyecektir:

$$x(x + 1)\ (x + 2)\ (x + 3) = 120$$

Parantezlerden kurtulmamız bizi tek değişkenli (kuartik bir denklem) dördüncü derece bir denklemle karşı karşıya bırakır.

Bu dördüncü derece denklemi çözmek yerine, cebirsel olmayan bir çözüm tercih edilebilir. Akıllıca bir tahmin yapın ve sonucun doğruluğunu kontrol edin: $2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 = 120$. Bu örnekten de gördüğünüz gibi, cebir kimi zaman kimi aritmetik ilişkilerin gösterilmesi ve ispatlanması için yararlı olsa da, her zaman en iyi yöntem değildir. Bu kimileri için şok edici olabilir; ne var ki işte bu matematiğin güzelliğidir –pratik, ne zaman hangi tekniğin uygun olduğunu bilmek.

4.10 Paydayı Rasyonelleştirme

Bize (iyi cebir sınıflarında), bir kesrin herhangi bir aritmetik işlem yapılırken rasyonel bir paydaya sahip olmasının önem-

li olduğu öğretilmiştir; çünkü örneğin bir tamsayı ile bölme yapmak bir irrasyonel sayı ile yapmaktan çok daha kolaydır. Ne yazık ki, paydayı rasyonelleştirmek pek bir amacı olamayan bir egzersiz gibi görünür sıklıkla. Bu işleme ihtiyacı olan kimi uygulamalar vardır; ne var ki bir şekilde bu uygulamalar, prosedürün yararlılığı konusunda yeterince ikna edici değildir. Ama kimi uygulamalar vardır ki, (dramatik bir şekilde olsa da) bu yararlılık iddiasının doğruluğunu güzel bir şekilde ortaya koyar.

Aşağıda toplamını bulmanızı istediğimiz şu seriye bir bakın.

$$\frac{1}{\sqrt{1}+\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{2001}+\sqrt{2002}} + \frac{1}{\sqrt{2002}+\sqrt{2003}}$$

Paydası rasyonel olmayan bir kesirle pek bir şey yapamazsınız; bu nedenle onu eşdeğer, paydası rasyonel olan bir kesre dönüştürmenin yolunu bulmalısınız. Bunu yapmak için her kesri onun değerini değiştirmeyerek 1 ile çarpıyoruz. 1'in alması gereken şekil, hem payında hem paydasında, orijinal kesrin paydasının eşleniğini barındıran kesirdir.(*)

Yukarıdaki serideki kesirleri ayrı ayrı "rasyonelleştirmek" yerine, gelin genel bir yol olarak bunu tanımlayalım ve bu işlemi her kesir için otomatik olarak yapıp yapamayacağımıza bakalım.

Bu serinin genel terimi $1 \div (\sqrt{k} + \sqrt{k+1})$ şeklinde yazılabilir.

Şimdi bu kesrin paydasını rasyonelleştirmek için bunu $(\sqrt{k} - \sqrt{k+1}) \div (\sqrt{k} - \sqrt{k+1})$ formunda olan 1 ile çarpacağız ve şunu elde edeceğiz:

$$1 \div (\sqrt{k} + \sqrt{k+1}) \bullet (\sqrt{k} - \sqrt{k+1}) \div (\sqrt{k} - \sqrt{k+1}) = (\sqrt{k} - \sqrt{k+1}) \div -1$$

Yani, şunu bulduk: $1 \div (\sqrt{k} + \sqrt{k+1}) = \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$.

(*) $a + \sqrt{b}$'nin eşleniği $a - \sqrt{b}$'dir. Bunların çarpımı $a^2 - b$'dir; yani rasyonel bir ifade.

Bu bize serimizi şu şekilde tekrar yazma fırsatını verir:

$(\sqrt{2} - \sqrt{1}) + (\sqrt{3} - \sqrt{2}) + (\sqrt{4} - \sqrt{3}) + ... + (\sqrt{2002} - \sqrt{2001}) + (\sqrt{2003} - \sqrt{2002})$.

Bu terimleri tekrar gruplarsak göreceğiz ki, ikisi dışında hepsi birbirini götürmektedir ve geriye şu kalmaktadır:

$\sqrt{2003} - 1 \approx 44.754888 - 1 = 43.754888.$

İşte burada paydayı rasyonelleştirmenin amacı olamayan bir egzersiz olmadığına tanık olmaktasınız. Oldukça kullanışlıdır ve bizi çok güzel çözümlere götürebilir.

4.11 Pisagor Üçlüleri

Ne zaman *Pisagor* teoreminin adı işitilse, akla o ünlü eşitlik gelir: $a^2 + b^2 = c^2$. Bu belki de okul matematiğinde akılda en çok kalan başlıklardan biridir. Genellikle bu çok ünlü teoremin çevresini saran birçok güzel ilişkiye yeterli dikkat verilmez. Pisagor teoremi öğretilirken, öğretmenler öğrencilere, bazı dik üçgenlerin kenarlarını temsil eden bilinen sıralı üçlüleri tanımalarını (ve ezberlemelerini) öğütlerler. Bu sıralı(*) üçlüler grubunun bazıları *Pisagor Üçlüleri* olarak bilinirler:

$$(3,4,5)\ ,\ (5,12,13)\ ,\ (8,15,17)\ ,\ (7,24,25)$$

Diğer Pisagor üçlüleri nasıl bulunurlar? Bu okul matematiğinde nadiren bahsedilen bir başlıktır – düzeltilmesi gereken üzücü bir boşlamışlık. Burada bunu Pisagor teoreminin cebirsel yönünü göstermek için yapacağız. Dikkat: Aşağıdaki ispatlar biraz zorlayıcıdır; bu nedenle kimi okuyucular burayı atlayıp ilerideki tabloya gidebilirler.

Örneğin içinde 11 olan bir Pisagor üçlüsünün olup olma-

(*) Parantezlerdeki sıra, (a,b,c), $a^2 + b^2 = c^2$ denklemine uygundur.

dığını öğrenmek istiyorsunuz. Doğal olarak deneme ve yanılma bir yöntem olarak aklınıza gelebilir; ama bu pek zarif bir yaklaşım değildir. Şimdi bir Pisagor üçlüsü oluşturmak ve gerekli tekniği bulmak için bir yolculuğa çıkacağız. Bu size gerçek matematik yapmanın getirdiği hoş duyguyu yaşatacak ve aynı zamanda da yaklaşım stilinin güzelliğini de takdir edeceksiniz.

Formülleri geliştirmeden önce, ilk başta birkaç basit "lemmayı" (bunlar "yardımcı" teoremlerdir) düşünmemiz gerekiyor.

Lemma 1: Bir tek sayının karesi 8 ile bölündüğünde kalan 1'dir.

Kanıt: k bir tam sayı ise, bir tek sayıyı $2k+1$ olarak gösterebiliriz. Bu sayının karesi $(2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k\,(k + 1) + 1$.

k ve $k + 1$ ardışık olduklarından bunlardan birisinin çift olması gerekir. Bu nedenle $4k\,(k+1)$ 8 ile bölünebilir. Böylece, $(2k + 1)^2$ 8 ile bölündüğünde kalan 1'dir.

Sonraki lemmalar şöyledir.

Lemma 2: İki tek kare sayının toplamı 8 ile bölünürse kalan 2'dir.

Lemma 3: İki tek kare sayının toplamı bir kare sayı yapamaz.

İspat: İki tek kare sayının toplamı 8 ile bölünürse kalan 2 olduğundan toplam çifttir; ama 4 ile bölünemez. Bu nedenle bu bir kare sayı olamaz.

Şimdi Pisagor üçlüleri için formüller geliştirmeye hazırız. Varsayalım ki, (a, b, c) bir primitif(*) Pisagor üçlüsüdür. Bu demektir ki a ve b aralarında asaldır.(**) Bu nedenle ikisi birden çift olamaz. Peki ikisi birden tek olabilir mi?

(*) İlkel Pisagor üçlüsü 1'den başka ortak çarpanı olmayan üçlüdür.

(**) Aralarında asal, 1'den başka ortak bölenleri olmadığı anlamına gelmektedir. Eğer a ve b'nin ortak böleni varsa, o zaman a^2+b^2'nin de vardır ki bu da a,b ve c'nin ortak böleni olduğu anlamına gelmektedir –bir çelişki.

Eğer a ve b'nin her ikisi de tek ise, lemma 3'ten dolayı: $a^2 + b^2 \neq c^2$. Bu, (a,b,c) bir Pisagor üçlüsüdür varsayımımızla çelişir; bu nedenle a ve b'nin her ikisi de tek olamaz. Böylece biri tek, biri çift olmalıdır.

Şimdi a'yı tek ve b'yi çift varsayalım. Buna göre c tek olmalıdır. $a^2 + b^2 = c^2$'yi tekrar şöyle yazabiliriz:

$$b^2 = c^2 - a^2$$
$$b^2 = (c + a)(c - a)$$

Tek sayıların farkı ve toplamı çift sayı olduğundan, $c + a = 2p$ ve $c - a = 2q$ diyebiliriz (p ve q doğal sayılardır).(*)

Bunu a ve c için çözersek şunu elde ederiz

$$c = p + q \text{ ve } a = p - q$$

Şimdi p ve q'nun aralarında asal olmaları gerektiğini gösterebiliriz. p ve q'nun aralarında asal olmadığını varsayalım: diyelim ki, g ($g > 1$) bir ortak çarpandır. O zaman g hem a'nın hem de c'nin ortak çarpanı olmalıdır. Benzer şekilde, g hem $c + a$'nın hem de $c - a$'nın ortak çarpanı olmalıdır. Bu g^2'yi b^2'nin bir çarpanı yapar; çünkü $b^2 = (c + a)(c - a)$'dır. O zaman g b'nin bir çarpanı olmak zorundadır. O zaman g hem a'nın hem b'nin hem de c'nin ortak çarpanı olduğuna göre bunlar aralarında asal olamazlar. Bu, bizim ilk baştaki (a,b,c)'nin *primitif* Pisagor üçlüleri olduğu varsayımımızla çelişir. Böylece p ve q aralarında asal olmalıdırlar.

b çift olduğu için, b'yi $b = 2r$ olarak ifade edebiliriz.
Ama $b^2 = (c + a)\ (c - a)$'dir.
Bu nedenle $b^2 = (2p)\ (2q) = 4r^2$'dir; bunu $pq = r^2$ takip eder.

Eğer iki aralarında asal doğal sayının çarpımı (p ve q) bir

(*) Doğal sayılar sayma sayılarıdır: 1,2,3,4,5 ...

doğal sayının karesi (r) ise, o zaman her biri bir doğal sayının karesi olması gerekir.

Bu nedenle $p = m^2$ ve $q = n^2$ diyelim; m ve n doğal sayılardır. Bunlar aralarında asal sayıların çarpanları olduklarından (p ve q), bunlar da (m ve n) aralarında asal olmalıdır.

$a = p - q$ ve $c = p + q$ olduğundan, bunu $a = m^2 - n^2$ ve $c = m^2 + n^2$ takip eder.

Ayrıca, $b = 2r$ ve $b^2 = 4r^2 = 4pq = 4m^2n^2$ olduğundan, $b = 2mn$ olur.

Özetlersek, şimdi elimizde Pisagor üçlülerini oluşturmak için formüllerimiz var:

$$a = m^2 - n^2 \qquad b = 2mn \qquad c = m^2 + n^2$$

m ve n sayıları çift sayı olamaz; çünkü onlar aralarında asaldır.(*) Her ikisi birden tek de olamaz; çünkü bu $c = m^2 + n^2$ eşitliğini çift yapacaktır ki, bunun imkânsız olduğunu daha önce göstermiştik. Bu bir sayının tek bir sayının çift olduğu anlamına geldiğine göre, $b = 2mn$, 4 ile bölünebilir. Bu nedenle hiçbir Pisagor üçlüsü 3 asal sayıdan oluşamaz. Bu diğer Pisagor üçlüsü üyelerinin asal olamayacağı anlamına gelmez.

Bir anlığına işlemi tersine çevirelim. Birinin tek, birinin çift olduğu, m ve n ($m > n$) aralarında asal sayılarını düşünün. Şimdi biz (a, b, c) primitif Pisagor üçlüsünde $a = m^2 - n^2$, $b = 2mn$ ve $c = m^2 + n^2$ olduğunu göstereceğiz.

Şunu cebirsel olarak göstermek çok kolaydır:

$$(m^2 - n^2)^2 + (2mn)^2 = (m^2 + n^2)^2,$$

denklemi, bu sayıların bir Pisagor üçlüsü olduğunu gösterir; şimdi gösterilmesi gereken (a, b, c) Pisagor üçlüsünün *primitif* olduğudur.

Varsayalım ki, a ve b'nin $h > 1$ bir ortak çarpanı var. a tek

(*) Bu bize ilkel Pisagor üçlüleri elde etme şansını verir. Bu Pisagor üçlülerinin 1'den başka ortak çarpanı yoktur.

olduğundan h de tek olmalıdır. $a^2 + b^2 = c^2$ olduğundan h aynı zamanda c'nin de çarpanı olmalıdır. Aynı zamanda h, $(m^2 - n^2)$ ve $(m^2 + n^2)$'nin de çarpanlarıdır; onların toplamı, $2m^2$ ve farkı da, $2n^2$.

h tek olduğundan, m^2 ve n^2'nin ortak çarpanıdır. Ne var ki m ve n (sonuç olarak m^2 ve n^2) aralarında asaldır. Bu nedenle h ,m ve n'nin ortak çarpanı olamaz. Bu çelişki, a ve b'nin aralarında asal olduğunu kanıtlar.

Primitif Pisagor üçlüleri yaratmak için bir formül geliştirdikten sonra, eminim bunu kullanıma sokmak istiyorsunuzdur. Aşağıdaki tablo size bazı küçük primitif Pisagor üçlülerini sunmaktadır.

Bazı Primitif Pisagor Üçlüleri

m	n	a	b	c
2	1	3	4	5
3	2	5	12	13
4	1	15	8	17
4	3	7	24	25
5	2	21	20	29
5	4	9	40	41
6	1	35	12	37
6	5	11	60	61
7	2	45	28	53
7	4	33	56	65
7	6	13	84	85

Tablonun hızlı bir incelenmesi gösterecektir ki, bazı primitif Pisagor üçlüleri (a, b, c) $c = b + 1$ kalıbını taşımaktadır. Bu kalıp için m ve n arasındaki ilişkiyi keşfedebilir misiniz?

Fark edeceğiniz gibi, bu üçlüler için $m = n + 1$'dir. Bunun (tabloda olmayan) diğer Pisagor üçlüleri için de doğru olduğunu göstermek için, $m = n + 1$ diyelim ve bunun bir Pisagor üçlüsü yapmasını sağlayalım.

$$a = m^2 - n^2 = (n + 1)^2 - (n)^2 = 2n + 1$$
$$b = 2mn = 2n(n + 1) = 2n^2 + 2n$$
$$c = m^2 + n^2 = (n+1)^2 + n^2 = 2n^2 + 2n + 1$$

Açıktır ki, $c = b + 1$'dir.

Başka bir doğal soru ise, ardışık doğal sayılardan oluşan tüm primitif Pisagor üçlülerin bulunmasıdır. Yukarıdakine benzer bir metot kullanılarak görülebilir ki, bu şartı sağlayan tek üçlü şudur; (3, 4, 5).

Bu uzun gelişimin ardından şimdi, Pisagor üçlüleri ve temel sayılar teorisi hakkında çok daha derin bir kavrayış elde etmiş durumdasınız. İşte kimi azimli okuyucular için ekstra araştırılacak konular.

1. Tabloda olmayan 6 primitif Pisagor üçlüsü bulunuz.
2. Her primitif Pisagor üçlüsünün içinde 3'e bölünebilen bir elemanın olduğunu gösteriniz.
3. Her primitif Pisagor üçlüsünün içinde 5'e bölünebilen bir elemanın olduğunu gösteriniz.
4. Her primitif Pisagor üçlüsünün elemanlarının çarpımının 60'ın katı olduğunu gösteriniz.
5. $b^2 = a + 2$ olduğu bir Pisagor üçlüsü (a, b, c) bulunuz.

5

Geometrik Harikalar

Bu bölüm diğerlerinden daha uzun; çünkü geometrinin görsel etkisi, matematiğin güzelliğinin ortaya konulmasında çok başarılı bir araç ta ondan. Bu bölümün büyük bir kısmı sadece lise geometrisinin en temel kısımlarının hatırlanmasını gerektiriyor (ispatsız tabi ki!). Daha sofistike bir geometri bilgisi gerektiren örnekler de, daha basit bir şekilde ele alınmıştır.

Birkaç başlık geometrideki güzel bir değişmezlik kavramını gözler önüne seriyor. Bu, bazı durumlarda, bir şeklin kritik yönleri aynı kalırken diğer parçalarının değişmesi demektir. Yani, varsayalım ki bir üçgenin yüksekliklerinin bir ortak noktada kesiştiği olgusunu kabul ettik; istediğimiz şekilde üçgen çizebiliriz ve bu hep doğru kalacaktır. Kural, kullandığımız üçgenin şekline bağlı olmaksızın değişmezdir. Bu değişmezler bilgisayarda Geometer's Sketchpad(*) adlı programın yardımıyla oldukça güzel bir şekilde gösterilebilir. Örneğin, bir üçgenin çevrel çemberindeki(**) herhangi bir noktadan üçgenin kenarlarına (ya da onların uzantılarına) çizilen dikmeler, bu kenarları aynı doğru üzerinde olan üç noktada keserler (Simson değişmezi).(***) Bumu, Geometer's Sketchpad ile çok güzel bir şekilde gösterilebilir. Bunu, bu bölümde gösterebiliriz çeşitli değişmezlerden yalnızca biri.

(*) Geometer's Sketchpad Key Curriculum Press tarafından yayınlanmış –www.keypress.com– çok yönlü bir bilgisayar programıdır.

(**) Bir çokgenin çevrel çemberi, onun tüm köşelerinin üzerinde olan bir çemberdir.

(***) Kolineer noktalar, aynı doğru üzerinde olan noktalardır.

Pisagor teoreminin eğlendirici bir sürü ispatı vardır; kimisi bir sayfayı doldurur; kimisi inanılmaz derecede basittir; bunlardan biri de eski Amerika başkanı James A. Garfield tarafından yapılmıştır. Bu bölümde biri de, sizden bazı aktiviteleri gerçekleştirmenizi isteyen çeşitli bölümler çıkacaktır; örneğin, bir kalemi bir resim üzerinde "hareket ettirmek" ya da uzun bir su bardağını ölçmek gibi. Bunların her biri bir sürü sıra dışı özelliği/fenomeni ortaya koyacaklardır.

Aynı şekilde bu bölüm de bir sürü sıra dışı geometrik özellikle doludur; hepsini işlenen konunun güzelliğine işaret etmektedir. Bunlar, okuyucunun bu bölümden en iyi şekilde yararlanması için yapılmıştır. Bazı durumlarda ekstra araştırma aydınlatıcı olabilir.

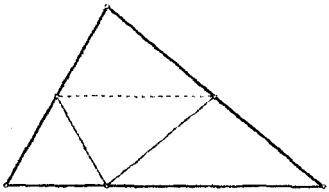
5.1 Bir Üçgenin Açılarının Toplamı

Herkes tarafından bilinir ki, bir düzlemsel üçgenin iç açılarının toplamı 180°'dir. Çoğu kişi mutlaka bunun ne anlama geldiğini bilir. Öklidçi geometrinin temeli herkes tarafından rahatlıkla anlaşılabilir. Çoğu insan bir tam dönüş yapmanın 360 derece meydana getridiğinden haberdardır. Genel olarak kabul edilmesi ve kullanılması dışında bunda kutsal olan bir şey yoktur. Yani, bir tam dönüşe 360 derece deme konusunda bir ortak anlaşmamız vardır. Böylece yarım dönüş 180derecedir.

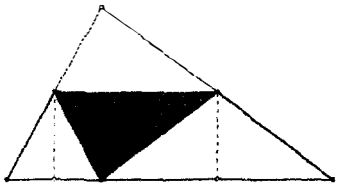
Bir üçgenin açılarının toplamının bununla ne ilgisi vardır? Bunu göstermenin en kolay ve ikna edici yolu, kâğıt bir üçgenin üç köşeni kâğıttan ayırmak ve onları bir araya getirip düz bir çizgi oluşturduğunu görmektir. Düz bir çizgi, bir tam dönüşün yarısını temsil eder; yani 180°'yi.

Bir katlanma prosedürü kullanmak belki de daha derli toplu bir yol olacaktır. Kâğıttan rahatça kullanabileceğiniz kadar büyük bir çeşitkenar üçgen(*) kesin. Daha sonra bir köşeyi

(*) Çeşitkenar bir üçgen, tüm kenarları farklı uzunlukta olan üçgendir.

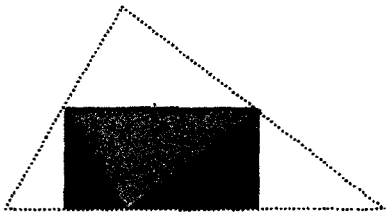


Şekil 1

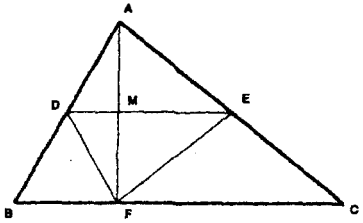


Şekil 2

karşı kenara değecek şekilde katlayın; öyle ki katlama çizgisi o kenara paralel olsun (şekil 1'e bakın).



Şekil 3



Şekil 4

Daha sonra geri kalan iki köşeyi de birinci köşeyle ortak bir noktada birleşecek şekilde katlayın (şekil 2).gördüğünüz gibi, üçgenin üç açısı birleşerek düz bir çizgi oluşturuyorlar ve böylece bu 180° demektir (şekil 3).

Ne var ki, neden bu katlama işleminin üçgenin üç köşesini kenarında bir tek noktada bir araya getirdiğini göstermek de oldukça hoştur. Bu fenomeni ispatlamak, bir üçgenin iç açılarının toplamı teoremini ispatlamakla eşdeğerdir.

İlgili okurlar için bu teoremin ispatı, şekil 4'ü kullanarak yapılan kâğıt katlama egzersiziyle birlikte yapılır. Tepe nok-

tasının paralel bir katlama çizgisinden(*) katlanması (yani, $\overline{DE} \,//\, \overline{BC}$) ile M'de $\overline{AF} \perp \overline{ED}$ olur. $\overline{MF} \precsim \overline{AM}$ olduğundan ya da MAF'nin orta noktası olduğundan, D ve E sırasıyla $\overline{AB}$ ve $\overline{AC}$'nin orta noktalarıdır; çünkü bir üçgenin (ya ΔBAF ya da ΔCAF) bir kenarına paralel olan ve üçgenin bir ikinci kenarını da ($\overline{AF}$) ikiye ayıran bir çizgi, üçüncü kenarını da ikiye bölecektir. Bundan sonra şunu göstermek kolaydır; $\overline{AD} \precsim \overline{DF}$ ve $\overline{DB} \precsim \overline{DF}$ olduğundan benzer şekilde $\overline{EF} \precsim \overline{EC}$'dir; öyle ki, B ve C'nin katlanması F'de birleşir ve $\overleftarrow{BFC}$ düz çizgisini oluşturur.

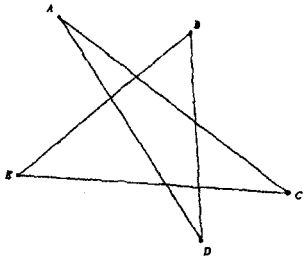
5.2 Pentagram Açılar

Pentagram, geometrideki en ilginç şekillerden biridir. Pisagorcular onu kendi sembolleri olarak kullandılar. Düzgün bir pentagram Altın Oran'ı içerir (daha sonra hakkında daha fazla şey öğreneceksiniz) ve bu halde Amerikan bayrağını elli kere süsler.

Biliyoruz ki, bir üçgenin iç açılarının toplamı 180° ve bir dörtkenarlının iç açılarının toplamı ise 360°'dir. Peki ya pentagramın iç açılarının toplamı nedir? Göstermek çok kolay olsa da, bütün pentagramların iç açılarının toplamının aynı olduğunu kabul edeceğiz. Bu şu demektir; önce düzgün bir pentagramın açılarının toplamını bulacağız, daha sonra bunu tüm pentagramlara genelleştireceğiz. Bir köşenin açısını buldunuz mu sorunun cevabının "kucağına düşeceksiniz"; çünkü bütün açıları benzerdir ve aralarında nefis bir simetri vardır.

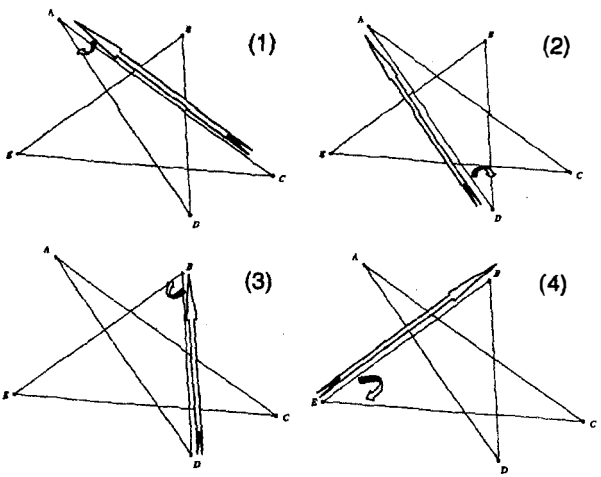
Ne var ki, böyle bir bağlantıyı yapmadığımızı aşağıdaki diyagramdaki gibi "çirkin" rastgele çizilmiş bir pentagramın açılarının toplamını bulmaya çalıştığımızı varsayalım.

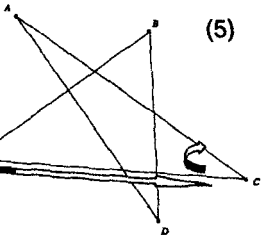
(*) Hafızanızı tazelemek için şu sembolleri tanımlayalım: // "paraleldir" , $\perp$ "diktir", $\precsim$ "benzerdir" ve ~ "denktir" demektir.

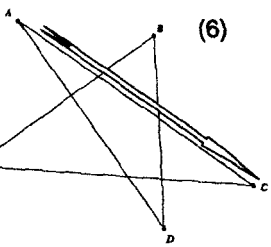


Şekil 4

Bunu ucu A'ya yönelmiş bir kalemi $\overline{AC}$'ye koyarak belirleyebiliriz; onu $\angle A$ istikametinde döndürürüz, öyle ki şimdi $\overline{AD}$'nin üzerinde ve ucu A'yı göstermektedir. Daha sonra onu $\angle$D istikametinde döndürürüz, öyle ki şimdi $\overline{BD}$'nin üzerinde ve ucu B'yi göstermektedir. Daha sonra onu $\angle B$ istikametinde döndürürüz, öyle ki şimdi BE'nin üzerinde ve ucu B'yi göstermektedir. Daha sonra onu $\angle E$ istikametinde döndürürüz, öyle ki şimdi $\overline{EC}$'nin üzerinde ve ucu C'yi göstermektedir. Son olarak onu $\angle C$ istikametinde döndürürüz, öyle ki şimdi $\overline{AC}$'nin üzerinde ve ucu C'yi göstermektedir ki burada kalem başladığı istikametin ters yönündedir. Bu nedenle, kalem başladığı istikametin ters yönünde olduğundan ki bu 180° derecelik bir dönüşle aynı şeydir; pentagramın iç açılarının toplamı (kalemin açıları teker teker geçmesiyle görüldüğü gi-



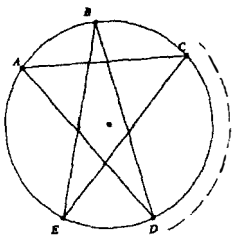




bi) 180° derecedir.

Yeniden, açı hareketleri dizisiyle kalemin doğrultusunun nasıl 180° değiştiğine dikkat ediniz.

Geometrik "ispatlar" karşısında kendisini rahat hissedenler için aşağıdaki ispat sunulmuştur. Şu kavramı kabul ettiğimizi unutmayınız: bir pentagramın iç açılarının toplamı bütün pentagramların iç açılarının toplamıyla aynıdır. Pentagramın tipi belirtilmediğine göre, pentagramı düzgün ya da tüm köşeleri bir çemberin üzerinde varsayabiliriz. Her durumda da, fark ederiz ki, açıların her biri çemberin çevre açılarıdır ve kesilmiş yayın(*) ölçüsünün yarısı kadardır.



Sonuç olarak şunu elde ederiz:

$m\angle A = 1 \div 2\ m\ CD$ [bu, "A açısının ölçüsü CD yayının ölçüsünün yarısına eşittir" diye okunur]

$m\angle B = 1 \div 2\ m\ ED$

$m\angle C = 1 \div 2\ m\ AE$

(*) Çevre açı, tepe noktası çemberin üzerinde olan açıdır. Kesilmiş yay, bir açının kolları tarafından "belirlenmiş" bir çember yayıdır. Bir çevre açının değeri, kestiği yayın ölçüsünün yarısı kadardır.

$m\angle D = 1 \div 2\ m\,AB$
$m\angle E = 1 \div 2\ m\,BC$

Eğer bu eşitlikleri toplarsak şunu elde ederiz

$$m\angle A + m\angle B + m\angle C + m\angle D + m\angle E =$$
$$1 \div 2\ m\,(CD + ED + AE + AB + BC) = 1 \div 2 \bullet 360^\circ = 180^\circ$$

Yani, pentagramın açılarının ölçülerinin toplamı, bir çemberinkinin yarısı kadardır, yani 180°. Bir kez daha dikkat ediniz ki, daha uygun koşullarda şekli belirlenmemiş bir pentagram kullanmak genel kuralları bozmamıştır. Diğer bir değişle, şeklimizi daha iyi bir şekilde idare edebileceğimiz bir hale soktuk; ama bu işlem sırasında hiçbir şey kaybetmedik.

5.3 π Üzerine Bazı Kafa Kurcalayan Şeyler

İlkokul yıllarımızdan beri π ile tanışığız. Temel matematikteki en popüler formüller $2\pi r$ ve πr^2 (ve biz ne anlama geldiğini öğrendikten sonra bizimle uzun süredir birlikte olan diğerleri) olduğundan π'nin ne demek olduğunu unutmuş ve hatırlatılmasına ihtiyacımız olabilir. Bunu yapmanın en iyi yolu, biraz etkileyici bir şey göstermektir. Belki de aşağıdaki "deney" bu ihtiyacı giderebilir.

Uzun ve ince bir silindir su bardağı alın. Bir arkadaşınıza çevresinin yüksekliğinden daha yüksek olup olmadığını sorun. Cam bardak öyle seçilmelidir ki, yüksekliği çevresinden daha büyük "görünmelidir." (Tipik bir uzun ince su bardağı bunu karşılayacaktır.) Şimdi arkadaşınıza (bir ip kullanmadan) varsayımını test edip edemeyeceğini sorun. Bir çemberin çevresi ile ilgili formülü ona hatırlatınız: $C = \pi d$ (π kere çap). Belki π'nin 3.14 olduğunu hatırlayabilir; fakat biz daha yuvarlak olarak π'yi 3 alacağız. Böylece çevreyi çapın 3 katı olarak alacağız ki bu kolayca bir kürdan ya da kalemle "ölçülebilir" ve daha sonra bardağın yüksekliği boyunca işaretle-

nebilir. Genellikle, öyle "görünmese" bile, çevrenin yükseklikten daha fazla olduğunu göreceksiniz. Bu küçük optik yanılma π'nin değerini göstermek açısından çok yararlıdır.

Şimdi gerçek bir beyin şokuna geldi sıra. π ile ilgili yeni açıklamayı kavramak için, şunu bilmelisiniz ki, yakın zamana kadar matematik üzerine bütün kitaplar, onun tarihte ilk ortaya çıkışında, yani İncil'de (Eski Ahit) onun 3 olarak alındığını söylemekteydi. Ne var ki yakın zamanda bir araştırma çalışması bunun böyle olmadığını göstermektedir.(*)

Gizli bir kodun uzun süredir kayıp olan bir sırrı ortaya çıkarabileceği düşüncesinden herkes hoşlanır. İncil'deki π'nin değeri üzerine yapılan olağan yorumlamada da durum böyledir. İncil'de iki yer vardır ki, aynı cümle görülür; bir kelime dışında her yönden aynıdır; bu kelimeler iki atıfta farklı yazılmıştır. Kral Solomon tapınağındaki bir kaynak ya da çeşmeden bahseden paragraflar 1. Krallar 7:23 ve 2. Tarihler. 4:2 bölümlerinde bulunabilir ve burada şöyle yazar:

> Dökme tunçtan on arşın çapında, beş arşın derinliğinde, çevresi otuz arşın yuvarlak bir havuz yaptırdı.

Burada tasvir edilen dairesel yapının 30 arşın çevreye ve 10 arşın çapa sahip olduğu söyleniyor. (bir arşın, parmak ucundan dirseğe kadar olan uzunluktur.) Buradan fark ediyoruz ki İncil π'yi 3 kabul ediyor: $30 \div 10 = 3$. Bu açıkça π'nin oldukça ilkel bir yaklaşık değeri. "Gaon of Vilna" (Vilna'nın zekâ parıltısı anlamına gelir) unvanını alan büyük, geç on sekizinci yüzyıl modern İncil bilginlerinden biri olan haham Elijah of Vilna (Polonya) çok ilginç bir keşif yapmıştır; bu keşif, eğer matematik tarihi kitapları İncil'in π sayısını 3 aldığını söylüyorlarsa hepsini yanlışlayabilir. Elijah of Vilna fark etmiştir ki, "çizgi uzunluğu" anlamına gelen İbranice kelime yukarıda bahsedilen iki İncil bölümünde farklı bir şekilde ya-

(*) Alfred S. Posamentier ve Noam Gordon, "An Astounding Revelation on the History of π" Mathematics Teacher 77 (January 1984): 52.

zılmıştır.

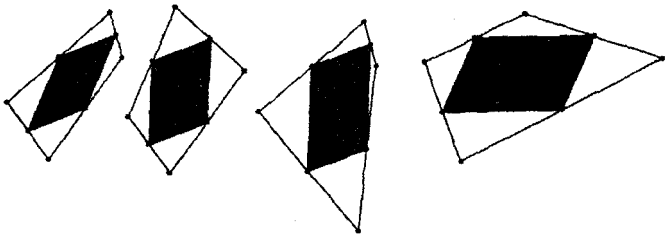
1. Krallar 7:23'te ηηρ olarak, ama 2. Tarihler 4:2'de ise ιρ olarak yazılmıştır. Elijah, İbrani alfabesindeki sıralarına göre İbranice harflerine sayıların verildiği (bugün de kullanılan) gematria adlı İncil analiz tekniğini, "çizgi uzunluğu" kelimesinin iki farklı yazılışı için uygulamıştır ve şunları bulmuştur.

Harflerin değerleri şunlardır; ρ = 100, ι = 6 ve η = 5. Bu nedenle "çizgi uzunluğu" için 1. Krallar 7:23'teki okunuş ηηρ = 100 + 6 + 5 = 111, ama 2. Tarihler 4:2'de ise ιρ = 6 + 100 = 106'dır. Daha sonra o bu iki değerin oranını almıştır: 111÷106 = 1,0472 (dört basamağa kadar); o bu değerin gerekli düzeltme faktörü olduğunu düşünmüştür; çünkü İncil'de π'nin değeri olduğuna inanılan 3 ile çarpıldığında 3.1416 elde edilir; bu dört basamağa kadar doğru π değeridir! "Vay canına" tipik bir tepkidir. Bu kavramı sağlamlaştırmak için, çeşitli objelerin çapını ve çevresini bulup çevrenin çapa oranına bakın. Muhtemelen dört basamak kesinliğe ulaşamayacaksınız. Ayrıca, dört basamaklı kesinlik sınırına ulaşmak için birçok π ölçümünün ortalamasını alsanız bile muhtemelen yine de buna ulaşamayacaksınız.

5.4 Her Zaman Varolan Paralelkenar

Bir geometrik (özelliğin ya da) teoremin gücü konusunda kendinizi güzel bir şekilde inandırmak için birkaç "çirkin" (yani, herhangi bir şekilde) dörtkenarlı çizmeye başlayabilirsiniz. Daha sonra (dikkatli bir şekilde) dörtkenarlının her bir kenarının orta noktasını belirleyin. Eğer sırayla bu noktaları birleştirirseniz, her çizim karşınıza bir paralelkenar çıkaracak. Vay Canına! Bu nasıl oldu? (Muhtemelen) birçok faklı dörtkenarlı ile başladınız. Ve sonuçta, hepsinin içinde bir paralelkenar ortaya çıktı.

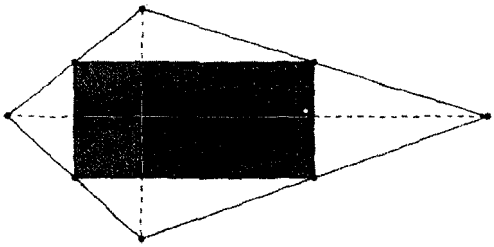
İşte birkaç olası sonuç:



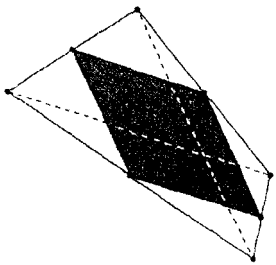
Bu noktada sorulması gereken bir soru da, orijinal dörtkenarlının parallelkenarı dikdörtgen, eşkenar dörtgen ya da kare olarak nasıl şekillendiğidir.

Deneme yanılma ya da durum analiziyle şunu keşfetmiş olmalısınız:

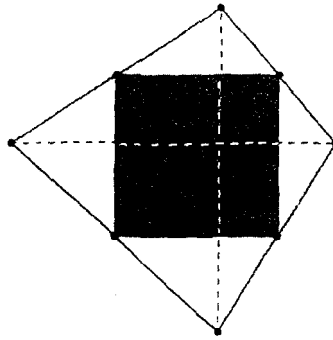
Orijinal dörtkenarlının köşegenleri birbirine dik olduğunda paralelkenar bir *dikdörtgendir*.



Orijinal dörtkenarlının köşegenleri eş olduğunda oluşan paralelkenar bir eşkenar *dörtgendir*.



Orijinal dörtkenarlının köşegenleri eş ve birbirine dik olduğunda oluşan paralelkenar bir *karedir*.



Daha azimli okuyucular için, Geometer's Sketchpad adlı bilgisayar programını tavsiye ediyoruz. Yukarıdakilerin hepsinin "gerçekten doğru" olduğunu görmek isteyen okuyucular için kısa bir ispat sunulmuştur; bir lise geometri öğrencisi bu ispatı kolaylıkla kavrayabilir.

İspat taslağı:

İspat aslında şu teoreme dayanır: Bir üçgenin iki kenarının orta noktalarını birleştiren bir doğru parçası, üçüncü kenara paraleldir ve onun yarısı kadardır. Burada olan da aynen budur.

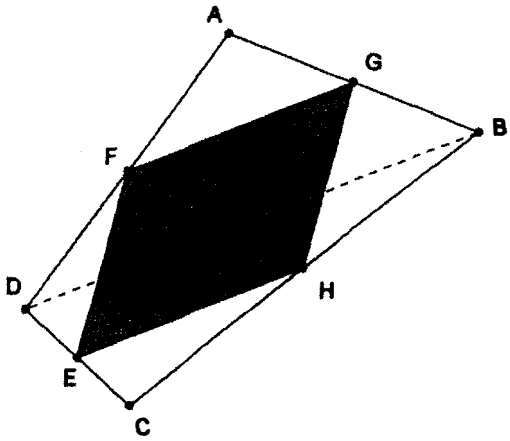
ΔADB'de $\overline{AD}$ ve $\overline{AB}$'nin orta noktaları sırasıyla F ve G'dir.

Bu nedenle $\overline{FG}//\overline{DB}$ ve $FG = 2 \div 1\ \overline{BD}$ ve $\overline{EH}//\overline{DB}$ ve $EH = 2 \div 1BD$'dir.

Bu nedenle $\overline{FG}//\overline{EH}$ ve $FG = EH$'dir. Bu $FGHE$'nin bir paralelkenar olduğunu doğrular.

Ayrıca, eğer $\overline{DB}$ ve $\overline{AC}$ köşegenleri eş ise, o zaman paralelkenarın kenarları da eş olmalıdır; çünkü onlar orijinal dörtkenarlının köşegenlerinin boyunun yarısına eşittir. Bu durum bir eşkenar dörtgen oluşumunu sağlar.

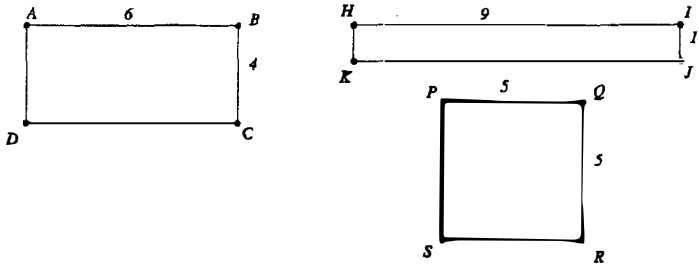
Benzer şekilde, eğer orijinal dörtkenarlının köşegenleri eş ve birbirine dikse, o zaman, paralelkenarın kenarları çiftler halinde köşegenlere paralel ve onların yarısı kadar oldukla-



rından, paralelkenarın komşu kenarları birbirine dik ve eş olmalıdır ki bu onu bir kare yapar.

5.5 Alanları ve Çevreleri Karşılaştırmak

Alanları ve çevreleri karşılaştırmak oldukça ustalık isteyen bir iştir. Verili bir çevre birçok farklı alan ortaya koyabilir. Ve verili bir alan birçok farklı çevre tarafından kapatılabilir. Örneğin 20 birim çevreye sahip dikdörtgenlerin farklı alanları olabilir.



ABCD dikdörtgenin alanı 24, çevresi 20'dir.
HIJK dikdörtgenin alanı 9, çevresi 20'dir.

PQRS dikdörtgenin alanı 25, çevresi 20'dir.

Belli bir çevreye sahip bir dikdörtgenin kaplayabileceği *maksimum* alan, eşit en ve boya sahip olduğunda, yani kare olduğunda gerçekleşebileceği gösterilebilir.

Bunun tersi de doğrudur; verili bir alan için bir dikdörtgenin alabileceği *minimum* çevre eni boyu eşit olduğunda, yani kare olduğunda mümkündür.

Benzer şekillerin alanlarını karşılaştırmak ilginçtir. Çemberleri düşünelim.

Varsayalım ki, elinizde eşit uzunlukta dört tane ipiniz var.

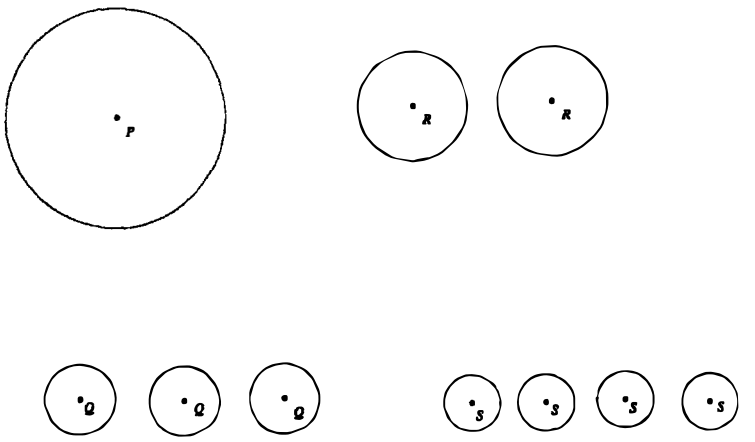
Birinci iple bir çember yapalım.

İkinci ipi, iki eş parçaya bölüp bunlardan iki eş çember yapalım.

Üçüncü ipi, üç eş parçaya bölüp bunlardan üç eş çember yapalım.

Dördüncü ipi dört eş parçaya bölüp bunlardan dört eş çember yapalım.

Bunlar aşağıda gösterilmiştir. Dikkat ediniz ki, her eş çemberler grubunun toplam çevresi aynıdır.



Çember,	Çap,	Her çemberin çevresi, toplamı,	çemberlerin çevrelerinin toplamı	her çemberin alanı	Çem. alanı
P	12	12π	12π	36π	36π
R	6	6π	12π	9π	18π
Q	4	4π	12π	4π	12π
S	3	3π	12π	$2{,}25\pi$	9π

Yukarıdaki tablonun incelenmesi gösterecektir ki, her bir çember grubunun çevrelerinin toplamı aynıdır; ama alanlarının toplamları farklıdır. Aynı ipten ne kadar fazla çember yaparsak alan o kadar küçülmektedir. Bu tam da beklemediğiniz bir şey!

Yani, iki eşit çember oluşturulmuşsa, iki çemberin alanlarının toplamı büyük çemberin yarısıdır. Benzer şekilde, dört eşit çember oluşturulmuşsa, dört çemberin alanlarının toplamı büyük çemberin dörtte biridir.

Bu sezgiye aykırı bir durumdur. Ne var ki, bir uç noktayı düşünerek, 100 tane eşit çember oluşturursak, göreceğiz ki bu çemberlerin alanlarının toplamı inanılmaz derecede küçük olacak; büyük dairenin 100'de biri kadar.

Bu can sıkıcı durumu açıklamaya çalışabilirsniz. Size alanların karşılaştırılması konusunda yeni bir perspektif kazandıracak.

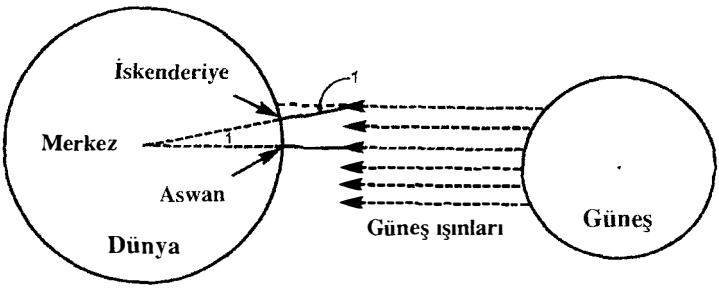
5.6 Eratosthenes Dünya'nın Çevresini Nasıl Ölçtü?

Dünya'nın çevresini ölçmek bugün inanılmaz derecede zor değildir; fakat binlerce yıl önce bu sıradan bir yetenek değildi. Hatırlayınız ki, "geometri" kelimesi "Dünya ölçümünden" köken alır. Öyleyse, bu mevzuyu en ilkel formu içinde düşünmek uygun olur. Dünya'nın çevresinin ilk ölçümlerinden biri

yaklaşık İÖ 230 yıllarında Yunan mateamtikçi Eratosthenes tarafından gerçekleştirildi. Yaptığı ölçümün hata derecesi %2 kadardı. Bu ölçümü yapmak için paralel doğrulardaki iç ters açıları kullanmıştı.

İskenderiye'de kütüphaneci olan Eratosthenes takvim olayları kayıtlarına girebiliyordu. Yılın bir günü öğlenleyin Nil'in üzerindeki Syene (bugün Aswan) adlı bir kasabada Güneş'in yere direk olarak geldiğini keşfetti. Sonuç olarak derin bir kuyu tamamen aydınlanıyor ve yere dikilmiş bir çubuk Güneş ışınlarına paralel oluyor, hiç gölge yapmıyordu.

Ne var ki, aynı zamanda İskenderiye de bir çubuk gölge yapıyordu. O gün tekrar geldiğinde Eratosthenes, çubuk ve çubuğa gelen ışın tarafından oluşturulan açıyı (aşağıdaki şekilde $\angle 1$) hesapladı. Bunun 7° 12' ya da 360°'nin $1 \div 50$'si olduğunu buldu.



Güneş ışınlarını paralel varsayarak, Dünya'nın merkezindeki açının $\angle 1$'e eş olması gerektiğini biliyordu; bu nedenle o da 360°'nin 1 /50'si olmalıydı. Syene ve İskenderiye hemen hemen aynı meridyen üzerinde olduğundan, Syene Güneş ışınlarına paralel olan, çemberin yarıçapı üzerinde bulunmalıydı. Eratosthenes böylece, Syene ve İskenderiye arasındaki mesafenin Dünya'nın çevresnin 1/50'si olduğu sonucuna vardı. Syene ve İskenderiye arasının 5.000 Yunan stadyası mesafede olduğuna inanılıyordu. Bir *stadyum*, bir Mısır stadyumunun ya da Olimpik stadyumun uzunluğuna eşitti. Bu nedenle

Eratosthenes Dünya'nın uzunluğunun 250.000 Yunan stadyası ya da 24.660 mil olduğunu buldu. Bu ölçüm günümüzdekilere oldukça yakındır. İşte size *gerçek* geometri!

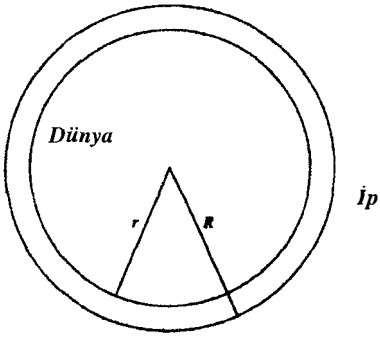
5.7 Dünya'nın Çevresindeki Şaşırtıcı İp

Yukarıdaki başlık size, sezgilerinizin her zaman doğruyu göstermediğini anlatmaktadır. Okuduklarınız sizi şaşırtacak (hatta şok edecek). Her zamanki gibi, durumu anlamak için kendinize biraz zaman tanıyın ve daha sonra onunla mücadele etmeye çalışın. Ancak o zaman sonuç, o keskin etkisini gösterecektir.

Düşünün ki, Dünya küresi ekvatordan sıkıca bir iple sarılmış olsun. İpin uzunluğu 24.900 mil olacaktır. Şimdi ipi 1 yarda uzatıyoruz ve gevşek olan ipi ekvatorun çevresine yerleştiriyoruz; öyle ki eşit bir şekilde Dünya'yı sarsın. İpin altına bir fare sığar mı?



Çevreler arasındaki uzaklığı bulmanın geleneksel yolu, çaplar arasındaki farkı bulmaktır. R ip tarafından oluşturulan çevrenin (çevre $C+1$) yarıçapı olsun ve r Dünya tarafından oluşturulan çevrenin yarıçapı olsun (çevre C).
Bildiğimiz çevre formülü bize şu sonucu verir:



$C = 2\pi r$ ya da $r = \frac{C}{2\pi}$

ve

$C + 1 = 2\pi R$ ya da $R = \frac{C+1}{2\pi}$

Yarıçaplar arasındaki farkları bulmamız gerekiyor;

$$R - r = \frac{C+1}{2\pi} - \frac{C}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \approx .159 \text{ yarda} \approx 5{,}7 \text{ inç}$$

Vay canına! Farenin altından sürünerek geçmesi için yalnızca 51 ÷ 2inçlik bir mesafe var.

Bunun çok şaşırtıcı bir sonuç olduğunu kabul etmelisiniz. 24.900 millik ipi 1 yarda uzatırsak, ekvatorla arasında yalnızca 5 2÷1 inç kalırdı!

Bu bölüm, "ekstrem durumları düşünmek" olarak adlandırabilecek güçlü bir problem çözme tekniği için oldukça uygundur.

Başlangıçtaki problemi düşünelim. Fark edeceğiniz ki, çözüm Dünya'nın çevresinden bağımsızdır; çünkü sonuçta Dünya'nın çevresi yoktur. Sadece şunu hesaplamamız gerekir: $1 \div 2\pi$.

İşte size ekstrem durumlar kullanılarak yapılan harika bir çözüm:

Varsayalım ki, içteki daire çok küçük; öyle küçük ki çapı

0 (yani, bir nokta halinde). Yarıçaplar arasındaki farkı bulmamız gerekiyor. $R - r = R - 0 = R$.

Öyleyse bulmamız gereken tek şey, büyük çemberin yarıçapıdır, ardından problem hemen çözülecektir. Küçük çemberin yarıçapı 0 olduğundan büyük çember için çevre formülünü uygulayacağız:

$$C + 1 = 0 + 1 = 2\pi R \text{ ve } R = 1 \div 2\pi$$

Az önce öğrendikleriniz arasında iki hazine bulunmaktadır. İlk olarak, o inanılmaz sonucun ortaya koyduğu ki, bu başta hiç de beklenen bir sonuç değildi. İkinci olarak gelecekte kullanılmak üzere kuvvetli bir problem çözme tekniği kazandınız.

5.8 Lünler ve Üçgen

Bir lün, iki dairesel yay tarafından oluşturulan (Ay'ın genelde aldığı biçim olan) hilal benzeri şekildir. Bir dairenin alanı düz çizgili(*) şekillerin alanları ile eşleştirilemez. Bu noktada şunu söylememiz gerekir ki, antik dünyanın en önemli üç problemiden biri dairenin kareleştirilmesiydi. Biz bugün biliyoruz ki, (işaretsiz bir cetvel ve pergelle) verili bir dairenin alanına eşit bir kare çizilemez. Ne var ki biz size, bir dairesel alanın bir üçgenin alanına eşit olduğu hoş bir örnek sunacağız.

İlk önce Pisagor Teoremini hatırlayalım. O teoreme göre:

Bir dik üçgenin kenarlarının karelerinin toplamı hipotenüsün karesine eşittir.

Bu aynı biçimde şu şekilde de ifade edilebilir.

Bir dik üçgenin kenarları üzerindeki karelerin toplamı, hipotenüsün üzerideki kareye eşittir.

(*) Düz çizgili bir şekil, doğrular ile oluşturulmuş şekildir.

Bu bir adım daha ileri götürebiliriz:

Bir dik üçgenin kenarları üzerindeki karelerin alanlarının toplamı, hipotenüsün üzerideki karenin alanına eşittir.

Aslında kolayca gösterilebileceği gibi, kenarların üzerindeki kareler başka şekillerle yer değiştirebilirler. Öyleyse şunu söyleyebiliriz:

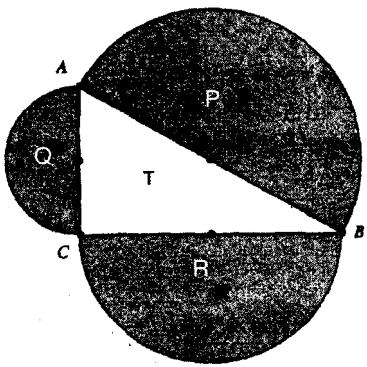
Bir dik üçgenin kenarları üzerindeki benzer çokgenlerin alanlarının toplamı, hipotenüsün üzerideki çokgenin alanına eşittir.

Bu, "benzer çokgenlerin" (tabii ki benzer) yarım daireler olduğu özel bir durum için yeniden şöyle ifade edilebilir:

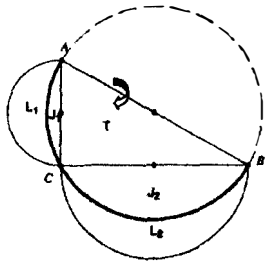
Bir dik üçgenin kenarları üzerindeki yarım dairelerin alanlarının toplamı, hipotenüsün üzerideki yarım dairenin alanına eşittir.

Böylece aşağıdaki ABC dik üçgeni için yarım dairelerin alanları şu şekilde birbirlerine bağlıdır:

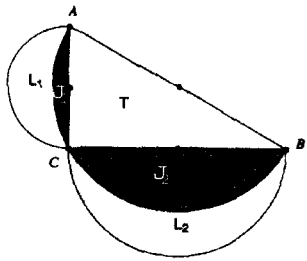
$$\text{Alan } Q + \text{Alan } R = \text{Alan } P$$



Varsayalım ki P'yi ($\overline{AB}$'yi eksen olarak kullanarak) şeklin üzerinde döndürelim. Şöyle bir resim elde edeceğiz.



Şimdi iki yarım daire tarafında oluşturulmuş olan lünlere odaklanalım. Onları L_1 ve L_2 olarak adlandıralım.



Daha önce, Alan Q + Alan R = Alan P olduğunu gösterdik.

Yukarıdaki resim için şu aynı ilişki şöyle yazılabilir:

$$Alan\ J_1 + Alan\ J_2 + Alan\ T = Alan\ L_1 + Alan\ J_1 + Alan\ L_2 + Alan\ J_2$$

Eğer Alan J_1 + Alan J_2'yi her iki taraftan da çıkarırsak şu akıl almaz sonucu elde ederiz:

$$Alan\ T = Alan\ L_1 + Alan\ L_2$$

Yani, bir düz çizgili şekli (üçgen) düz çizgili olmayan şekil-

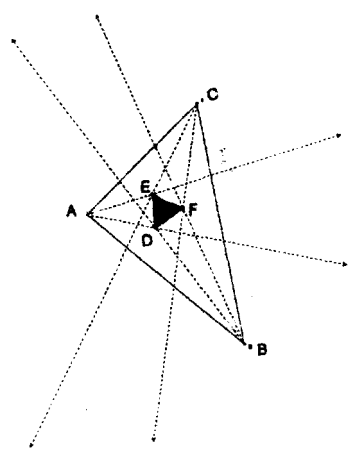
lere (lünler) eşitledik. Bu çok sıra dışıdır; çünkü dairesel şekillerin her zaman π ile ilgili oldukları düşünülür; ama dikdörtgensel (ya da düz çizgili) şekillerin olmadığı düşünülür.

5.9 Her Zaman Varolan Eşkenar Üçgen

Öklid geometrisindeki en sıra dışı ilişkilerden birisi, Frank Morley (yazar Christopher Morley'in babası) tarafından 1924'te yayımlanan teoremdir. Teoremini, Cambridge Üniversitesi'ndeki meslektaşlarıyla tartışmış; ama Japonya'da olduğu 1924 yılına kadar yayınlamamıştı. Bu teoremin güzelliğini iyi bir şekilde anlamak için en iyisi onu Geometer's Sketchpad adlı programda incelemeyi deneyin. Onu bu sayfalarda gösterebildiğimiz kadar iyi göstermeye çalıştık. Teoreme göre,

Bir üçgenin komşu açı trisektörleri(*) üç noktada kesişir ve bir eşkenar üçgen belirler.

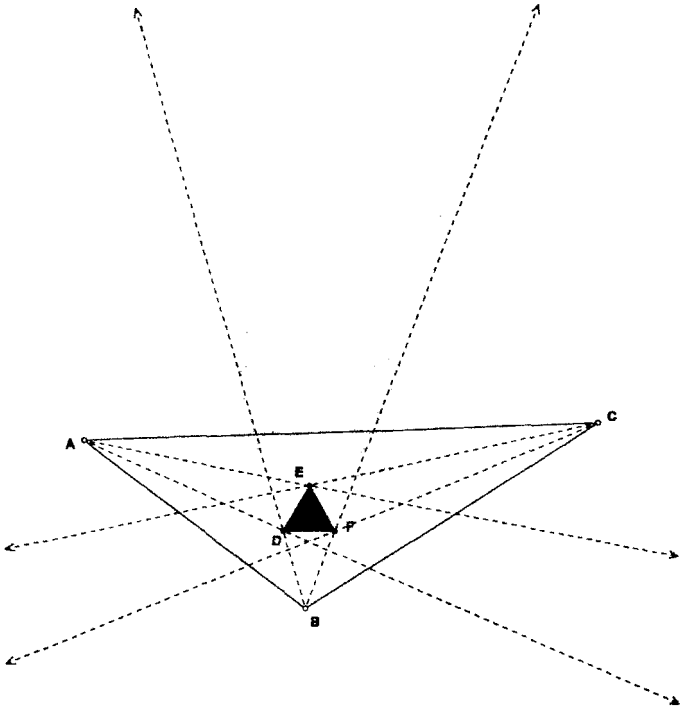
Aşağıdaki şekle bakın, ΔABC herhangi bir üçgendir.



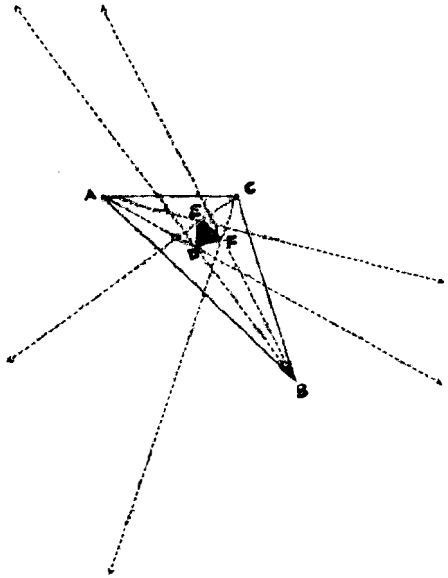
(*) Burada bir üçgenin bir kenarına en yakın iki açı trisektöründen (bir açıyı üçe bölen çizgiler) bahsediyoruz.

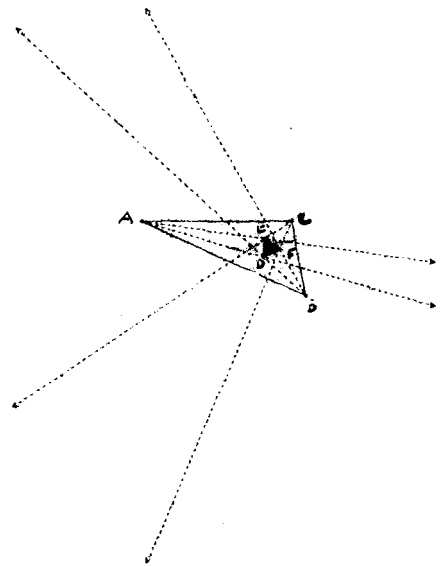
D, *E* ve F'nin, ΔABC üçgeninin komşu trisektörlerinin kesişme noktaları olduğuna dikkat ediniz. Gördüğünüz kimse yok gibi ΔDEF eşkenar bir üçgendir. Vay canına! Bu eşkenar üçgen herhangi bir şekilli üçgende ortaya çıkabilir. Geometer's Sketchpad programı size farklı ΔABC üçgenlerinde ΔDEF'nin nasıl hâlâ eşkenar üçgen olarak kaldığını güzel bir şekilde gösterebilir.

Bu şaşırtıcı ilişkiyi görmeniz için Geometer's Sketchpad tarafından yaratabileceğiniz birkaç şekil. Bu gerçekten geometrideki en inanılmaz (yani, şaşırtıcı) ilişkilerden biridir ve o şekilde sunulmalıdır. Dikkatli olun; ispatı Öklid geometrisindeki en zor ispatlardan biridir.(*)



(*) Birçok ispat şurada bulunabilir: A. S. Posamentier ve C. T. Salkind, *Challenging Problems in Geometry* (New York: Dover, 1996), syf 158-61.

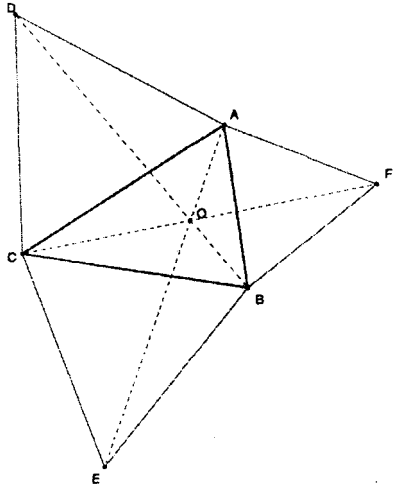

A
C
E
F
D
B


A
C
E
F
D
B

5.10 Napolyon Teoremi

Çok az bir geometri bilgisiyle ispatlanabilecek – yine de görünüşte ispatlanması zor olan— ilişkilerden birisi de Napolyon'un adı taşıyan teoremdir. Günümüz tarihçileri bunu Napolyon'un askeri mühendislerinden(*) birine atfetmektedirler. Kolay olup da ispatlanması zor bir teorem nasıl olur? Bu bir çelişki gibi gelse de zorunlu olarak o şekilde değerlendirildiğini göreceksiniz. Aslında bunu ispatlamak çok yararlıdır ve ispatın sonucunun –yani doğruluğu gösterilmiş teoremin– inanılmaz derecede yararlı birçok uzantısı vardır. Diğer bir deyişle, ispatı yapmak eğlenceli olabilir (ya da en azından bir başarı duygusu verir); ama bir kere sonuca ulaştığımızda karşımıza gerçekten hoş "malzemeler" çıkmaya başlar.

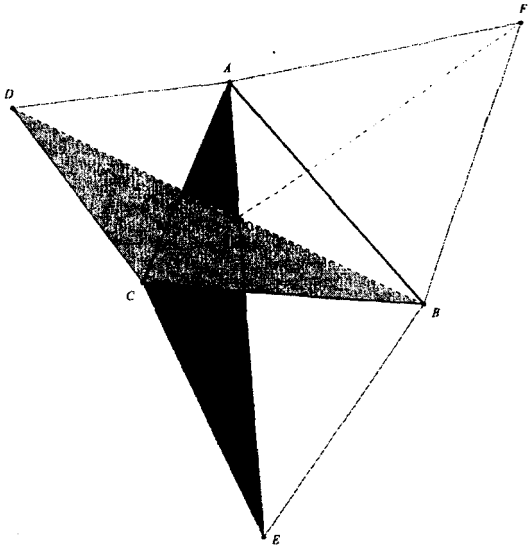
Napolyon Teoremi: (Herhangi bir şekildeki) bir üçgenin her bir köşesini, bu köşenin baktığı kenarın üzerine çizilen eşkenar üçgenin tepe noktasına birleştiren doğru parçaları eştir.



(*) Bu mühendislerden birisi, 1785'te askeri akademide matematikten sınav olacak olan on altı yaşındaki Napolyon Bonaparte ile tanışan ünlü matematikçi Pierre-Simon de Laplace'dı.

Yani, ΔADC, ΔBCE ve ΔABF eşkenar üçgenler ise, $\overline{AE}$, $\overline{BD}$ ve $\overline{CF}$ eştirler. Bu durumun garip doğasına dikkat ediniz; çünkü biz herhangi bir üçgenle başlıyoruz ve bu hâlâ aynı kalıyor. Eğer kendi üçgeninizi çizerseniz, yine aynı durumla karşılaşacaksınız. Cetvel ya da pergel ya da Geometer's Sketcpad bu iş için çok uygundurlar; ne var ki sondaki daha iyidir.

Bu teoremin sakladığı maceralara yelken açmadan önce, bu teoremin nasıl ispatlandığı ile ilgili ipuçları vermek yararlı olacaktır. Eş olma durumunu göstermek için yapılacak numara uygun üçgenleri belirlemektir. Bunlar kolayca belirlenemez. Bir çift aşağıda gösterilmiştir. Bu iki üçgenin benzerliği, $\overline{AE}$ ve $\overline{BD}$'nin eşliğini ispatlamaktadır. Bunlar gibi diğer üçgenler de bulunarak, diğer doğru parçalarının eşliği ispatlanabilir.

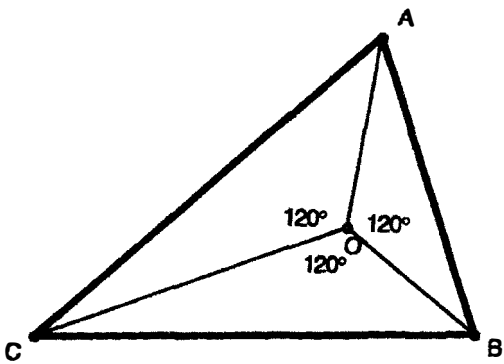


Bu şekilde birkaç sıra dışı özellik vardır. Örneğin, dikkat etmemiş olabilirsiniz; $\overline{AE}$, $\overline{BD}$ ve $\overline{CF}$'de aynı zamanda aynı

yerde kesişirler (yani, ortak bir nokta içerirler). Bu kavram lise geometri derslerinde pek incelenmez. Tabii ki, sorgusuzca kabul etmeyeceğiz. Bu da kanıtlanmalıdır; fakat amaçlarımız dolayısıyla ispatlamadan bırakacağız.(*)

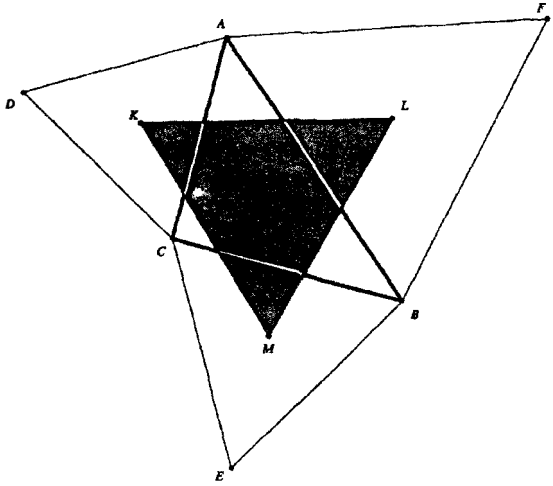
O noktası yalnızca üç doğru parçasının ortak noktası değil, aynı zamanda orijinal üçgendeki köşelere olan uzaklığın toplamının minimum olduğu tek noktadır. Bu sıklıkla ABC üçgeninin *minimum uzaklık noktası* olarak adlandırılır. Üçgenin içindeki, bu nokta dışındaki diğer tüm noktalardan köşelere çizilen çizgilerin toplam uzunluğu hep bu minimumdan daha fazladır.

Bu yetmezmiş gibi, bu O noktası, kenarların eşit açılar karşısında olduğu tek noktadır. Yani, $\angle AOC = m\angle COB = m\angle BOA = 120°$.

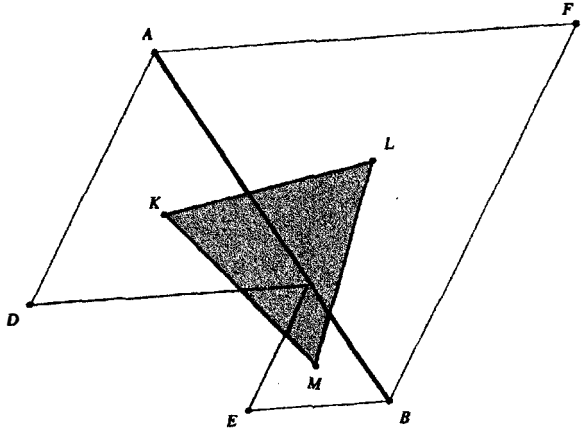


Daha bitmedi! Bu üç eşkenar üçgenin merkez noktasını belirleyin. Bunu bir sürü değişik şekilde yapabilirsiniz. Üç yüksekliğin, açı ortayın ya da kenar ortayın kesişim noktasını bularak mesela. Bu noktaları birleştirmek ortaya bir eşkenar üçgen çıkaracaktır. Hatırlayın, başta rastgele bir (ΔABC) üçgen çizdik ve tüm bu nefis özellikler ortaya çıktı.

(*) Bu teoremin ve onun uzantılarının ispatı için bakınız: A. S. Posamentier, *Advanced Euclidean Geometry: Excursions for Secondary Teachers and Students* (Emeryville, Calif: Key Collage Publications, 2002), bölüm 4.



Geometer Sketchpad gibi bir bilgisayar programı kullanarak göreceksiniz ki, başlangıçtaki üçgenin şeklinden bağımsız olarak, yukarıdaki tüm ilişkiler doğrudur. Şu ilginç soruyu kendinize sorabilirsiniz: Eğer C noktası $\overline{AB}$'nin üzerinde olsaydı ve böylece orijinal üçgeni ortadan kaldırsaydı ne olurdu? Aşağıdaki şekle bakın.



Allah Allah!; Eşkenar *KLM* üçgenimiz hâlâ duruyor! Belki de daha şaşırtıcı olan (olabilirse) bu teoremin genelleştirilmesidir. Yani, diyelim ki, rastgele çizdiğimiz üçgenin kenarlarına uygun şekilde yerleştirilmiş üçgenler çizeceğiz ve bunların merkezlerini birleştireceğiz (bu sefer seçeceğimiz "merkezler" konusunda tutarlı olmalıyız –sentroid, ortasantr, insantr vb.).(*) Ortaya çıkacak şekil, bu üç benzer üçgene benzer olacaktır.

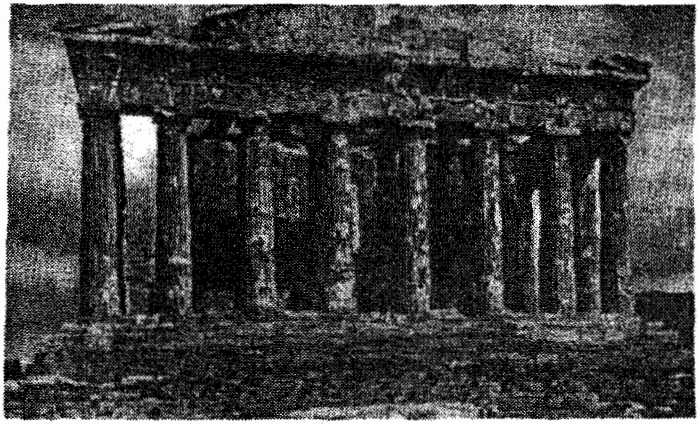
Geometer's Sketchpad gibi programlar yardımıyla, rastgele seçtiğimiz üçgenimizin kenarları üzerine dıştan çizdiğimiz üçgenler üzerine söylediğimiz her şey, içten çizilen üçgenlere de genişletilebilir.

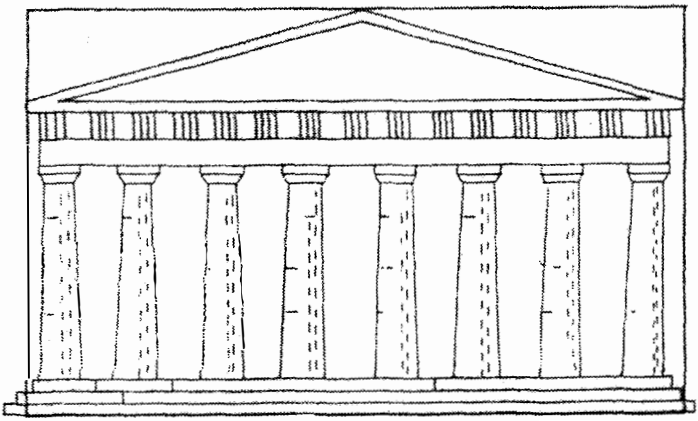
Böylece bu basit teoremden, birçok yeni bağıntı ortaya çıktı; bunların bir çoğu bağımsız olarak keşfedilebilir –özellikle, eğer elinizde bir bilgisayar çizim programı varsa.

5.11 Altın Dikdörtgen

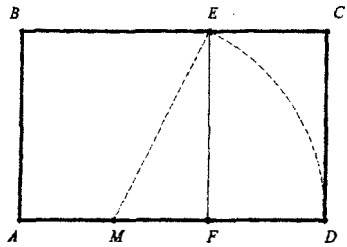
Matematiğin güzelliğinden bahsettiğimizde, birçok sanatçının en güzel dikdörtgen olarak nitelediği şeyden de bahsedebiliriz. Altın Dikdörtgen olarak da adlandırılan bu şekil, çoğu psikolog tarafından diğer dikdörtgenlere göre estetik açıdan en huzur verici olan olarak düşünülür. Bu genellikle mimarlıkta ve sanatta kullanılmıştır. Örneğin, Yunanistan, Atina'daki Parthenon'un şekli Altın Dikdörtgen'e dayanır. Klasik sanattaki eserlere baktığımızda, Altın Dikdörtgen'in çok başat olduğunu görürüz.

(*) Sentroid, bir üçgenin kenar ortaylarının kesişme noktasıdır. Ortasantr, bir üçgenin yüksekliklerinin kesişme noktasıdır. İnsantr, bir üçgenin açı ortaylarının kesişme noktasıdır.

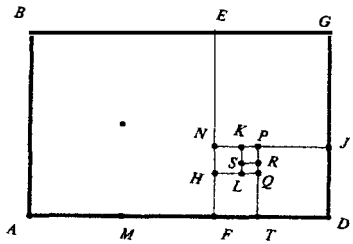




Bir Altın Dikdörtgen oluşturmak için *ABEF* karesi ile başlıyoruz (aşağıdaki ilk şekle bakınız). *ABEF* karesinin bir kenarının orta noktası *M*'yi belirleyin ve *ME* uzunluğunda bir yarıçapı olan dairesel bir yayı *M* merkez olacak şekilde çizin. Yayın $\overrightarrow{AF}$ uzantısı ile kesiştiği *D* noktasını bulun. Daha sonra *D* noktasından $\overline{AD}$'ye dik bir dikme çıkarın ve bu, *C* noktasında $\overrightarrow{BE}$ ile birleşsin. *ABCD* dikdörtgeni bir Altın Dikdörtgen'dir. Bu bir cetvel ve pergelle yapılabilir ya da belki de Geometer's Sketchpad kullanabilirsiniz.



İşte size Altın Dikdörtgen'in hoş bir uzantısı. Aşağıdaki gösterildiği gibi, eğer Altın Dikdörtgen içinde sürekli olarak kareler oluşturursak, ortaya çıkan dikdörtgenlerin her biri Altın Dikdörtgen olur; yani bu baştaki dikdörtgene benzerdir; çünkü bütün Altın Dikdörtgen'ler benzerdir.



ABEF karesini *ABGD* Altın Dikdörtgen'inden çıkarın ve *EGDF* Altın Dikdörtgen'ini elde edin.

EGJN karesini *EGDF* Altın Dikdörtgen'inden çıkarın ve *JDFN* Altın Dikdörtgen'ini elde edin.

PJDT karesini *JDFN* Altın Dikdörtgen'inden çıkarın ve *TFNP* Altın Dikdörtgen'ini elde edin.

TFHQ karesini *TFNP* Altın Dikdörtgen'inden çıkarın ve *HNPQ* Altın Dikdörtgen'ini elde edin.

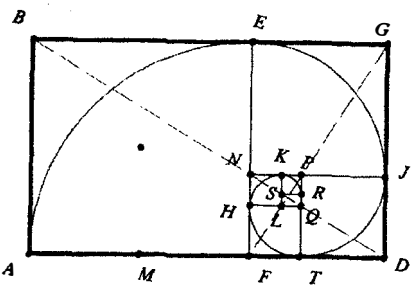
HNKL karesini *HNPQ* Altın Dikdörtgen'inden çıkarın ve *KPQL* Altın Dikdörtgen'ini elde edin.

KPRS karesini *KPQL* Altın Dikdörtgen'inden çıkarın ve *SRQL* Altın Dikdörtgen'ini elde edin.

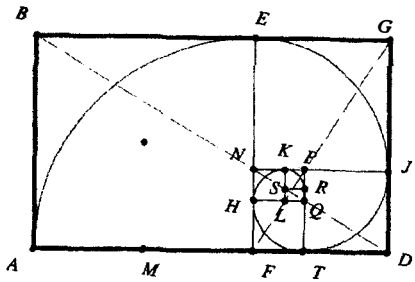
Vb.

Dikkat ediniz ki, her defasında bir kare bir Altın Dikdörtgen'den çıkarılıyor ve ortaya bir Altın Dikdörtgen çıkıyor.

Yukarıdaki resmi çizdiğinizde aşağıda da gösterildiği gibi, çeyrek dairesel yaylar çizmelisiniz. Ortaya çıkacak resim aşağı yukarı logaritmik bir spiraldir.

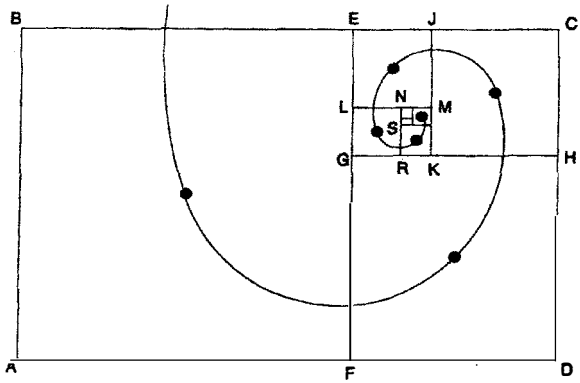


En büyük iki Altın Dikdörtgen'in köşegenlerini çizerek, aşağıda da gösterildiği gibi spiralin bitim noktasını belirleyebiliriz.



Eğer bu şekli kesin bir şekilde çizerseniz, $\overline{BD}$ ve $\overline{GF}$'nin diğer Altın Dikdörtgen'lerin köşegenlerini de içerdiğini göreceksiniz. Ayrıca $\overline{BD} \perp \overline{GF}$'dir.

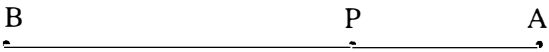
Benzer bir spiral, sırayla büyükten küçüğe her karenin ortası bulunarak ve aşağıdaki gibi çizilerek oluşturulabilir:



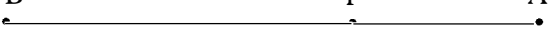
Bu dikdörtgenle ilgili güzelliklerin bir sınırı yok. İşte bu yüzden ona *Altın Dikdörtgen* deniyor.

5.12 Kâğıt Katlama ile Oluşturulan Altın Oran

Matematikte güzel olan birçok şey vardır; ama güzellik her zaman ilk bakışta belli olmaz. Fakat bu Altın Oran için geçerli değildir; çünkü hangi biçimde sunulursa sunulsun ilk bakışta güzellik gözler önüne serilir. Altın Oran, bir doğru parçası belli bir noktayla bölündüğünde ortaya çıkan oran olarak nitelenebilir.



$\overline{AB}$ doğru parçası için P onu $\overline{AP}$ ve $\overline{BP}$ doğru parçalarına böler (ya da ayırır) öyle ki, $AP \div PB = PB \div AB$. Bu oran görünüşe bakılırsa Mısırlılar ve Yunanlılar tarafından biliniyordu;

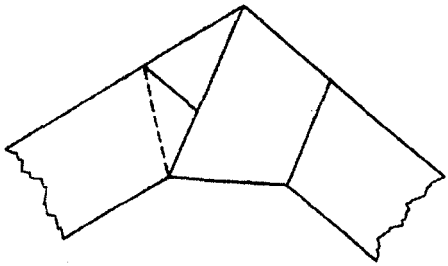


fakat ilk olarak Altın Oran şeklinde isimlendirilmesi Leonardo Da Vinci tarafından oldu; Leonardo Da Vinci Fra Luca Pa-

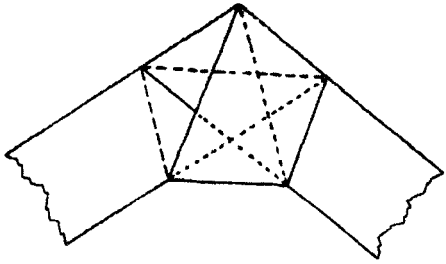
cioli'nin bu konuyla ilgili *De Divina Proportione* (1509) adlı kitabına şekiller çizmişti.

Altın Oran'la ilgili bitmez tükenmez güzellikler vardır. Bunlardan bir tanesi oldukça kolaydır; bir kişi yalnızca bir parça kâğıdı katlayarak oranı oluşturabilir.

3 ya da 4 santim genişliğinde kâğıt bir şerit alın ve bir düğüm atın. Daha sonra aşağıda gösterildiği gibi düğümü dikkatli bir şekilde yassılaştırın. Unutmayın ki, ortaya çıkacak olan şekilin düzgün bir beşgen olması gerekiyor; yani tüm açıları ve kenarları aynı olan bir beşgen.



Eğer nispeten ince ve saydam bir kâğıt kullanıp onu ışığa tutarsanız; köşegenleri ile birlikte bir beşgen görmeniz gerekir.(*) Bu köşegenler Altın Oran'la birbirleriyle kesişirler. (aşağı bakın).

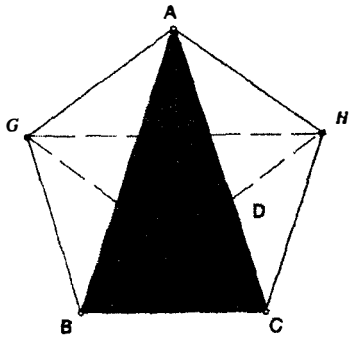


Şimdi aşağıdaki beşgene daha yakından bakalım. D noktası $\overline{AC}$'yi Altın Oran'la böler; yani $\overline{DC} \div AD = AD \div AC$'dir.

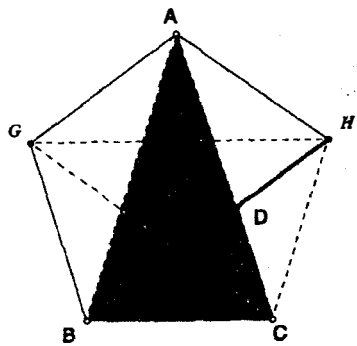
O zaman, AD doğru parçasının uzunluğunun, kısa parça

(*) Bu köşegenler düzgün pentagram olarak adlandırılan beş köşeli yıldızı oluştururlar.

($\overline{DC}$) ve tüm parçanın ($\overline{AC}$) orta orantılısı olduğunu söyleyebiliriz.



Bazı okuyucular *için* Altın Oran'ın değerini göstermek yararlı olacaktır. Bunu yapmak için, tepe açısı ($\angle A$) 36° olan bir ABC ikizkenar üçgeni(*) ile başlıyoruz. Şimdi de $\angle ABC$'nin $\overline{BD}$ açıortayını düşünün (aşağıdaki şekle bakın):



$m\angle DBC = m\angle ABD = 36°$ olduğunu bulduk.

Bu nedenle $\Delta ABC \sim \Delta BCD$'dir. $AD = x$ ve $AB = 1$ diyelim. ΔABC ve ΔBCD ikizkenar olduğundan $BC = BD = AD = x$'dir.

(*) Bir ikizkenar üçgen, iki kenarı aynı uzunlukta olan üçgendir.

Yukarıdaki benzerlikten: $x \div 1 = 1\text{-}x \div x$'dir.

Bu bize şunu verir: $x^2 + x - 1 = 0$ ve $x = (\sqrt{5} - 1) \div 2$ (negatif kök AD uzunluğu için kullanılamaz.)

$(\sqrt{5} - 1) \div 2 = 1 \div \phi$ olduğunu biliyoruz (bölüm 4.8'den).

ΔABC üçgeni için kenar ÷ taban oranı = $1 \div x = \phi$'dir ki bu Altın Oran'dır.

Bu nedenle bunu *Altın Üçgen* olarak adlandırırız.

5.13 Düzgün Beşgen, O Kadar da Değil

İşaretsiz bir cetvel ve pergelle çizilebilecek en zor şekillerden birisi düzgün beşgendir. Bunu yapmanın birçok yolu olmasına rağmen hiçbirisi de kolay değildir. Altın Oran'ın orada olduğunu bilerek kendi çizim tekniğinizi geliştirebilirsiniz.

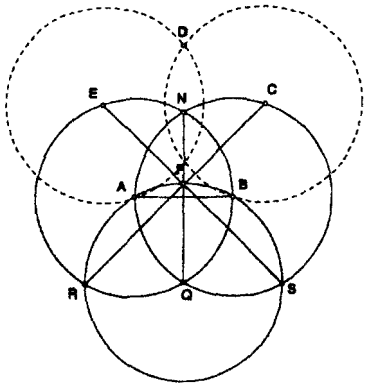
Yıllardır mühendisler düzgün bir beşgen gibi görünecek bir şeklin çizilmesiyle ilgili bir metot üzerinde çalışıyorlar; ne var ki dikkatli bir inceleme bunun birazcık düzensiz olduğunu ortaya koyar.(*) Aşağıda sunulan metot, ünlü Alman sanatçı Albert Dürer tarafından 1525 yılında geliştirilmiştir.

Aşağıdaki şekli takip ediyoruz. AB doğru parçası ile başlayarak AB yarıçaplı beş çemberi şu şekilde çiziyoruz:

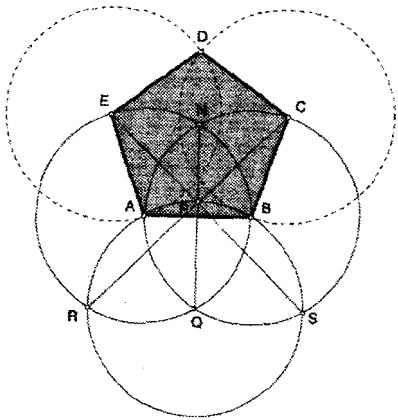
1. *A* ve *B* noktaları merkez olacak şekilde ve *Q* ve *N*'de kesişecek şekilde çemberleri çizin.
2. Daha sonra *Q* merkezli çember *A* ve *B* çemberleriyle sırasıyla *R* ve *S* noktalarında kesişecek şekilde çizilecektir.
3. *QN*, *Q* çemberi ile P noktasında kesişecek.
4. *SP* ve *RP*, *A* ve *B* çemberleriyle sırasıyla *E* ve *C* noktalarında kesişecek.
5. *E* ve *C* noktaları merkez olacak şekilde *AB* yarıçaplı D'de kesişen çemberleri çizin.

(*) Hataların nerede bulunduğu ile ilgili bir tartışma için bkz: Alfred S. Posamentier ve Herbert A. Hauptman, 101 Great Ideas for Introducing Key Concepts in Mathematics (Thousand Oaks, Calif.: Corwin Press, 2001), syf 141-46.

6. *ABCDE* beşgeni (varsayıldığına göre) düzgün bir beşgendir.



Sırayla noktaları birleştirerek *ABCDE* beşgenini elde ederiz.

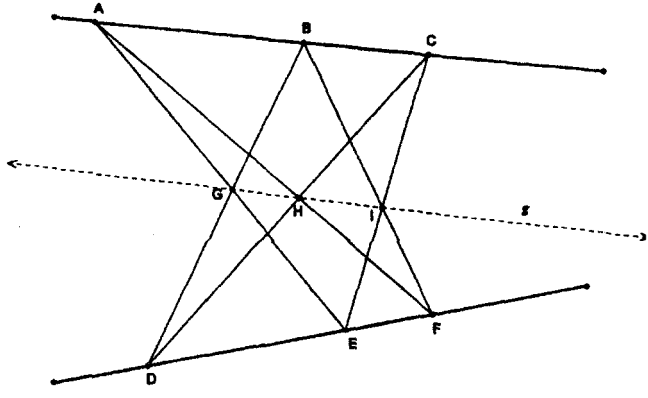


Beşgen düzgün "görünse de", $\angle ABC$ bir derecenin $22 \div 60$'ı kadar daha büyüktür. Yani, *ABCDE*'nin düzgün bir beşgen olabilmesi için her açının 108° olması gerekir; ama biz $m\angle ABC \approx 108.3661202°$ açıya sahibiz. Bunu Geometer's Sketchpad ile ya da basitçe bir parça kâğıda çizmeyi deneyebilirsiniz; reçetesi olduktan sonra, bu sanat eserini çizmek kolay olacaktır.

5.14 Pappus Değişmezi

Geometrideki en nefis ilişkilerden biri, bir şeyin şeklinden bağımsız olarak ilişki doğru kaldığında oluşur. Yani, telefondan dinlenen talimatlara göre bir şekil çizildiğinde; her şeklin çizimi kişiden kişiye göre değişecek olsa da bir parçası her zaman aynı kalacaktır. Bunu değişmez olarak adlandırırız. Böyle bir durum bize, *Collection*(*) adlı kitabında (yaklaşık İÖ 300-350) İskenderiyeli Pappus tarafından gösterilmiştir; bu kitap o zaman geometride bilinenlerin bir derlemesiydi. Gelin şimdi onun bize bıraktıklarına bir bakalım ve hayran kalalım.

Herhangi iki çizgi ve bunların üzerinde herhangi bir yerde üç nokta düşünün. Daha sonra birinci çizgide noktaları ikinci çizgideki noktalarla birleştirin; ama karşılıklı noktaları birleştirmekten sakının; yani, birinci çizginin en sağındaki noktayla ikinci çizginin en sağındaki noktayı birleştirmeyin ve orta noktaları da birbiriyle birleştirmeyin.



Yukarıdaki şekilde üç kesişim noktası *G*, *H* ve *I* işaretlenmiştir. İşte şaşırtıcı olan şey: çizgileri nasıl çizerseniz çizin ya da noktaları çizgiler üzerinde nereye koyarsanız koyun, *G*, *H*

(*) Bu, Collection'da lemma 13 ve önerme 139 olarak yazılmıştır.

ve I noktası kolineerdir (yani, hepsi aynı doğru üzerinde bulunurlar)!(*)

Bu şaşırtıcı sonuç geometrinin güzelliğinin bir başka ispatıdır. Bu şaşırtıcı sonucun gerçekliğine iyice inanmak için birkaç şekil daha çizmeyi deneyebilirsiniz.

5.15 Pascal Değişmezi

1640'da, on altı yaşındaki ünlü matematikçi Blaise Pascal, *Essay pour les coniques* isimli, bize kavrayış yüklü bir teorem sunan bir sayfa uzunluğunda bir makale yayımladı. *Mysterium hexagrammicum* olarak isimlendirdiği şeye göre bir konik kesimin(**) içine çizilen bir altıgenin karşıt kenarlarının kesişim noktaları *kolineerdi*(***) (yani, aynı doğru üzerindeydiler). Tartışmamızı olabildiğince basitleştirmek için en bilinen konik kesiti kullanacağız: çember.

Çemberin içine çizilmiş (yani, tüm köşeleri çemberin üzerinde) bir *ABCDEF* altıgeni düşünün. Bunu bağımsız olarak ya bir kâğıt üzerine ya da daha iyisi, Geometer's Sketchpad ya da benzer bir program kullanarak yapabilirsiniz. Burada mesele, karşıt kenarlarının kesişimleri alınabilecek bir altıgen şekli çizmektir –yani, karşıt kenarları paralel yapmayın.

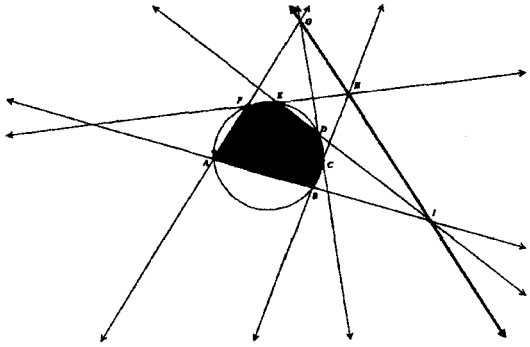
Karşıt kenar çiftleri ve (onların uzantılarının) kesişimleri:

$\overline{AB}$ ve $\overline{DE}$, I noktasında kesişir
$\overline{BC}$ ve $\overline{EF}$, H noktasında kesişir
$\overline{DC}$ ve $\overline{FA}$, G noktasında kesişir

(*) Pappus teoreminin bir ispatı için bkz: Alfred S. Posamentier, *Advanced Euclidean Geometry: Excursions for Secondary Teachers and Students* (Emeryville, Calif: Key Collage Publications, 2002).

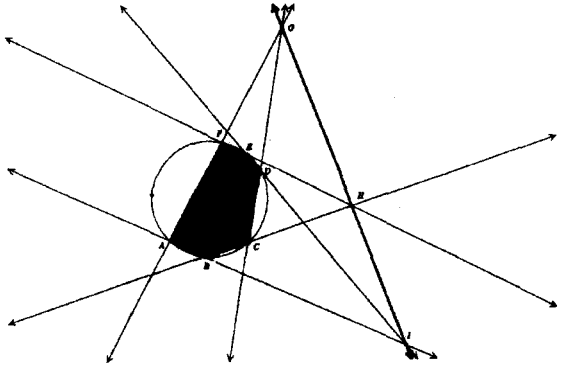
(**) Bir konik kesim, bir koniyi kesen bir düzlemle oluşturulan bir eğridir. Bu bir çember, elips, parabol ya da hiperbol olabilir.

(***) Pascal teoreminin bir ispatı için bkz: Alfred S. Posamentier, *Advanced Euclidean Geometry: Excursions for Secondary Teachers and Students* (Emeryville, Calif: Key Collage Publications, 2002)



Dikkat ediniz ki, G, H ve I aynı doğru üzerindedir.

İşte karşınızda çember üzerine çizilmiş farklı şekilli bir altıgen. Yine, şekilden bağımsız olarak altıgenin karşıt kenarlarının uzantılarının kesişimleri aynı doğru üzerinde bulunmaktadır (yani, H, G ve I noktaları kolineerdir).



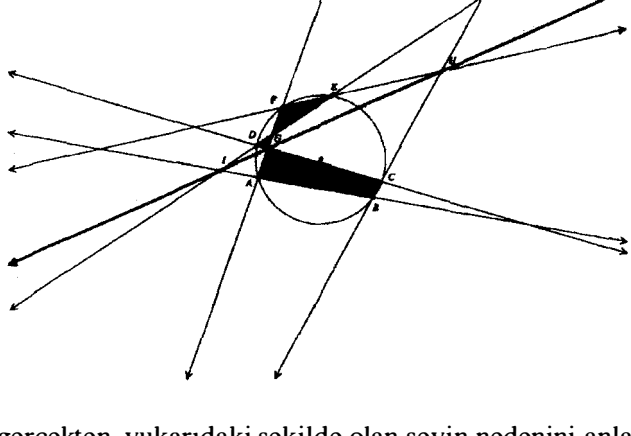
Eğer bunu bir bilgisayarda yaparsanız, altıgenin şekli ne olursa olsun, G, H ve I'nın aynı doğru üzerinde bulunacağını göreceksiniz. Burada şaşırtıcı olan şey, bu olayın altıgenin şeklinden bağımsız oluşudur. Altıgeni, benzemeyecek şekilde eğri büğrü çizseniz bile, karşıt kenarların nerede olduğunu ve *köşe* noktalarının çember üzerinde nerede olduğunu bildiği-

niz sürece aynı doğru üzerinde olma olayı bozulmayacaktır. V yine bu, Geometer's Sketchpad ile rahatlıkla gösterilebilir.

Bir sonraki (biraz bozulmuş) şekilde, başlangıçtaki altıgenin kenarlarının işaretleri aracılığı ile burada kullanılan altıgeni tanımlayabilirsiniz. Karşıt kenar çiftleri ve (onların uzantılarının) kesişimleri:

$\overline{AB}$ ve $\overline{DE}$, I noktasında kesişir
$\overline{BC}$ ve $\overline{EF}$, H noktasında kesişir
$\overline{DC}$ ve $\overline{FA}$, G noktasında kesişir

Bu G, H ve I kesişim noktaları hâlâ aynı doğru üzerindedir.



Bu gerçekten, yukarıdaki şekilde olan şeyin nedenini anlamaya sizi teşvik edebilecek şaşırtıcı bir bağıntıdır.

5.16 Brianchon'un Pascal'ın Fikrini Dahiyane Bir Şekilde Genişletmesi

1806'da, yirmi bir yaşında, École Polytecnique'de öğrenci olan Charles Julien Brianchon (1785-1864) Journal de *L'École Polytecnique*'de, daha sonra izdüşümsel geometride konik kesitlerin incelenmesine en temel katkılardan biri olacak bir

makale yayınladı.(*) Onun ortaya koyduğu ilerleme Pascal'ın bir şekilde unutulmuş olan teoreminin ve onun sonuçlarının yeniden ifade edilmesiydi; bu teoremden sonra Briachon yeni bir teorem ortaya attı ve daha sonra bu onun adını taşımaya başladı. "Bir konik kesitin çevresini saran bir altıgenin üç köşegeni aynı noktada kesişir" diyen Brianchon'un teoremi(**) Pascal'ın teoremi(***) ile oldukça benzerlik gösterir.

Pascal teoremi ile Brianchon'un keşfettiği şey arasındaki ilişkiyi tam olarak anlayabilmek için ilk olarak, matematikte dualite (ikilik) kavramının ne olduğunu iyi anlamak gerekir. Bir ifadedeki tüm anahtar kelimeler onların dual kelimeleri tarafından yer değiştirildiğinde oluşan ikinci ifade, birinci ifadenin dualidir. Örneğin, nokta ve doğru; aynı doğru üzerinde olma ve tek noktada kesişme; çemberin üzerinde olma ve çemberin çevresinde olma; kenarlar ve köşeler vb. dual kelimelerdir. İşte karşınızda bir ikilik ilişkisi. Nokta ve doğru terimlerinin nasıl yer değiştirebildiğine dikkat ediniz.

İki nokta bir *doğru* belirler.
İki doğru (kesişen doğrular tabii ki) *bir nokta* belirler.

Aşağıda Pascal teoremini ve onun yanında da Brianchon teoremini göreceksiniz. Dikkat ediniz ki, Pascal'ın ifadesindeki kelimeler onların dual kelimeleri ile yer değiştirdiğinde ortaya Brianchon teoremi çıkıyor. Böylece, aslında bu teoremler birbirinin dual teoremleridir.

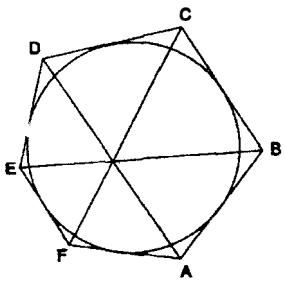
Pascal teoremi
Bir konik kesit üzerine çizilmiş bir altıgenin karşıt kenarlarının kesişim noktaları aynı doğru üzerindedir.

(*) İzdüşümsel geometri, izdüşüm durumunda değişmeyen geometrik özellikleri inceler.
(**) Brianchon teoreminin bir ispatı için bkz: Alfred S. Posamentier, *Advanced Euclidean Geometry: Excursions for Secondary Teachers and Students* (Emeryville, Calif: Key Collage Publications, 2002).
(***) D. E. Smith, ed., *Source Book in Mathematics*, (New York: McGraw-Hill, 1929), syf 336.

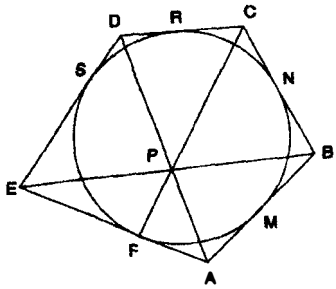
Aşağıdaki şekilde, *ABCDEF* altıgeni bir çemberin çevresine çizilmiştir. Tıpkı Pascal teoreminde olduğu gibi, yalnızca basit bir konik kesiti, çemberi göz önüne alacağız. Brianchon teoremine göre karşıt köşeleri içeren doğrular tek bir noktada birleşmektedir. Bunun doğru olduğunu bir çemberin çevresine çizilmiş farklı şekilli altıgenleri deneyerek görebilirsiniz. Bir kez daha, bu şeklin basitliğinin ve sonuçlarının onun güzelliğini nasıl da yansıttığını görüyoruz.

Brianchon teoremi

Bir konit kesit çevresine çizilmiş bir altıgenin karşıt köşelerinin birleşim noktaları tek bir noktadır.



Bunu söyledikten sonra şunu da öne sürüyor; eğer *A*, *F* ve *E* aynı doğru üzerinde olacak şekilde hareket ettirilirlerse ki bu durumda *F* noktası teğet noktası olacak ve bir beşgen oluşacaktır; aynı teorem geçerlidir. Yani, *ABCDE* çemberin çevresine çizilmiş bir beşgen ise, o zaman $\overline{CF}$, $\overline{AD}$ ve $\overline{BE}$ tek bir noktada kesişir.



Bir dakika durun ve yukarıdaki altıgenle ilgili durumun müthişliğine bakın ve kendinize bu ilişkiyi kavramak için biraz zaman verin. Bu sizi kesinlikle daha fazla araştırma yapmaya teşvik edecektir!

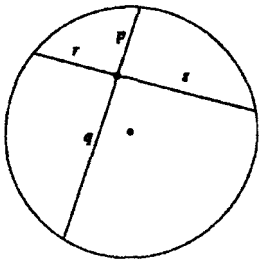
5.17 Pisagor Teoremi'nin Basit Bir İspatı

Matematikte en çok bilinen ilişkilerden birisi Pisagor teoremidir. Okulda öğrendiği matematiksel olaylar içinde neden yetişkinler en çok bu formülü akıllarında tutarlar? Acaba, bu formüle alfabenin ilk üç harfini vermemizden dolayı olabilir mi? $a^2 + b^2 = c^2$; tıpkı abeceyi öğrenmek gibi.

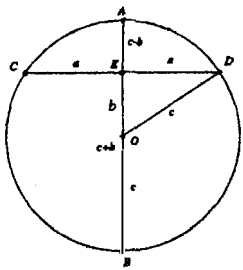
Açıktır ki, Pisagor teoremi geometrinin bir çoğunun ve trigonometrinin tamamının temelidir. Bu nedenle, yeni bir ispat yapacak olan kimsenin, ispatının Pisagor teoreminin kendisi tarafından ispatlanabilen bir bağıntıya dayanmamasına dikkat etmelidir. Trigonometride durum böyledir. Pisagor teoreminin hiçbir ispatı trigonometrik bağıntılara dayanamaz; çünkü bu bağıntılar Pisagor teoremine dayalıdır ve eğer bunu yaparsak bu döngüsel bir uslamlama olacaktır –geçerli değildir.

Şimdi ispata gelelim. Oldukça basit; fakat şu teoreme dayanıyor: Eğer bir çemberde iki kiriş kesişiyorsa, bir kirişin parçalarının çarpımı, diğer kirişin parçalarının çarpımına eşittir.

Aşağıdaki şekilde, iki kesişen kiriş için bu teoremin anlamı $p \cdot q = r \cdot s$'dir.



Şimdi, $\overline{AB}$ çaplı bir çemberi ve buna dik $\overline{CD}$ kirişini düşünelim.



Bu sefer kesişen iki kirişin parçalarının çarpımı bize şunu verir: $(c\text{-}b)\ (c+b) = a^2$.

O zaman $c^2 - b^2 = a^2$ olur ve bu nedenle $a^2 + b^2 = c^2$'dir. Pisagor teoremi tekrar kanıtlanmıştır. Onun yayınlanmasından sonra daha pek çok ispat olsa da, 370 ispatın güzel bir derlenmesi 1940'da Elisha S. Loomis tarafından yayınlanan The *Pythagorean Proposition* adlı kitaptır ve bu daha sonra National Council of Teachers of Mathematics tarafından 1968'de tekrar yayınlanmıştır.

5.18 Pisagor Teoremini Katlamak

Öğrencilerin Pisagor teoremini kanıtlamak için yaptığı o mücadelelerden sonra, düşünün ki bu ünlü teoremi sadece kâğıt katlayarak ispatlıyoruz. İlk düşünceniz herhalde "niçin ho-

cam bana okuldayken bunları göstermedi?" olacaktır. Güzel bir soru. Bu belki de, çoğu yetişkinin niçin, matematiğin güzel bir şey olduğu ve içinde müthiş zevkler taşıdığı konusunda ikna edilmeleri gerektiğinin sebeplerinden de birisidir.

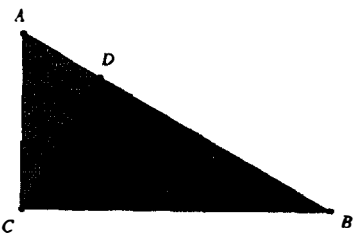
Pisagor teoremi şudur:

Bir dik üçgenin kenarlarının karelerinin toplamı (*) *bu dik üçgenin hipotenüsünün karesinin toplamına eşittir.*

ve şunu ortaya atıyoruz:

Bir dik üçgenin kenarlarındaki benzer çokgenlerin alanlarının toplamı, bu dik üçgenin hipotenüsünün üzerindeki çokgenin alanına eşittir.

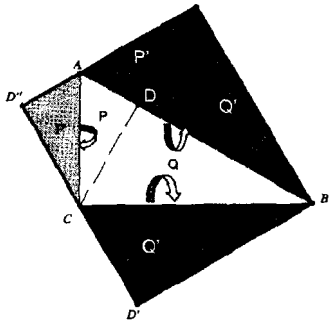
$\overline{CD}$ yüksekliği olan aşağıdaki üçgene bakınız.



Dikkat ediniz ki, $\Delta ADC \sim \Delta CDB \sim \Delta ACB$'dir. Yukarıdaki şekilde, ΔADC ve ΔCDB (sırasıyla, $\overline{AC}$ ve $\overline{CB}$ üzerinden) ΔACB üzerine katlanmışlardır. Böylece açıktır ki; alan ΔADC + alan ΔCDB = alanΔACB'dir. Eğer katlanmış üçgenleri geri açarsak (kendi üzerine katlanmış ΔACB'yi de katarak), şunu elde ederiz: bu bize benzer çokgenlerle ilgili (burada üçgenler) Pisagor teoreminin uzantısını gösterir: Bir dik üçgenin kenarlarındaki benzer çokgenlerin alanlarının toplamı, bu dik üçgenin hipotenüsünün üzerindeki çokgenin alanına eşittir.

(*) Burada karelerin alanlarından bahsediyoruz; ilerde de dik üçgenlerin alanlarından bahsedeceğiz.

Bu özünde kâğıt katlama ile Pisagor teoremini "kanıtlar!" Aşağı bakınız.



5.19 Başkan James A. Garfield'ın Matematiğe Katkıları

Şu ünlü soruyu sorarak başlayalım: Şu üç adamın ortak noktası nedir: Pisagor, Öklid ve James A. Garfield (1831-1881), Amerika Birleşik Devletleri'nin yirminci başkanı.

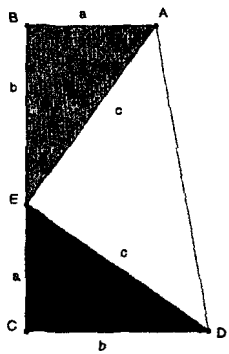
Birkaç dakikalık şaşkınlıktan sonra, merakınızı bu üç adamın da Pisagor teoremini ispatladığını söyleyerek gidereceğiz. İlk iki adamın bunu yapması pek de büyük bir sürpriz değil; ama ya Garfield? O bir matematikçi değildi. Matematik eğitimi almadı bile. Aslında, onun geometri çalışmaları Pisagor teoreminin ispatını yayınlamadan yirmi beş yıl önce başlamıştı bu eğitimde yalnızdı ve bu eğitim resmi değildi.(*)

Temsilciler Meclisi'nin üyesiyken temel matematikle "oynamayı" seven Garfield, bu teoremin hoş bir ispatını buldu. Daha sonra bu, 7 Mart 1876'da geometri dersi vermeye gittiği Dartmouth Koleji'ndeki iki profesör tarafından teşvik edilmesiyle *New England Journal of Education*'da yayınlandı. Metin şöyle başlar:

(*) 1851 ekiminde günlüğüne şunları yazmıştır: "Bugün bir hoca ya da sınıf olmadan geometri çalışmaya başladım."

Ohio Kongre üyesi General James A. Garfield'le yapılan kişisel bir röportajda bize pons asinorum'un(*) aşağıdaki ispatı gösterilmiştir ki o buna bazı matematiksel eğlenceler ve diğer üyelerle yaptığı tartışmalar sırasında rastlamıştır. Bunu daha önce gördüğümüzü hatırlamıyoruz ve parti ayrımı olmaksızın her iki meclisten üyeleri de bir araya toplayacağını düşünüyoruz.

Garfield'ın ispatı aslında oldukça basittir ve bu nedenle de güzeldir. Güzellik genellikle basitliktedir. İspatımıza iki dik benzer dik üçgen ($\Delta ABE \cong \Delta DCE$) çizerek başlıyoruz; öyle ki, aşağıdaki şekilde de gösterildiği gibi B,C ve E noktaları aynı doğru üzerindedir ve daha sonra bir yamuk oluşturuyoruz. Dikkat ediniz ki, $m\angle AEB + m\angle CED = 90°$ olduğundan $m\angle AED = 90°$'dir ve bu ΔAED'yi bir dik üçgen yapar.



Yamuğun alanı = $2 \div 1$ (tabanların toplamı) (yükseklik)
$= 2 \div 1(a + b)\ (a + b)$
$= 2 \div 1\ a^2 + ab + 2 \div 1\ b^2$

Üç dik üçgenin alanı (bu aynı zamanda yamuğun alanıdır):

(*) Bu bana yanlış bir referans gibi geliyor; çünkü biz, bir ikizkenar üçgenin taban açılarının benzer olduğunun ispatını pons asinorum yani "aptallar köprüsü" olarak düşünürüz.

$= 2 \div 1\ ab + 2 \div 1\ ab + 2 \div 1\ c^2$

$= ab + 2 \div 1\ c^2$

Şimdi yamuk için olan alanları eşitliyoruz.

$2 \div 1\ a^2 + ab + 2 \div 1\ b^2 = ab + 2 \div 1\ c^2$

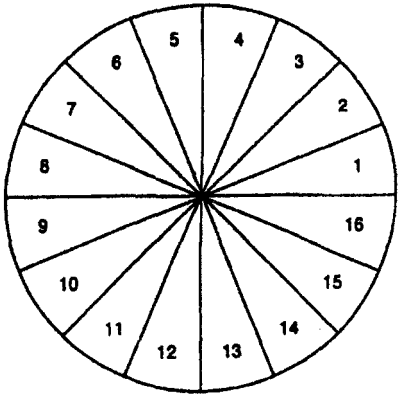
$2 \div 1\ a^2 + 2 \div 1\ b^2 = 2 \div 1\ c^2$ ki bu da bildiğimiz $a^2 + b^2 = c^2$ denklemidir ve *Pisagor teoremi* olarak bilinir.

Pisagor teoreminin bugün bilinen dört yüzden fazla ispatı vardır. Bazıları oldukça akıllıcadır; bazıları bayağı zorlayıcıdır. Ne var ki hiçbirisi trigonometriyi kullanamaz. Bu neden böyledir? Pisagor teoreminin trigonometriyi kullanarak hiçbir ispatı yapılamaz; çünkü trigonometrinin kendisi Pisagor teoremine dayalıdır (ya da bağlıdır). Bu nedenle, trigonometri kullanarak onun dayandığı teoremi kanıtlamaya çalışmak döngüsel bir uslamlama sürecine girmek demektir. Bu en ünlü teoremin bir başka ispatını bulmaya çalışacak mısınız?

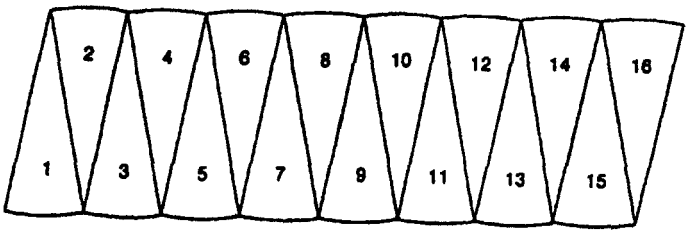
5.20 Bir Dairenin Alanı Nedir?

Size, bir dairenin alanının $A = \pi r^2$ formülüyle bulunduğu "söylendi." Büyük bir ihtimalle bu formülün nereden gelmiş olabileceğini ya da bunun diğer kavramlarla olan ilişkisini keşfetmeye pek fırsatınız olmamıştır. Bunu yapmak çok eğlenceli ve aynı zamanda öğrenilmiş kavramlardan yenilerine ulaşma bakımından da oldukça öğreticidir. Bir paralelkenarın alanının bulunması formülünü hatırlayın (yani, onun yüksekliği ile tabanının bölünüyoruz). Bu formülle donanmış olarak size, dairenin alanı formülünün güzel bir doğrulamasını vereceğiz.

Bir kartona uygun boyutta bir daire çizerek başlıyoruz. Daireyi 16 parçaya bölün. Bu, her parçanın açısını 22,5 derece olarak belirleyerek ya da ilk önce onu ikiye, sonra dörde, sonra sekize vb. bölerek de yapılabilir.



Yukarıda gösterilen bu bölümler tek tek alınmalı ve aşağıda gösterilen şekilde yan yana dizilmelidir.



Bu yerleştirme bize gösteriyor ki, bir parallelkenara "yakınsayan" bir şekle sahibiz. Yani, daireye daha fazla parçaya bölersek, elimizde, kenarları bozan yaylar dışında bir paralelkenara gittikçe daha çok benzeyen bir şekil olacak. Onu bir paralelkenar varsayalım. Bu durumda tabanın uzunluğu $1 \div 2C$ olacak burada $C = 2\pi r$'dir (C çevre ve r yarıçaptır). Paralelkenarın alanı onun yüksekliğinin (burada r) tabanıyla çarpımıdır. Bu nedenle, paralelkenarın alanı = $(1 \div 2C)(r) = 2 \div 1\ (2\pi r)\ (r) = \pi r^2$'dir ki bu bir dairenin alanı için en çok kullanılan formüldür.

5.21 İki Üçgenin Eşsiz Bir Yerleşimi

Okulda öğrendiğimiz geometrinin çoğu şekillerin yerleştirilmesine dayanmaz. Yani, onlar bir düzlemde (bir kâğıt üzerinde) herhangi bir yere yerleştirilebilirler. Genellikle, diğer şekillere göre nereye yerleştirildikleri pek önemsenmez. Ne var ki, inceleyeceğimiz çok önemli bir konum bağıntısı vardır. Aslında bu bağıntı, 1648 yılında Gérard Desargues (1591-1661) tarafından keşfedilen izdüşümsel geometrinin temelini oluşturur.

Şimdi iki üçgeni düşüneceğiz; "karşılıklı tepe noktaları" –aynı harfle isimlendireceğiz– karşılıklı kenarlarını belirleyecek. Bunu her zaman akılda tutmakta fayda var. Bu iki üçgen çok spesifik bir şekilde konumlandırılacaklar ve onların şekilleriyle (ya da görece şekilleriyle) ilgilenmeyeceğiz. Bu, lise geometri çalışmalarında kullanılan düşüncelerden oldukça farklı olacaktır.

Herhangi iki üçgeni öyle bir konuma yerleştireceğiz ki, bu bize üçgenlerin her bir köşesini birleştiren doğruların bir noktada kesişmesini sağlayacak. Bu yetmezmiş gibi, bu gerçekleştirildiğinde karşılıklı kenarların üç uzantısı aynı doğru üzerine gelmektedir. Şimdi buna daha formel bir açıdan bakalım.

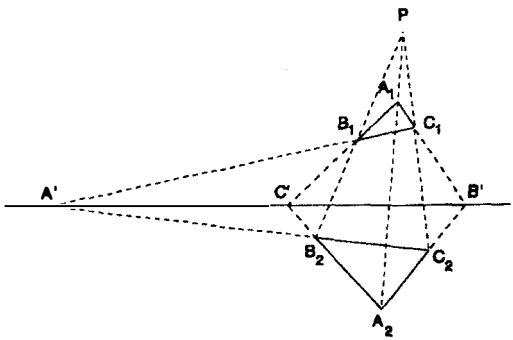
> Desargues'nin teoremi: Eğer $\Delta A_1B_1C_1$ ve $\Delta A_2B_2C_2$ üçgenleri karşılıkları köşeleri birleştiren doğruları, yani, $\overleftrightarrow{A_1A_2}$, $\overleftrightarrow{B_1B_2}$ ve $\overleftrightarrow{C_1C_2}$, *tek bir noktada kesişecek şekilde konumlandırılırlarsa, karşılıklı kenarların uzantıları üç kolineer noktada kesişir.*

Şekilde, karşılıkları köşeleri birleştiren doğrular, yani, $\overleftrightarrow{A_1A_2}$, $\overleftrightarrow{B_1B_2}$ ve $\overleftrightarrow{C_1C_2}$, P noktasında birleşirler.

Karşılıklı kenarların uzantıları aşağıdaki gibi, A', B' ve C' noktalarında kesişirler:

$\overleftrightarrow{B_2C_2}$ ve $\overleftrightarrow{B_1C_1}$ doğruları A' noktasında

$\overleftrightarrow{A_2C_2}$ ve $\overleftrightarrow{A_1C_1}$ doğruları B' noktasında
$\overleftrightarrow{B_2A_2}$ ve $\overleftrightarrow{B_1A_1}$ doğruları C' noktasında



Bu gerçekten dikkate değerdir; aslında bunu daha da inanılmaz yapabiliriz; çünkü teoremin ters hali de doğrudur. Yani, Eğer $\Delta A_1B_1C_1$ ve $\Delta A_2B_2C_2$ üçgenleri karşılıklı kenarların uzantıları üç kolineer noktada kesişecek şekilde konumlandırılırlarsa karşılıkları köşeleri birleştiren doğrular, yani, $\overleftrightarrow{A_1A_2}$, $\overleftrightarrow{B_1B_2}$ ve $\overleftrightarrow{C_1C_2}$, tek bir noktada kesişir. Bu teoremi daha fazla incelemek isteyen öğretmenler için şunu söyleyebiliriz. Bu teorem self-dualdir. Yani, teoremin dual hali kendisinin tersidir.(*)

5.22 Eşkenar Üçgende Bir Değişmez Uzaklık Noktası

Eşkenar üçgenler en simetrik üçgenlerdir. Açı ortaylar, yükseklikler ve kenar ortayların hepsi aynı doğru parçalarıdır. Başka hiçbir üçgen bu özelliği göstermez. Bunların kesişim noktaları çevrel ve iç teğet çemberin merkezidir ve bu da eşsiz bir özelliktir. Bunlar çok iyi bilinen özellikleridir. Çok iyi

(*) Bu teoremin bir ispatı için bkz: Alfred S. Posamentier, *Advanced Euclidean Geometry: Excursions for Secondary Teachers and Students* (Emeryville, Calif: Key Collage Publications, 2002).

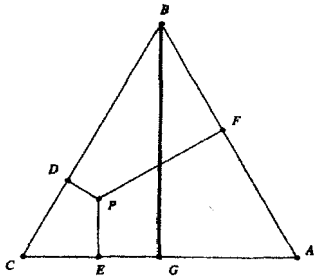
bilinmeyen özelliği ise, bir eşkenar üçgen içinde seçilen bir noktanın kenarlara dik olan uzaklıklarının toplamının sabit olduğudur. Aslında, bu uzunluk üçgenin yüksekliğine eşittir.

Bunu kanıtlamanın zarif (ve aynı zamanda karmaşık) bir yolu "uç" bir nokta almaktır. Alınacak "herhangi bir" nokta köşe noktası olursa bu kolayca gösterilebilir. Her iki kenara olan uzaklık sıfırdır; geri kalan kenara olan uzaklık toplamımız olur ki, bu da yükseklikliktir.

Bunu daha klasik bir yolla da gösterebiliriz.

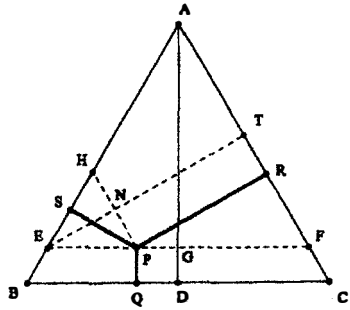
Bir eşkenar üçgen içinde s*eçilen bir noktanın kenarlara dik olan uzaklıklarının toplamının sabit olduğunu (üçgenin yüksekliğine eşit olduğunu) kanıtlamak istiyoruz.*

İşte size yapmamız gerekeni gösteren bir şekil.



Bu ilginç özelliğin iki ispatı burada verilmiştir. İlk baştaki her dik parçayı yüksekliğin bir parçasıyla karşılaştırır ve diğer alan karşılaştırmalarıyla ilgilidir.

İspat 1: Aşağıdaki ΔABC eşkenar üçgeninde, $\overline{PR} \perp \overline{AC}$, $\overline{PQ} \perp \overline{BC}$, $\overline{PS} \perp \overline{AB}$ ve $\overline{AD} \perp \overline{BC}$'dir. P'den $\overline{AB}$'ye paralel bir çizgi çizelim; $\overline{AD}$, $\overline{AB}$ ve $\overline{AC}$ ile G, E ve F'de karşılaşsın sırasıyla.



$PGDQ$ bir dikdörtgen olduğundan, $PQ = GD$. $\overline{ET} \perp \overline{AC}$ çizin.

ΔAEF bir eşkenar olduğundan, $\overline{AG} \cong \overline{ET}$'dir (bir eşkenar üçgenin tüm yükseklikleri eşittir).

ET ile N'de buluşan $\overline{PH} \parallel \overline{AC}$'yi çizin.

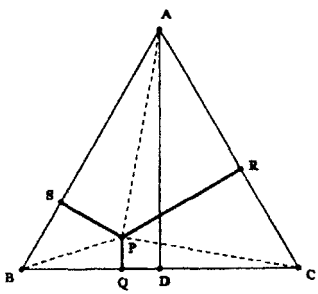
ΔEHP eşkenar olduğundan, $\overline{PS}$ ve $\overline{EN}$ yükseklikleri eştir.

Bu nedenle gösterdik ki, $PS + PR = ET = AG$.

$PQ = GD$ ve $PS + PR + PQ = AG + GD = AD$ olduğundan, bu verili bir üçgen için bulunan sabittir.

İspat 2: Aşağıdaki ΔABC eşkenar üçgeninde, $\overline{PR} \perp \overline{AC}$, $\overline{PQ} \perp \overline{BC}$, $PS \perp \overline{AB}$ ve $\overline{AD} \perp \overline{BC}$'dir.

$\overline{PA}$, $\overline{PB}$ ve $\overline{PC}$'yi aşağıdaki gibi çizin.



Alan ΔABC = alan ΔAPB + alan ΔBPC + alan ΔCPA

$= 2 \div 1\ AB\ PS + 2 \div 1\ BC\ PQ + 2 \div 1\ AC\ PR$

$AB = BC = AC$ olduğundan alan $\Delta ABC = 2 \div 1\ BC\ [PS + PQ + PR]$.

Ne var ki $\Delta ABC = 2 \div 1\ BC\ AD$.
Bu nedenle $PS + PQ + PR = AD$ ve bu verili bir üçgen için bulunan sabittir.

Biraz önce yaptığımız ispata bakınız; bir eşkenar üçgen içinde seçilen bir noktanın kenarlara olan dik olan uzaklıklarının toplamının sabit olduğunu gösterdik. Varsayalım ki, seçtiğimiz nokta üçgenin bir kenarının üzerinde; aynı özellik geçerli olur muydu? İşte size bu yeni kavramı daha da genişletmek için bir fırsat.

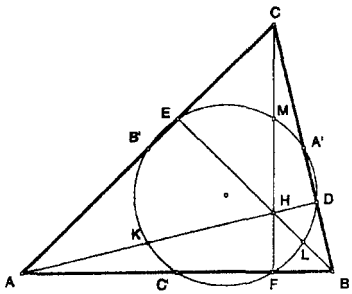
5.23 Dokuz Nokta Çemberi

Geometrideki en zevkli şeylerden birisi kuşkusuz, gerçekte birbiriyle ilişkisiz görünen noktaların ilişkilerini göstermektir. Çok önemli bir kavramla başlıyoruz; aynı doğru üzerinde olmayan üç nokta bir çember belirler. Yani, birisi aynı doğru üzerinde olmayan üç nokta seçtiğinde bunlar, bu üç noktayı içine alan tek bir çember belirler. Aynı çemberde bir dördüncü nokta ortaya çıkarsa bu oldukça dikkate değerdir. Düşünün ki, dokuz noktanın da aynı çember üzerinde olduğunu gösteriyoruz. İşte bu olağanüstüdür! Verili herhangi bir üçgen için bu noktalar şunlardır:

– Kenarların orta noktaları,
– Yüksekliklerin ayakları(*) ve
– Ortasantr(**) ile köşeler arasındaki doğru parçalarının orta noktaları.

Bunların aynı çember üzerinde olma gibi şaşırtıcı bir ilişkileri vardır. Bu çember, üçgenin *dokuz nokta çemberi* olarak adlandırılır.

(*) Bir yüksekliğin ayakları, onun kenar ile kesiştiği noktalardır.
(**) Ortasantr, bir üçgenin yüksekliklerinin kesişme noktasıdır.



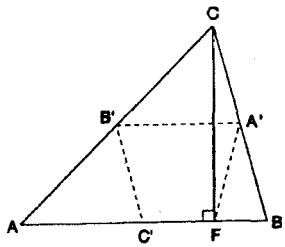
Şekil 1

1765'de, Leonhard Euler, bu noktaların altısının, kenarların orta noktaları ve yüksekliklerin ayaklarının aynı çember üzerinde olduğunu ispatladı. Ama ancak 1820'de, Charles Julien Brianchon ve Jean Victor Poncelet tarafından konuyla ilgili bir makale(*) yayınlandığında geri kalan noktaların da (ortasantr ile köşeler arasındaki doğru parçalarının orta noktaları) aynı çember üzerinde olduğu gösterilebildi. Bu makale teoremin ilk tam ispatıdır ve teorem "dokuz nokta çemberi" adını ilk kez bu zaman almıştır.

Dokuz nokta teoremi: *Herhangi bir üçgende, kenarların orta noktaları, yüksekliklerin ayakları ve ortasantr ile köşeler arasındaki doğru parçalarının orta noktaları tek bir çember üzerindedir.*

İspat: İspatla ilgili tartışmayı basitleştirmek için her parçasını başka bir şekil üzerinde göstereceğiz. Şunu aklınızda tutunuz ki, şekil 2'den 5'e kadar olan çizimler 1. şeklin bir yönünü oluşturmaktadır. Yani, aşağıdaki ilerleme yavaş yavaş beşinci şekle doğru yetkinleşir.

(*) *Rechershes sur la determination d'une hyperbole équilatéau moyen de quartes conditions données* (Paris, 1820).

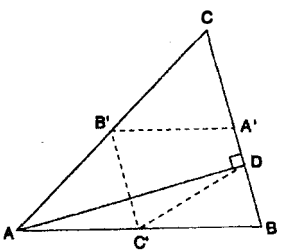


Şekil 2

Yukarıdaki şekilde, A' , B' ve C' noktaları, ΔABC üçgeninin üç kenarının orta noktalarıdır ve karşılarında bulunan köşelerin adlarını almışlardır. $\overline{CF}$ ΔABC'nin bir yüksekliğidir. $\overline{A'B'}$ ΔABC'nin orta çizgisi olduğundan $\overline{A'B'} \parallel \overline{AB}$'dir. Bu nedenle $A'B'C'F'$ dört kenarlısı bir yamuktur. $B'C'$ de ΔABC'nin orta çizgisidir; öyle ki, $B'C' = 2 \div 1\ BC$'dir. $A'F$ ΔBCF dik üçgeninin kenar ortayı olduğundan $\overline{A'F} = 2 \div 1BC$. Bu nedenle $B'C' = A'F'$dir ve $A'B'C'F'$ yamuğu ikizkenardır.

Hatırlayacağın gibi, bir dörtkenarlının karşıt açıları bütünler ise,* tıpkı ikizkenar yamukta olduğu gibi, dörtkenarlı çemberseldir.(**) Bu nedenle $A'B'C'F'$ dörtkenarlısı çemberseldir.

Şimdiye kadar, dokuz noktanın dördünü bir çember üzerine yerleştirdik.



Şekil 3

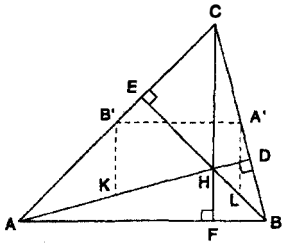
Karışıklığı önlemek için ΔABC üçgeninin (yukarıda) ve $\overline{AD}$ yüksekliğini tekrar çiziyoruz. Daha önceki aynı argümanı kullanarak $A'B'C'D'$ dörtkenarlısının bir ikizkenar yamuk ve

(*) İki açının toplamı 180 derece ise bu açılar bütünlerdir.

(**) Çembersel bir dörtkenarlı, dört köşesi de çember üzerinde olan bir dörtkenarlıdır. Bu ayrıca, çember üzerine çizilmiş dörtkenarlı olarak da adlandırılır.

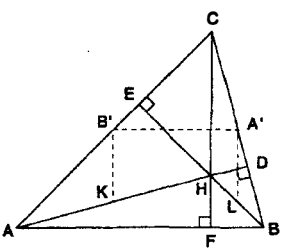
bu nedenle çembersel olduğunu buluyoruz. Şimdiye kadar, dokuz noktanın beşini bir çember üzerine yerleştirdik (yani, A', B', C', D ve F).

$\overline{BE}$ yüksekliği için (aşağıda) aynı argümanı tekrarlayarak A', B' ve C' noktaları gibi D, E ve F noktalarının da aynı çember üzerinde olduğunu söyleyebiliriz. Bu altı nokta, Euler'in bu şekille elde ettiği altı noktayla aynı.



Şekil 4

H ortasantarı (yüksekliklerin kesişim noktası) ile, M $\overline{CH'}$nin (yukarıdaki şekle bakınız.) orta noktasıdır. Bu nedenle $\Delta ACH'$nin orta noktası olan $\overline{B'M}$, $\overline{AH'}$ye ya da $\overline{AD}$ yüksekliğine paraleldir. $\overline{B'C'}$ ΔABC üçgeninin orta çizgisi olduğundan $\overline{B'C'} \parallel \overline{BC}$'dir. Bu nedenle, $\angle ADC$ dik açı olduğundan, $\angle MB'C'$ de bir dik açıdır. Böylece $MB'C'F$ bir çembersel dörtkenarlıdır (karşıt açılar bütünlerdir). Bu, M noktasını B', C' ve F noktaları tarafından belirlenen çamberin üzerine yerleştirir. Şimdi yedi noktamız var.



Şekil 5

Bu prosedürü, $\overline{BH'}$nin (yukarıda) orta noktasıyla, L noktası

ile tekrarlıyoruz. Daha önce olduğu gibi, $\angle B'EL$ dik açı olduğundan, $\angle B'A'L$ de dik açıdır. Bu nedenle, B', E, A' ve L noktaları konsikliktir (karşıt açılar bütünlerdir). Şimdi L noktasını da elde ettiğimize göre çemberimizde sekiz nokta vardır.

Çemberimizdeki son noktanın da yerini belirlemek için, $\overleftrightarrow{AH}$'nin orta noktasını, K noktası olarak düşüneceğiz. Daha önce de yaptığımız gibi, $\angle A'DK$'ye benzer olarak $\angle A'B'K$'nin de bir dik açı olduğunu buluyoruz. Bu nedenle, $A'DKB'$ dört kenarlısı çemberseldir ve K noktası, tıpkı B', A' ve D gibi aynı çember üzerindedir. Böylece dokuz spesifik noktanın aynı çember üzerinde olduğunu gösterdik. Bunları hafife almayın; gerçekten mucizevilerdir.

5.24 Simson Değişmezi

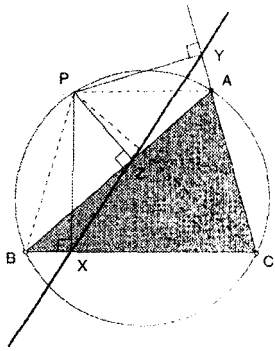
Matematik tarihindeki en büyük adaletsizliklerden bir tanesi, ilk olarak Thomas Leybourn'un *Mathematical Repository*'sinde (1799-1800) William Wallace tarafından yayımlanan teoremin, oldukça yanlış bir şekilde, Öklid'in *Elemanlarının* ünlü bir İngiliz çevirmeni olan Robert Simson'a atfedilmesidir. Bizde bu tarihi hata ile tutarlı olmak adına onu yanlış bir şekilde Simson teoremi olarak adlandıracağız.

Bu teoremin güzelliği onun basitliğindedir. Varsayalım ki, köşeleri bir çemberin üzerinde olan bir üçgen çizdiniz (bu her zaman mümkündür; çünkü üç tane aynı doğru üzerinde olamayan nokta bir çember belirler) ve çemberde üçgenin köşeleri olmayan bir nokta aldınız. Bu noktadan kenarların her birine bir dikme indirin. Bu dikmelerin kenarlarla kesiştiği noktalar (aşağıdaki şekilde X, Y ve Z) her zaman kolineerdir (yani her zaman aynı doğru üzerinde bulunurlar). Bu üç noktanın belirlediği nokta sıklıkla Simson doğrusu olarak adlandırılır.

Bu, daha biçimsel olarak şöyle ifade edilebilir:

Simson teoremi: *Bir üçgenin çevrel çemberindeki herhangi bir noktadan üçgenin kenarlarına indirilen dikmelerin ayakları kolineerdir.*

Aşağıdaki şekilde P noktası ΔABC'nin çevrel çemberi üzerindedir. Y'de $\overleftrightarrow{PY} \perp \overleftrightarrow{AC}$, Z'de $\overleftrightarrow{PZ} \perp \overleftrightarrow{AB}$ ve X'te $\overleftrightarrow{PX} \perp \overleftrightarrow{BC}$'dir. Simson (yani Wallace) teoremine göre X, Y ve Z noktaları kolineerdir. Bu doğru bazen Simson doğrusu olarak da adlandırılır.



Bu teoremin ispatının sıra dışı olan doğası, onun burada size sunulmasını sağlamıştır. Takip etmeye çalışın. Verdiğiniz emeğe değebilir. En önemlisi, teoremin ifade ettiği şeyi anlamak için zaman ayır.

İspat(*): $\angle PYA$ $\angle PZA$'nın bütünleri olduğundan $PZAY$ dörtkenarlısı çemberseldir.(**) PA, PB ve PC'yi çizin.

Bu nedenle $m\angle PYZ = m\angle PAZ$ (I)

Benzer şekilde, $\angle PYC$ $\angle PXC$'nin bütünleri olduğundan $PXCY$ dörtkenarlısı çemberseldir,

(*) Simson teoreminin diğer ispatları için bkz: A. S. Posamentier ve C. T. Salkind, *Challenging Problems in Geometry* (New York: Dover, 1996), syf 43-45.
(**) Eğer bir dörtkenarlının karşılıklı açıları bütünler ise (yani, toplamları 180 derece ise), bu dörtkenarlı çemberseldir (yani, dört köşesi de bir çember üzerindedir).

ve $m\angle PYX = m\angle PCB$ (II)

Ne var ki, PACB dörtkenarlısı da çemberseldir; çünkü verilen çevrel çemberin içindedir ve bu nedenle

ve $m\angle PYX = m\angle PCB$ (III)

(I), (II) ve (III)'den $m\angle PYZ = m\angle PYX$'dir ve böylece X, Y ve Z kolineerdir.

Bu değişmez, Geometer's Sketchpad tarafından güzel bir şekilde ispatlanabilir. Orada bir şekil çizip ve çemberin üzerinde noktayı istediğiniz gibi hareket ettirerek P noktasının her bir konumunda aynı doğru üzerinde olma özelliğinin nasıl korunduğunu gözlemleyebilirisiniz.

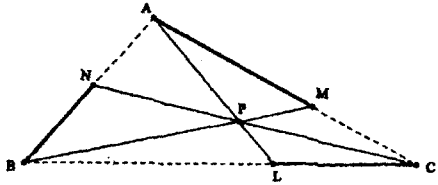
5.25 Ceva'nın Oldukça Yararlı Bağıntısı

Lise geometrisinde en çok atlanan konulardan birisi aynı noktada birleşme kavramıdır. Birçok durumda bu sorgusuz sualsiz kabul edilir. Sıklıkla, bir üçgenin yüksekliklerinin tek bir noktada rastlaştığını varsayarız; yani, onların ortak bir kesişme noktası vardır. Benzer şekilde, sorgulamadan bir üçgenin kenar ortaylarının ya da açı ortaylarının da bir noktada kesiştiğini düşünürüz. Doğruların bir noktada kesişmeleri konusu, temel geometri derslerinde görüldüklerinden çok daha fazla ilgiyi hak eder. Bu varsayımları sağlam bir temele oturtmak için, oldukça yararlı bir bağıntıyı kanıtlayabiliriz. Bu, ilk olarak İtalyan matematikçi Giovanni Ceva (1647-1734) tarafından yayınlanan(*) ve şimdi onun adını taşıyan ünlü bir teoremin yardımıyla yapılabilir. Bu bağıntı oldukça basittir ve çok zor bir konuyu –aynı noktada kesişme – çok daha az karmaşık hale getirebilir.

Basit şekilde söylersek, Ceva tarafından ortaya atılan ba-

(*) De lineis se invicem secantibus constructio (Milan, 1678).

ğıntıya göre, eğer elinizde bir üçgenin tepe noktasını karşı kenardaki herhangi bir nokta ile birleştiren, aynı noktada kesişen üç doğru parçası varsa (aşağıdaki şekilde, $\overline{AL}$, $\overline{BM}$ ve $\overline{CN}$), (bunlar tarafından oluşturulan) doğru parçaları gruplarının çarpımları birbirine eşittir ve bunun tersi de doğrudur. Yani, son durum bize şunu söyler; eğer doğru parçaları gruplarının çarpımları birbirine eşitse, üçgenlerin tepe noktalarından geçip bu doğru parçalarını belirleyen çizgiler tek bir noktada kesişir. Şekle bakarak bunu görebilirsiniz; dikkat edin; üçgenin kenarları boyunca doğru parçaları gruplarının çarpımları birbirine eşittir: $AN \cdot BL \cdot CM = NB \cdot LC \cdot$ MA'dir; çünkü $\overline{AL}$, $\overline{BM}$ ve $\overline{CN}$ aynı noktada kesişir.

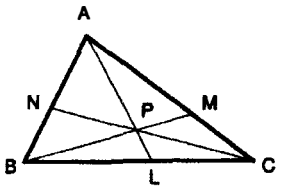


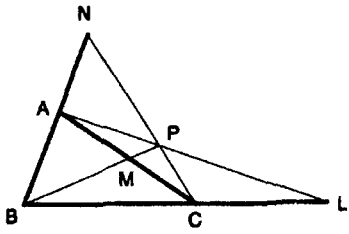
Benzer şekilde, eğer $AN \cdot BL \cdot CM = NB \cdot LC \cdot MA$ ise, o zaman AL, BM ve CN aynı noktada kesişir.

Bu, daha formel bir şekilde şöyle ifade edilebilir:

Ceva teoremi:(*) ΔABC *üçgeninin A, B ve C köşelerini içeren ve karşı kenarlarla sırasıyla L, M ve N noktalarında kesişen üç doğru parçası tek bir noktada kesişir; ancak ve ancak* $AN / NB \cdot BL / LC \cdot CM / MA = 1$ *ya da* $AN \cdot BL \cdot CM = NB \cdot LC \cdot MA$.

(*) Ceva teoreminin ispatı için bkz: Alfred S. Posamentier, *Advanced Euclidean Geometry: Excursions for Secondary Teachers and Students*, syf. 27-31.





Köşelerden çıkan doğru parçalarının kenarlarla kesiştiği ve bir ortak noktada buluştuğu iki olası durum söz konusudur. Bu durumlar, yukarıdaki şekillerde resmedilmişlerdir. İlk önce sağ taraftakini inceleyerek başlamak, teoremi doğrulamak açısından daha yararlıdır.

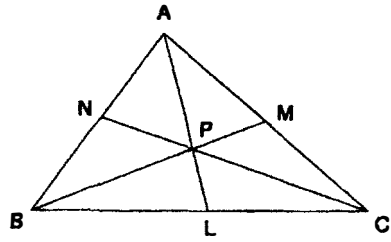
Bu teoremi kabul ettiğimize göre, bunu kullanabiliriz. Şimdi gelin daha önce bahsettiğimiz bağıntılar nasıl da kolay bir şekilde ispatlanabildiğini görelim.

Bir üçgenin kenarortaylarının aynı noktada kesiştiğinin ispatlanması problemiyle başlayacağız. Normal olarak (yani, Ceva teoreminin yardımı olmaksızın) bunun ispatını yapmak oldukça zordur. Bundan dolayı genellikle bu ispat lise müfredatında bulunmaz. Oysa ki bakın ne kadar da kolay bunu ispatlamak.

İspat: ΔABC üçgeninde $\overline{AL}$, $\overline{BM}$ ve $\overline{CN}$ kenarortaylardır. Bundan dolayı, $AN = NB$, $BL = LC$ ve $CM = MA$'dır. Bu eşitliklerin çarpılması bize şunu verir:

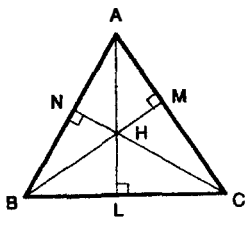
$AN \cdot BL \cdot CM = NB \cdot LC \cdot MA$ ya da $AN/NB \cdot BL \div LC \cdot CM \div MA = 1$.

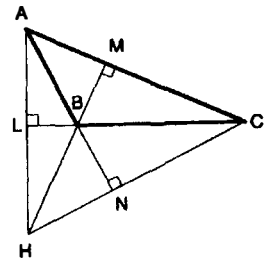
Böylece, Ceva teoremini uygulayarak görürüz ki, $\overline{AL}$, $\overline{BM}$ ve $\overline{CN}$ aynı noktada kesişir.



Aynı şekilde, bir üçgenin yüksekliklerinin kesişmesiyle ilgili (temel geometri bağlamında sunulan) geleneksel ispatı, Ceva teoremi kullanılarak yapılanla karşılaştırmak da yararlı olacaktır.

Ceva teoremini kullanarak ispatlayacağız ki, bir üçgenin yükseklikleri tek bir noktada kesişir.





İspat: ΔABC üçgeninde $\overline{AL}$, $\overline{BM}$ ve $\overline{CN}$ yüksekliklerdir. Bu ispatı yukarıdaki her iki şekle bakarak da takip edebilirsiniz; çünkü aynı ispat hem dar açılı hem de geniş açılı üçgen için geçerlidir.

$\Delta ANC \sim \Delta AMB$; böylece $AN/MA = AC/AB$ (I)

$\Delta BLA \sim \Delta BNC$; böylece $BL/NB = AB/BC$ (II)

$\Delta CMB \sim \Delta CLA$; böylece $CM/LC = BC/AC$ (III)

(I), (II) ve (III)'ün çarpımı bize şunu verir:

$AN \div MA \bullet BL \div NB \bullet CM \div LC = AC \div AB \bullet AB \div BC \bullet BC \div AC = 1.$

Bu yüksekliklerin tek bir noktada kesiştiğini söyler (Ceva teoremi aracılığı ile).

Lise'de geometri derslerini alırken bu çok kullanışlı teoremi bilseydiniz hoş olmaz mıydı? Daha önce sadece kabul ettiğimiz şeylerin ne kadar da kolay ispatlanamayabiliris. dikkat ediniz.

5.26 Aşikâr Bir Tek Noktada Kesişme

Üçgen içindeki büyüleyici bir tek noktada kesişme olgusu, ilk olarak Fransız matematikçi Joseph-Diaz Gergonne (1771-1859) tarafından ortaya konulmuştur. Gergonne'un matematik tarihinde ayrı bir yeri vardır; çünkü ilk olarak bir matematik dergisinin (1810), *Annales des mathématiques pures et appliqués* adlı derginin kurucusu olmuştur. Dergi 1832 yılına kadar aylık olarak yayınlanmış ve *Annales del Gergonne* olarak tanınmıştır. derginin yayın hayatı boyunca, Gergonne, çoğu geometri üzerine yaklaşık iki yüz makale yayımladı. Gergonne'un *Annales*'si izdüşümsel ve cebirsel geometrinin kurulmasında çok büyük bir rol oynamıştır; çünkü o, zamanının büyük beyinlerine fikirlerini bir araya getirme fırsatı vermiştir. Biz burada Gergonne'u aşağıda ifade edilecek olan basit bir teoremle hatırlayacağız.

Bir üçgen ve bunun içine çizilmiş bir çemberimizin olduğunu varsayalım. Üçgenin köşelerini çemberin teğet noktalarına(*) birleştiren doğrular tek bir noktada kesişir.

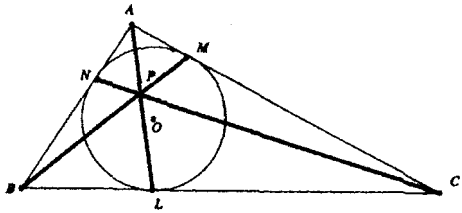
Bu üçgendeki doğru parçalarının aynı noktada kesişme durumunu ispatlamak için (bir önceki bölümdeki) Ceva teoremini kullanabiliriz.

(*) Bir doğrunun bir çember ile sadece bir noktada kesişmesi durumu.

Gergonne teoremi: *Bir üçgenin köşesini ve bu üçgen içine çizilmiş içteğet çemberin karşı kenardaki teğet noktasını birleştiren doğru parçaları aynı noktada kesişir. Bu kesişme noktası üçgenin Gergonne Noktası olarak bilinir.*

İspat: O çemberi, $\overline{AB}$, $\overline{AC}$ ve $\overline{BC}$ kenarlarına sırasıyla N, M ve L noktalarında teğettir. Öyleyse, $AN = AM$, $BL = BN$ ve $CM = CL$'dir. Bu eşitlikler şöyle yazılabilir:

$AN \div AM = 1$, $BL \div BN = 1$ ve $CM \div CL = 1$.



Bu üç kesri toplayarak şunu elde ederiz:

$AN \div AM \cdot BL \div BN \cdot CM \div CL = 1$

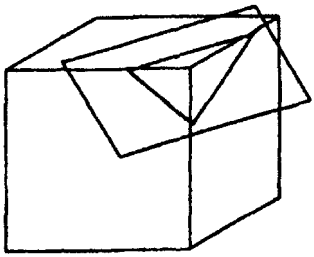
Bu nedenle, $AN/AM \cdot BL/BN \cdot CM/CL = 1$ Ceva teoreminin bir sonucu olduğundan (bölüm 5.25'e bakınız), $\overline{AL}$, $\overline{BM}$ ve $\overline{CN}$ aynı noktada kesişirler. Bu P noktası ΔABC'nin Gergonne Noktası'dır.

Derli toplu ve (görece) basit! Ne var ki yine de pek bilinmeyen bir olgu. Bu anlaması kolay bağıntılar geometriyi eğlenceli kılıyor, öyle değil mi?

5.27 Euler'in Çokyüzlüleri

Günlük koşuşturmamız içinde geometrik şekillere sıklıkla rastlarız. Ne var ki, içlerinde bulunan "gizli" kalıpları bulmak için onları analiz etmekle yormayız kendimizi. Bunlar oldukça aydınlatıcı olabilir. Bu tip kalıpları fark etmek çevrenizde-

ki dünyayı kavrayışınızı daha da derinleştirecektir. Leonhard Euler on sekizinci yüzyılda, çokyüzlülerin(*) köşeleri, yüzleri ve kenarları arasındaki nefis bir bağıntının varlığını keşfetti.



Siz de çeşitli çokyüzlüleri belirleyip, onların köşelerini (V), yüzlerini (F) ve kenarlarını (E) sayıp, bulgularınızı bir tabloya koyarak bir kalıbın olup olmadığına bakabilirsiniz.

Tüm bu şekiller için şu ilişkinin geçerli olduğunu göreceksiniz: $V + F = E + 2$.

Örneğin küpte bağıntı şu şekilde doğrudur: $8 + 6 = 12 + 2$.

Bir önceki şekilde, eğer biz çokyüzlünün içinden (yani burada küpün) bir üçyüzlü açısının tüm kenarlarını kesen bir düzlem geçirirsek, çokyüzlünün köşelerinden birini ondan ayırmış oluruz. Ama aynı zamanda, çokyüzlüye 1 yüz, 3 köşe ve 3 yeni kenar ekledik. Eğer V 2 artar, F 1 artar ve E 3 artarsa, $V - E + F$ değişmeden kalır.

Yani, $V + F = E + 2 = (8+2) + (6+1) = (12+3) + 2$.

Herhangi bir çokyüzlü açıyla aynı sonucu alabiliriz. Yeni çokyüzlü, aynı sayıda kenar ve köşeye sahip yeni bir yüz kazanacaktır. Bir köşe kaybedip bir yüz kazandığımızdan dolayı V-$E + F$ ifadesinde bir değişiklik olmayacaktır.

Euler'in formülünün bir dörtyüzlüye uygulandığını biliyoruz ("kesik" piramitte $V + F = E + 2$ doğrudur; $4 + 4 = 6 + 2$). Yukarıdaki argümandan şu çıkacaktır ki, bu, bir çokyüzlünün bir köşesini ortadan kaldıran bir düzlemin onun içinden belli bir defa geçirilmesiyle oluşturulmuş her şekle uygulanabilir. Ne var ki biz bunu bütün basit çokyüzlülere uygulamak istiyoruz. İspatta ihtiyacımız olan şey, $V - E + F$ ifadesi açısından tüm çokyüzlülerin dörtyüzlülere benzer olduğunu göster-

(*) Bir çokyüzlü katı bir cisimdir: dört ya da daha fazla çokgen yüzden meydana gelmiştir; öyle ki, her iki yüz kenarlar boyunca birleşir ve üç ya da daha fazla kenar köşelerde birleşir. Küp bir çokyüzlü örneğidir.

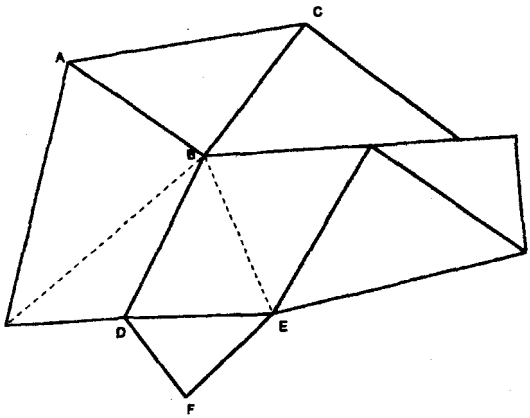
mektir. Bunu yapmak için matematiğin topoloji(*) olarak adlandırılan yeni bir dalını tartışmamız gerekecek.

Topoloji geometrinin çok geniş bir şeklidir. Euler'in teoreminin ispatı bir topoloji problemidir. Bir şekil, kesme ya da koparma dışında burma, küçültme, çekme ve bükme aracılığı ile başka bir şekle dönüştürülürse bu iki şekle topolojik olarak eş denilir. Donat ile çay fincanı topolojik olarak eştir. Donatın ortasındaki delik çay fincanının kulpunun içi haline dönüşür.

Topoloji lastik altlık geometrisi olarak adlandırılmıştır. Eğer bir çokyüzlünün bir yüzü çıkartılırsa, geri kalan şekil bir düzlemin bir bölgesine topolojik olarak eş olacaktır. Şekli bir düzlem üzerinde düz olacak kadar gerebiliriz. Ortaya çıkan şekil aynı biçim ya da büyüklükte olmayacaktır; ama onun sınırları korunacaktır. Kenarlar yeni çokgen bölgelerin kenarları olacaktır. Düz şekilde çokyüzlüde olduğu kadar köşe ve kenar olacaktır. Alınmış olan dışında çokyüzlünün her bir yüzü düzlemde bir çokgen bölgeye tekabül edecektir. Her çokgen köşegenler çizilerek üçgenlere ya da üçgensel bölgelere ayrılabilir. Bir köşegen çizildiğinde kenar sayısını bir arttırmış oluruz; ama aynı zamanda yüzlerin sayısı da bir artar. Böylece $V - E + F$ değeri değişmeden kalır.

Bölgenin dış sınırındaki üçgenler ya tıpkı aşağıdaki şekilde ΔABC'de olduğu gibi bölgenin sınırında 1 kenara ya da ΔDEF'de olduğu gibi sınırda 2 kenara sahip olacaktır. ΔABC gibi üçgenleri bir sınır kenarını ortadan kaldırarak yok edebiliriz. Şekilde bu $\overline{AC}$'dir. Bu yüzlerin ve kenarların sayısını 1 düşürür. Yine de, $V - E + \mathbf{F}$ değeri değişmeden kalır. Eğer ΔDEF gibi sınır üçgenlerini ortadan kaldırırsak kenarları 2, yüzleri 1 ve köşeleri 1 düşürürüz. Tekrar $V - E + F$ değeri değişmeden kalır. Bu işlem bir üçgen kalana kadar devam ettirilebilir.

(*) Topoloji, çekme ya'da eğme gibi çeşitli değişim durumlarında sabit (ya da değişmez) kalan geometrik biçimlerin incelenmesidir.



Tek bir üçgen 3 köşeye, 3 kenara ve 1 yüze sahiptir. Bu nedenle $V - E + F = 1$'dir. Sonuç olarak düzlem şekildeki $V - E + F = 1$ özelliği çokyüzlünün bozulmasıyla elde edilmiştir. Bir yüz ortadan kaldırıldığından çokyüzlü için şu sonuca varabiliriz:

$$V - E + F = 2$$

Bu işlem herhangi bir çokyüzlüye konveks olmasa bile uygulanabilir. Bunun niçin basit olmayan çok yüzlülere uygulanamayacağını görebiliyor musunuz?

Bir yüz çıkarıldıktan sonra bir çokyüzlüyü bir düzlem haline bozmaya alternatif bir yaklaşım "bir yüzü bir noktaya küçültmek" olarak adlandırılabilir. Bir yüz bir nokta ile yer değiştirilirse, yüzün n kenarı ve n noktası kaybedilir ve bir yüz kaybedilip bir nokta kazanılır (yüz ile yer değiştiren nokta). Bu yine $V - E + F$ değerini değiştirmez. Bu işlem 4 yüz kalana kadar devam ettirilebilir. O zaman herhangi bir çokyüzlü bir dörtyüzlü ile aynı $V - E + F$ değerine sahiptir. Bir dörtyüzlünün 4 yüzü, 4 köşesi ve 6 kenarı vardır. $4 - 6 + 4 = 2$.

İşte farklı bir geometri; gördüğünüz gibi o aynı zamanda yepyeni zevkler de sunuyor sizlere.

6

Matematiksel Paradokslar

Matematikte paradokslar ve yanlış mantıklar genellikle matematiğin bazı yasa ya da kurallarının ihlal edilmesinden ötürü meydana gelir. Bunlar kural ihlallerinin yanı sıra, bize eğlence malzemesi de olurlar aynı zamanda. Ne var ki bu tip çabalar karşısında kuralların gerekliliğini de belirtmek isteriz. Kimileri matematiğin, disiplini tutarlı halde tutmak için, tutarsızlıkları görmezden geldiğini düşünebilir (bu o kadar da haksız bir iddia sayılmaz).

Bu bölümde göreceğimiz paradoksların matematiğin bu kurallarını sunmada çok etkili araçlar olduğu ortaya çıkacaktır; çünkü bu kuralların ihlal edilmesi 1=2 ya da 1=0 gibi, çok "ilginç" neticelere varacaktır. Ne saçma! Paradokslar eğlencelidirler; çünkü sizi fark ettirmeden imkânsız bir sonuca götürürler. Attığınız her adım doğru olduğu halde, imkânsız bir sonuca ulaşmanızdan dolayı hayal kırıklığına uğrayabilirsiniz. Yine söylüyorum; bu matematiğin sınırlarını araştırmak için çok güzel bir yoldur. Sıfırla bölme neden yasaktır? Neden köklerin çarpımı her zaman çarpımın köküne eşit değildir? Bunlar bu bölümün eğlenceli bir şekilde işlediği sorulardan yalnızca bir kaçıdır. Unutmayın "gizemli" sonuçlar, görülmeye değerdir.

6.1 Tüm Sayılar Eşit midir?

Bu bölümün başlığı akıl almaz gibi görünebilir. Fakat aşağıdaki ispattan da göreceğiniz gibi, böyle olmayabilir de. Şimdi kolayca kabul edebileceğiniz bir kesirle başlayacağız: x-1 ÷ x-1 = 1. Her bir satır temel cebir aracılığı ile doğrulanabilir. Sol kolunda sunulan cebirde hiçbir problem yoktur. Bu ispatı satır satır okuyarak kendi yargılarınıza ulaşabilirsiniz.

x cinsinden	x =1 olduğunda
$\frac{x-1}{x-1} = 1$	$\frac{0}{0} = 1$
$\frac{x^2-1}{x-1} = x + 1$	$\frac{0}{0} = 1 + 1 = 2$
$\frac{x^3-1}{x-1} = x^2 + x + 1$	$\frac{0}{0} = 1 + 1 + 1 = 3$
$\frac{x^4-1}{x-1} = x^3 + x^2 + x + 1$	$\frac{0}{0} = 1 + 1 + 1 + 1 = 4$
⋮	
$\frac{x^n-1}{x-1} = x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x^2 + x + 1$	$\frac{0}{0} = 1 + 1 + 1 + \cdots + 1 = n$

Yukarıda x = 1 olduğunda 1, 2, 3, 4 .... n sayılarının hepsi 0 ÷ 0'a eşit olur ki bu da onların hepsini birbirine eşit kılar. Tabii ki bu doğru olamaz. Bu nedenle 0 ÷ 0'ı anlamsız olarak tanımlarız. Tıpkı burada olduğu gibi, şeyleri anlamlı ve tutarlı yapan bir şeyi tanımlamak için matematikte yaptığımız şey saçma ifadelerden kaçınmaktır.

6.2 Negatif Olan Her Zaman Pozitif Olan Eşit Değildir

Şunu hatırlayın: $\sqrt{2} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{6}$. Buradan belki şu sonuca varırsınız: $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$.

Buradan çarpma ve sadeleştirme yapabilirsiniz: $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1}$

Bu ifadeyi sadeleştirmek için şu yapılabilir: $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{+1} = 1$.

Ya da şu yapılabilir: $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = (\sqrt{-1})2 = -1$.

Her ikisi de doğru "görünmektedir." Fakat bu nasıl olabilir; kimi zaman +1, kimi zaman –1 sonucunu alıyoruz.

Eğer her ikisi de doğruysa o zaman –1 = +1 olur; çünkü her ikisi de $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1}$'e eşittir. Açıktır ki bu doğru olamaz.

Öyleyse yanlış olan ne olabilir? Bir kez daha, matematiğin bir kuralını ihlal ettiğimiz için karşımıza bir mantıksızlık çıkmıştır. Burada, (açık bir sebepten dolayı) $\sqrt{a} \cdot \sqrt{b} = \sqrt{ab}$ denklemini a ya da b'den en az birinin negatif olmadığı durumda geçerli olarak tanımlıyoruz. Bu, akabinde karışıklığı giderir -- $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = \sqrt{(-1)(-1)} = \sqrt{+1} = 1$ işlemi yanlıştır; çünkü şimdi tanımladığımız duruma ters düşer; bunun yanında $\sqrt{-1} \cdot \sqrt{-1} = (\sqrt{-1})\ 2 = -1$ doğrudur.

6.3 Sıfır İle Bölmeniz Yasaktır

Her matematikçi sıfırla bölmenin yasak olduğunu bilir. Aslında bu, matematiğin "on emir" listesinde en başta yer almalıdır. Peki o zaman neden yasaktır bu? Biz matematikte, her şeyin matematik dünyasında derli toplu bir şekilde yerine oturduğu bir güzellik ve düzen anlayışına sahibizdir. Bu düzeni bozan herhangi bir şey ortaya çıktığında bunu basitçe ihtiyaçlarımızı karşılayacak şekilde tanımlarız. Sıfır ile bölmede de olan budur. Bu "kuralların" niye ortaya atıldığını açıklayarak bir kişi matematiğin doğası hakkında çok derin bir kavrayışa sahip olabilir. Şimdi gelin bu "emri" biraz anlamlı kılalım.

$n \div 0$, $n \neq 0$ bölümünü düşünün. Sıfırla bölmeme emrini bilmeyen bir kişi olduğumuzu varsayıp bölümün ne olacağı hakkında fikir yürütelim (yani, tahmin edelim). Bu durumda, tıpkı bölmenin doğru olup olmadığını kontrol ederken yaptığımız gibi $0 \cdot p$'nin n'ye eşit olup olmadığını kontrol edelim. $0 \cdot p \neq n$ olduğunu biliyoruz; çünkü $0 \cdot p = 0$'dır. Bu nedenle bu bölmenin bir sonucu olacak bir p bölümü yoktur. Bu sebepten dolayı sıfır ile bölmeyi geçersiz saymaktayız.

Sıfırla bölmenin tanımlanmaması gerektiğini gösteren daha

inandırıcı bir örnek de, bunun bizi nasıl $1 \neq 2$ eşitliğine zıt bir duruma götürdüğünü gösteren örnektir. Göstereceğimiz şey, eğer sıfırla bölme geçerli ise 1 2'ye eşit olacaktır; ne saçmalık!

İşte 1'i 2'ye eşitleyen "ispat":

$a = b$ diyelim.	
O zaman $a^2 = ab$	[her iki tarafı a ile çarpın]
$a^2 - b^2 = ab - b^2$	[her iki taraftan b^2 çıkaralım]
$(a + b)(a-b) = b(a-b)$	[çarpanlara ayıralım]
$a + b = b$	[$a-b$ ile bölelim]
$2b = b$	[b'yi a ile yer değiştirelim; çünkü başta $a = b$ dedik]
$2 = 1$	[Her iki tarafı da b ile bölelim]

$(a-b)$ ile böldüğümüz aşamada biz aslında sıfır ile bölme yapmaktaydık; çünkü $a = b$ ve $a - b = 0$ olur. Bu durum bizi seçimsiz bir şekilde sıfırla bölme yapmamızı yasaklayan bir duruma götürür. Bu durumun incelenmesine biraz daha zaman ayırarak matematik hakkında daha derin kavrayışa sahip olacaksınız. Tabii ki o zaman zevk almaya başlayacaksınız; çünkü artık bir şeyi "matematikte böyle olması gerektiği için" kabul etmeyi bırakmaya başlayacaksınız. Ancak bir konuyu izleyen eleştirel bir göz sağlıklı yorumları yapabilir.

6.4 Tüm Üçgenler İkizkenardır

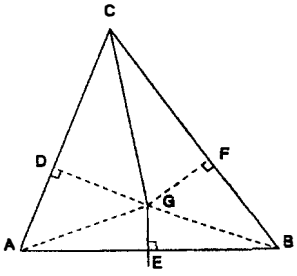
Zamanımızın büyük matematikçilerinden biri olan George Pólya, "Geometri, yanlış şekiller üzerinde doğru akıl yürütme bilimidir" demişti. Şimdi "yanlış" şekiller üzerinde bizi imkânsız sonuçlara götüren bir kanıtlamayı inceleyeceğiz. İfadelerin kendileri bile tuhaf görünmektedir. Saçma olan bir şeyin ispatlanmasının gösterilmesini eğilimlerinize göre sinir bozucu ya da büyüleyici bulabilirsiniz. Yine de, "ispatın" her

bir söylemini takip edip hatayı bulmaya çalışın. Bu, Öklid'in bile *Elemanlar*'ında tanım eksikliğinden dolayı çözemeyeceği bir şeye dayanmaktadır.

> *Mantıksal yanlışlık*: Herhangi bir çeşitkenar üçgen (yani, her bir kenarı farklı uzunlukta) ikizkenardır (yani, iki kenarı birbirine eşittir).

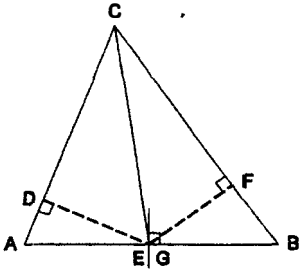
Çeşitkenar ΔABC'nin ikizkenar olduğunu kanıtlamak için, birkaç keyfi doğru parçası çizmeliyiz. $\overline{AB}$'yi dik olarak ikiye bölen çizgiyi ve $\angle C$'nin açıortayını çizin. Onların kesişim noktalarından $\overleftrightarrow{AC}$ ve $\overleftrightarrow{CB}$'ye dik olan, sırasıyla D ve F'de biten dikmeleri çizin.

Dikkat edilmelidir ki, çeşitli çeşitkenar üçgenler için yukarıdaki tanımlamanın dört farklı olasılığı vardır. Şekil 1, $\overleftrightarrow{CG}$ ve $\overleftrightarrow{GE}$ üçgenin içinde buluşur:



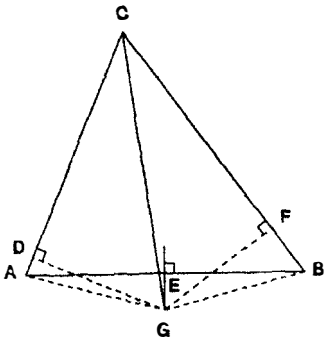
Şekil 1

Şekil 2, $\overleftrightarrow{CG}$ ve $\overleftrightarrow{GE}$ (şimdi aslında orta noktadır) $\overline{AB}$'de buluşur.



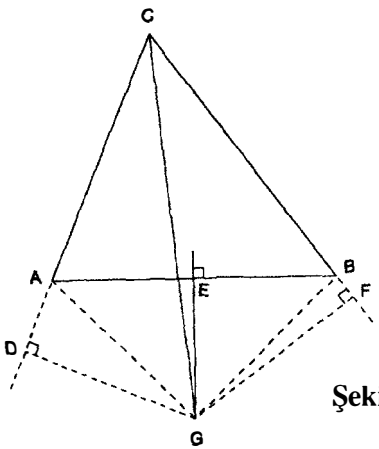
Şekil 2

Şekil 3, $\overline{CG}$ ve $\overline{GE}$ üçgenin dışında buluşur; ama $\overline{GD}$ ve GF dikmeleri sırasıyla $\overline{AC}$ ve $\overline{CB}$ üzerine düşerler.



Şekil 3

Ve Şekil 4, $\overline{CG}$ ve $\overline{GE}$ üçgenin dışında buluşur; ama $\overline{GD}$ ve GF dikmeleri sırasıyla $\overline{CA}$ ve $\overline{CB}$ ile üçgenin dışında buluşur.



Şekil 4

Bu mantıksal yanlışlığın "ispatı" yukarıdaki herhangi bir şekille yapılabilir. "İspatı" yukarıdaki şekillerden biriyle (ya da hepsiyle) takip edin.

Verilen: ΔABC bir çeşitkenardır.

İspatlanacak: $AC = AB$ (ya da ΔABC bir ikizkenardır)

İspat: $\angle ACG \cong \angle BCG$ ve dik $\angle CDG \cong \angle CFG$ olduğundan, $\Delta CDG \cong \Delta CFG$ olur (*KAA*). Bu nedenle $DG = FG$ ve $CD = CF$. $AG = BG$ (bir doğru parçasının dik böleni üzerindeki bir nokta, doğru parçasının bitiş noktalarına eşit uzaklıktadır) ve $\angle ADG$ ve $\angle BFG$ dik açılar olduğundan, $\Delta DAG \sim \Delta FBG$ (hipotenüs ayağı). Böylece $DA = FB$.

Buradan $AC = BC$ çıkar (1'den 3'e kadar olan şekillerde toplam ve şekil 4'te çıkarma ile).

Bu noktada kafanız karışmış olabilir ve belki de bu yanlışlığın olmasına izin veren hatanın nerede olduğunu merak ediyorsunuzdur. Dikkatli bir incelemeyle şekillerde çok belirgin olmayan bir hata bulacaksınız:

a. G noktası üçgenin dışında *olmalıdır*.

b. Dikmeler üçgenin kenarlarıyla birleştiğinde, biri bir kenarla köşelerin *arasında* bir yerde buluşur; ama diğeri buluşmaz.

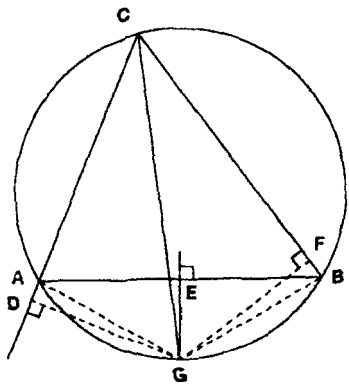
Öklid tarafından kullanılan genel terimlerle bu ikilem bir gizem olarak kalacaktır; çünkü arada olma *Elemanlar*'da tanımlanmamıştır. Aşağıda, yukarıdaki ispatta yanlışlıkların olduğunu ispatlayacağız. İspatımız Öklid metotlarını kullanır; ama bir arada olma tanımı kabul eder.

ΔABC'nin çevrel çemberini çizerek işe başlayalım (şekil 5'e bakın).

$\angle ACB$'nin açıortayı $\overset{\frown}{AB}$'nin(*) orta noktası G'yi içermelidir (çünkü, $\angle ACG$ ve $\angle BCG$ eş çevre açılardır). $\overset{\frown}{AB}$'nin dik böleni $\overline{AB}$'yi ikiye bölmelidir ve bu nedenle G'den geçer. Böylece $\angle ACB$'nin açıortayı ve $\overline{AB}$'nin dik böleni G noktasında üçgenin dışında kesişir. Bu şekil 1 ve 2 olasılıklarını ortadan kaldırır.

Şimdi çemberin üzerine çizilmiş $ACBG$ dörtkenarlısını düşü-

(*) AB, "AB yayı" demektir.



Şekil 5

nün. Bir çemberin içine çizilmiş (ya da çembersel) bir dörtkenarlının karşılıklı açıları bütünler olduğundan, $m\angle CAG + m\angle CBG = 180°$'dir. Eğer $\angle CAG$ ve $\angle CBG$ dik açılar ise, o zaman CG bir çap olacak ve ΔABC ikizkenar olacaktır. Bu nedenle, ΔABC çeşitkenar olduğundan, $\angle CAG$ ve $\angle CBG$ dik açılar değillerdir. Bu durumda biri dar biri geniş olmalıdır. Diyelim ki, $\angle CBG$ dar ve $\angle CAG$ geniştir. O zaman ΔCBG'de $\overline{CB}$ üzerındeki yükseklik üçgenin içerisinde olmalıdır; bunun yanında geniş açılı ΔCAG'de $\overline{CA}$ üçgenin dışında olmalıdır. (Bu genellikle ispatlamadan kabul edilen bir şeydir; fakat kolayca ispatlanabilir.) Dikmelerden bir ve sadece bir tanesinin üçgenin bir kenarıyla köşeler arasında kesiştiği olgusu hatalı "ispatı" ortadan kaldırır.

Bu ünlü geometrik problemle ilgili etraflı tartışmamız, geometrinin kesinliği konusunda size gerçek bir kavrayış sunacaktır. Bu bölümün verdiği zevk bir yana, bu aynı zamanda oldukça öğreticidir; çünkü bize noktaların yerlerinin tanımlanmasının gereğini gösterir ki bu genelde atlanılan bir konudur.

6.5 Bir Sonsuz Seri Hatası

İşte çoğu okuyucuyu şaşkınlığa uğratacak bir problem. Ne var ki "cevap" *birazcık anlaşılması* zor bir karaktere sahiptir ve yoğun bir düşünme gerektirebilir.

Yakınsak seri(*) kavramını görmezden gelerek şöyle bir ikileme düşeceğiz:

Diyelim ki, $S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + ...$

$= (1-1) + (1-1) + (1-1) + (1-1) + ...$

$= 0 + 0 + 0 + 0 + ...$

$= 0$

Ne var ki, eğer bunları farklı gruplarsak şunu elde ederiz:

Diyelim ki, $S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + ...$

$= 1 - (1-1) - (1-1) - (1-1) - (1-1) - ...$

$= 1 - 0 - 0 - 0 - ...$

$= 1$

Bu nedenle, ilk durumda $S = 0$ ve diğerinde $S = 1$ elde ettiğimize göre *1 = 0 sonucuna ulaşabiliriz.*

Bu argümanda hatalı olan şey nedir?

Eğer yeterince rahatsız olmadıysanız bir de şu argümanı inceleyin:

Diyelim ki, $S = 1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + ...$ (1)

Burada açıktır ki S pozitiftir.

Aynı zamanda, $S - 1 = 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + ...$ (2)

Şimdi (1) eşitliğinin her iki tarafını da 2 ile çarparsak şu-

(*) Basit terimlerle söylersek, *bir seri, belirli bir sonlu toplamaya yaklaşıyor* gibi görünüyorsa yakınsıyor demektir. Örneğin, $1 + 1 \div 2 + 1 \div 4 + 1 \div 8 + 1 \div 16 + 1 \div 32 + ...$ *serisi* 2'ye yakınsar; ama $1 + 1 \div 2 + 1 \div 3 + 1 \div 4 + 1 \div 5 + 1 \div 6 + ...$ serisi sonsuza kadar büyümeye devam eder.

nu elde ederiz:

$$2S = 2 + 4 + 8 + 16 + 32 + 64 + ... \quad (3)$$

(2) numarayı (3) numaralı denklemde yerine koyarsak bu bize şunu verir:

$$2S = S - 1$$

Buradan $S = -1$ sonucunu çıkarabiliriz (her iki taraftan da S'yi çıkararak).

Bu bizim –1 sayısına pozitif dememize sebebiyet verir; çünkü daha önce S'nin pozitif olduğunu söylemiştik.

Son mantıksal problemi açıklığa kavuşturmak için bir yakınsak serinin aşağıdaki doğru biçimlerini karşılaştırabilirsiniz:

Diyelim ki, $S = 1 + 1 \div 2 + 1 \div 4 + 1 \div 8 + 1 \div 16 + ...$

Daha sonra şunu elde ederiz; $2S = 2 + 1 + 1 \div 2 + 1 \div 4 + 1 \div 8 + 1 \div 16 + ...$

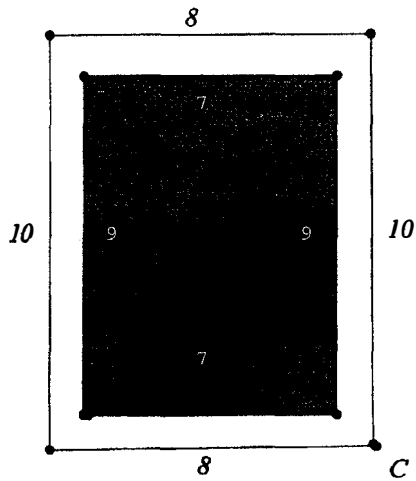
Böylece $2S = 2 + S$ ve $S = 2$ ki bu doğrudur. Buradaki fark görüldüğü gibi yakınsak seri kavramıdır; daha önceki örneğimizde bir yakınsak seri yoktu ve bu nedenle daha önceki varsayımlarımız geçerli değildi.

6.6 Aldatıcı Kenar Süsü

Bir atlasta, aradığınız kasabanın sayfa sınırının "biraz ötesinde" olmasından dolayı sayfayı çevirmek zorunda kalmaktan dolayı sinirlenmediniz mi hiç? Atlasların çoğunda, çekici görünsünler diye harita sayfalarının çevresine eklenmiş kenar süsleri bulunur. Bu bölgenin ne kadar tuttuğunu merak ettiniz mi hiç?

Bunu keşfetmek muhtemelen sizin için dikkatinizi geliştire-

cek bir şey olacaktır; ama daha da önemlisi çevrenizdeki nicel dünya hakkındaki duyarlığınızı açacaktır. 8'e 10 inç ölçüleri olan bir atlas tasarlayalım. Makul bir kenar süsünün 2 ÷ 1 inç genişliği vardır ve bu göze batmaz. Şimdi durumu inceleyelim.



Tüm sayfanın alanı 80 inç karedir ve haritanın alanı 63 inç karedir. Bu nedenle kenar bölgesinin alanı; 80 – 63 = 17 inç karedir. Bu, 17 ÷ 80 = .2125 = % 21.25'e tekabül eder; sayfanın yaklaşık 5'te biri! Bu "işe yaramaz" bölgenin alanı sayfanın %20'sini kaplamasaydı daha iyi olmaz mıydı? Daha büyük sayfa ve daha az fiyat olacaktı muhtemelen. Ayrıca, sınırın ötesinde olan yerler için sayfayı çevirmek zorunda kalmayacaktınız.

Burada önemli olan şey çevrenizdeki nicel dünya hakkında tetikte olmanızdır. Çevrenizde bu tip bir etkiyi yaratabilecek sayısız örnek bulunmaktadır. Bu tip gözünüzü açan şaşkınlıklar eğlencelidir de!

6.7 Şaşırtıcı Paradokslar

Paradokslar eğlencelidirler ve içlerinde çok önemli mesajlar taşırlar. Bu eğlenceler aracılığı ile öğrenilecek çok şey vardır.

İşte size üzerinde düşünebileceğiniz bir şeyler verebilen paradokslar.

2 paund = 32 ons

2 ÷ 1 paund = 8 ons

Her iki eşitliği de çarpalım.

(2 • 2 ÷ 1) paund = (32 • 8) ons

ya da 1 paund = 256 ons!

Bu paradoks birimlerin doğru bir şekilde değerlendirilmemesinden kaynaklanıyor ve en güzel şu örnek incelenerek cevaplanabilir.

2 fit = 24 inç

2 ÷ 1 fit = 6 inç

Bunları çarparak şunu elde ederiz;

1 fit kare = 144 inç kare.

Bir başka paradoks ise şudur:

1 • 0 = 2 • 0

ve biz biliyoruz ki 0 = 0.

Bu eşitlikleri bölersek şunu elde ederiz;

1 = 2.

Burada da benzer bir kural görüyoruz; 0 ile bölmemize izin vermiyor ve eğer bunu bozarsak saçma bir sonuca ulaşıyoruz.

Paradokslarda verilen mesajları açıklığa kavuşturmak istersek şunu diyeceğiz ki, ne yaptığınızı bilmeden bir aritmetik işlemin içine dalmayınız.

6.8 Bir Trigonometrik Yanlışlık

Pisagor teoreminin temelidir. Trigonometride bu kendisini şu şekilde ifade eder; $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$. Hatırlayacağınız gibi, eğer bir dik üçgen sin x ve cos x uzunluğunda kenarlara ve 1 uzunluğunda hipotenüse sahip ise, trigonometrik fonksiyonlar belirir ve Pisagor teoremi $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$ sonucunu üretir.

Buradan, 4 = 0 olduğunu gösterebiliriz. Bunun doğru olamayacağını biliyorsunuz! Öyleyse problemi bulmak size kalıyor. Eğer bulamazsanız bunu bölümün sonunda söyleyeceğiz.

Pisagor eşitliği $1 - \sin^2 x = \cos^2 x$ şeklinde yazılabilir. Eğer her iki tarafında kare kökünü alırsak şunu elde ederiz;

$\cos x = (1 - \sin^2 x)\ 1 \div 2$

Eşitliğin her iki tarafına da 1 ekleyelim

$1 + \cos x = 1 + (1 - \sin^2 x)\ 1 \div 2$(*)

Şimdi her iki tarafın da karesini alalım: $(1 + \cos x)^2 = [1 + (1 - \sin^2 x)\ 1 \div 2]^2$

Şimdi $x = 180°$ olduğunda ne olduğuna bir bakalım. Cos 180 ° = -1 ve sin 180° = 0'dır.

Bunları denklemde yerine koyarsak şunu elde ederiz:

$(1-1)2 = [1 + (1-0)1 \div 2\ ]^2$

Böylece, $0 = (1-1)^2 = 4$

$0 \neq 4$ olduğundan bir hata olmalı. Nerede? İşte bir ipucu:

Eğer $x^2 = p^2$ ise o zaman $x = +p$ ve $x = -p$'dir. Problem her ikisini birden kullanmamızı istiyor olabilir. Bazen bunlardan birisi işe yaramaz. Her iki tarafın kare kökünü aldığımız basamağı inceleyin. Suçlu orada sizi bekliyor!

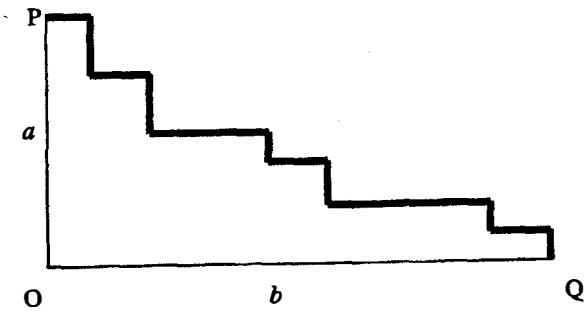
6.9. Anlayışlı Limitler

Limit kavramı hafife alınmamalıdır. Bu kavram kolayca yan-

(*) $x^{1 \div 2} = \sqrt{x}$ olduğunu hatırlayın.

lış yorumlanabilecek kadar karmaşık bir kavramdır. Kimi zaman kavramı kuşatan meseleler yeterince göze görünür değildir. Bunların yanlış yorumlanması bazen ilginç (belki de, bakış açınıza bağlı olarak komik) sonuçlara götürebilir bizleri. Aşağıdaki iki örnek bunu güzel bir şekilde resmeder. Ulaştığınız sonuçlardan dolayı rahatsız olmayın. Unutmayın bu bir eğlence. Onları ayrı olarak düşünüp; sonra da bağlantılarını fark etmeye çalışın.

Şekil 1: Açıkça görüleceği gibi, koyu çizgilerle çizilmiş bölümlerin ("basamakların") uzunluğu $a + b$'ye eşittir.



Koyu çizgilerle çizilmiş bölümlerin ("basamakların") uzunluğu, yatay ve dikey bölümleri toplayarak bulduğumuzda $a+b$ olduğundan, basamakların sayısı artsa da hâlâ $a+b$ olarak kalacaktır. Burada bir ikilem ortaya çıkar; eğer biz bu basamakları, bunlar düz bir çizgi oluşturacak şekilde bir "limit" değere kadar küçülttüğümüzde, bunun uzunluğu POQ üçgeninin hipotenüsüne eşit olur. Buradan da $\overline{PQ}$'nun $a + b$'ye eşit olduğu ortaya çıkar. Fakat biz Pisagor teoreminden biliyoruz ki, $PQ = \sqrt{a^2+b^2}$'dir; $a+b$ değildir. Sorun nerededir?

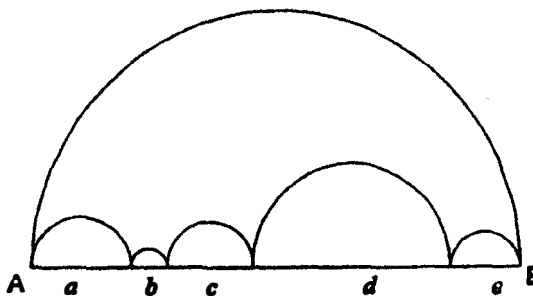
Hiçbir şey yanlış değildir! Gerçekten, gittikçe küçülen basamaklardan oluşan kümemiz, $\overline{PQ}$ düz çizgisine gittikçe daha fazla yaklaşsa da, sezgiye aykırı olarak bu, (yatay ve dikey) basamakların toplamının PQ'nun uzunluğuna yaklaşmasını gerektirmez. Burada bir çelişki yoktur; sadece sezgilerimizde

bir yanlış anlama vardır.

Bunu "açıklamanın" bir başka yolu ise şunu öne sürmektir. "Basamaklar" küçüldükçe sayıları artar. Bir uç durum olarak, (basamaklar için) 0 uzunluğunda ve sonsuz sayıda parçaya sahip olduğumuzu düşünelim ki bu bizi $0 \cdot \infty$ sonucuna götürür; fakat bu anlamsızdır!

Benzer bir durum şu aşağıdaki örnekte ortaya çıkar.

Örnek 2. Bir sonraki şekilde, küçük yarım daireler büyük yarım dairenin çapının bir ucundan öbür ucuna kadar uzanır.



Küçük yarım daire yaylarının toplamının büyük yarım daire yayına eşit olduğunu göstermek kolaydır. Yani, küçük yarım daire yaylarının toplamı $= \pi a \div 2 + \pi b \div 2 + \pi c \div 2 + \pi d \div 2 + \pi e \div 2 = \pi \div 2\ (a + b + c + d + e) = \pi \div 2$ (AB) ki bu da büyük daire yayına eşittir. Bu böyle değilmiş gibi "görünmektedir;" ama böyledir! Aslında, küçük yarım dairelerin sayılarını arttırdıkça (tabii ki, boyutları küçülecektir) onların toplamı AB'ye yakınsıyor gibi "görünmektedir" ama aslında bu doğru değildir.

Daha önceki durumla aynı şekilde, yarım dairelerden oluşan küme *AB* düz çizgisinin uzunluğuna yaklaşır; ne var ki bu, yarım dairelerin uzunluklarının toplamının limitin uzunluğuna, burada AB'nin uzunluğuna yaklaşmasını gerektirmez.

Bu "görünürdeki limit toplam" saçmadır; çünkü A ve B noktasındaki en kısa uzunluk AB doğru parçasıdır; AB yarım

daire yayı (bu da küçük yarım dairelerin toplamına eşittir) değildir. Bu, benzer örneklerle güzelce açıklanabilecek önemli bir kavramdır; böylece gelecekteki yanlış yorumlamalardan kaçınılabilir.

7

Hesaplama ve Olasılık

Günümüz dünyasında, matematik açısından kompleks olan hesaplama biçimleri, matematikte bilmemiz gereken şeylerin önemli bir parçasını oluşturmaya başlamıştır. Artık hiç olmadığı kadar, olasılık kavramı okuduğumuz şeylerin içine sızıyor: gazeteler, dergiler, profesyonel raporlar vb. Doğal olarak, bu kavramların eğlenceli yanları da bulunuyor. Burada inceleyeceklerimiz de bunlar zaten.

Örneğin, ayın on üçünün en yüksek olasılıkla cuma gününe düştüğünü biliyor muydunuz ya da rastgele seçilmiş otuz kişilik bir grup içinde iki kişinin aynı doğum gününe sahip olması olasılığı nedir hiç düşündünüz mü? Bunlar, işleyeceğimiz konulardan bazılarıdır. Bu bölüm sizin için, kısa, şirin ve umuyoruz ki eğlenceli olacak.

7.1 On Üçüncü Cuma

13 sayısı her zaman şanssızlıkla bağlantılı bir sayı olarak düşünülmüştür. On üç ya da daha fazla kata sahip olan binalarda genel olarak 13 sayısı kat numaralarında atlanır. Bu özellikle asansörlerde kendini belli eder; çünkü 13. kat için bir düğme bulunmaz. *13* sayısının şanssızlıkla bağdaştırıldığı başka örneklerde hatırlayabiliriz. Muhtemelen, bir ayın on üçünün cumaya gelmesinin kötü şans demek olduğunu hatırlayacaksınız. Bu muhtemelen, İsa'nın *cuma* günü çarmıha gerilişine sebep olan Son Akşam Yemeği'nde on üç kişinin olduğu ile ilgili inançtan türemiştir.

Cuma gününün ayın on üçüne denk gelme olasılığının diğer günlerle eşit olduğunu mu düşünüyorsunuz? Belki de şimdi çok şaşıracaksınız; ama cuma günü, diğer günlerden daha sık bir biçimde ayın on üçüne rastlar.

Bu olgu ilk olarak B. H. Brown(*) tarafından yayınlanmıştır. O, Gregoryen takviminin 400 yılda bir tekrar eden bir artık yıllar modelini takip ettiğini ifade etmiştir. 4 yıllık bir döngünün içindeki gün sayısı $3 \cdot 365 + 366$. Böylece 400 yıl içinde $100\,(3 \cdot 365 + 366) - 3 = 146.097$. Yüzyıl başları 400'e bölünmediğinde artık yıl değildir; bu nedenle 3 çıkarıyoruz. Bu toplam gün sayısı, tam olarak 7'ye bölünebilir. 400 yıllık bir döngüde 4.800 ay olduğundan ayın on üçü 4.800 kez ortaya çıkar. Aşağıdaki tablo haftanın günlerinin ayın on üçüne gelme sıklığını göstermektedir.

Haftanın	**Günleri 13'lerin sayısı**	**Yüzde**
Pazar	687	14.313
Pazartesi	685	14.271
Salı	685	14.271
Çarşamba	687	14.313
Perşembe	684	14.250
Cuma	*688*	*14.333*
Cumartesi	684	14.250

7.2 Hesaplamadan Önce İyi Düşün

Sıklıkla bir problem bize o kadar kolay gözükür ki, bir strateji geliştirmeden hemen çözmeye kalkışırız. Bu ani girişim genelde biraz düşünüp bir strateji üretenlere göre hiç de zarif olmayan bir çözümle ortaya çıkmamıza sebebiyet verir. İşte size, çalışmaya başlamadan önce yapılacak biraz kafa yormayla çok daha kolay bir şekilde çözülebilecek iki problem.

(*) "Solution to Problem E36," *American Mathematical Monthly* 40 (1933): 607.

Toplamı 999 olan tüm asal sayı çiftlerini bulunuz.

Şimdi kiminiz bir asal sayı listesi yapacak ve asal sayı çiftlerinin 999 edip etmediğine bakacak. Bu kesinlikle hem çok zaman kaybettirici hem de zorlayıcıdır ve tüm asal sayı çiftlerini hesaba katıp katmadığınızdan hiçbir zaman tam olarak emin olamazsınız.

Gelin problemi çözmek için biraz mantıksal akıl yürütme yapalım. İki sayının (asal ya da değil) toplamının tek olması için, sayılardan birinin çift olması gerekir. Bir tane çift asal sayı olduğuna göre, yani 2, toplamı 999 eden yalnızca bir asal sayı çifti olacaktır; 997 ve 2. Şimdi bu gerçekten çok basit bir hale geldi.

Hemen bir ikinci problem; ön planlama ya da düzenli bir düşünce tekniği onu çok anlamlı kılacaktır:

Bir palindrom, ileriye ve geriye doğru yazıldığında aynı sonucu veren sayıdır; yani, 747 ya da 1.991. 1 ile 1.000 arasında (1.000 de dahil) kaç tane palindrom sayı vardır?

Bu probleme geleneksel yaklaşım 1 ile 1.000 arasındaki tüm sayıları yazmak ve bunların palindrom olup olmadıklarına bakmaktır. Ne var ki bu kullanışsız ve zaman kaybettiren bir çözüm tekniğidir ve birkaç sayı kolaylıkla atlanabilir.

Bu problemi daha hızlı bir şekilde çözebilmek için bir kalıp bulup bulamayacağımıza bir bakalım.

Aralık	Palindromların Sayısı	Toplam Sayı
1-9	9	9
10-99	9	18
100-199	10	28
200-299	10	38
300-399	10	48
•	•	•
•	•	•
•	•	•

Bir kalıp görüyoruz. Tam olarak, (99'dan sonra) her 100 sayı grubunda 10 tane palindrom var. Böylece, 10 tane 9 ya da 90 artı 1'den 99 olan sayılar için 18 dersek, 1'den 1.000'e kadar (1.000 de dahil) olan sayılar içinde toplam 108 palindrom elde ederiz.

Bu probleme bir başka çözüm yolu, verilerin daha uygun bir şekilde organize edilmesiyle ilgilidir. Tüm tek haneli sayıları düşünün (kendinden-palindromlar). Böyle dokuz tane vardır. Ayrıca dokuz tane iki haneli palindrom vardır. Üç basamaklı palindromlar için 9 tane "dış basamak" olasılığı ve 10 tane "orta basamak"(*) olasılığı vardır; böylece bunlardan 90 tane buluruz. Toplamda 1'den 1.000'e kadar (1.000 de dahil) olan sayılar içinde toplam 108 palindrom elde ederiz.

Slogan şudur: Önce düşün, daha sonra bir çözüme başla.

7.3 Değersiz Bir Artış

Varsayalım ki bir işiniz var ve %10'luk zam aldınız. Daha sonra işler iyi gitmedi ve patronunuz maaşınızda %10'luk bir indirim yaptı. İlk baştaki maaşınıza mı döneceksiniz? Cevap çok ilginçtir (ve şaşırtıcıdır) HAYIR!

Bu küçük hikâye oldukça rahatsızlık vericidir; çünkü aynı yüzde artış ve azalışla başlanılan yere dönülmesi beklenir. Bu sezgisel bir düşüncedir ama yanlıştır. Bunu, belli bir miktar para seçerek ve aşağıda belirtilen yolu izleyerek görebilirsiniz.

Mesela 100 dolarla başlayın. 100 dolar üzerinden %10 artışı hesaplayın ki bu 110 dolardır. Şimdi 110 dolar üzerinden %10 indirimi hesaplayın; bu 99 dolar eder –başlangıç miktarından 1 dolar daha azdır.

%10 indirimi önce ve %10 artışı sonra hesaplasaydık sonuç farklı olur muydu diye merak ediyor olabilirsiniz. Yine

(*) Sıfır yalnızca orta basamak olabilir.

100 doları başlangıç alırsak önce %10 indirimi hesaplayalım ki bu 90 dolar eder. Daha sonra %10 artışı hesaplayalım; 99 dolar daha önceki rakamla aynı. Böylece görüyoruz ki sıra bir şey fark ettirmiyor.

Oldukça aldatıcı olan benzer bir durum bir kumarbazın başına gelebilir. Şu aşağıdaki durumu düşünün. Sezgilerinizin doğru olup olmadığını görmek için bir arkadaşınız üzerinde bunu deneyebilirsiniz.

> Size bir oyun oynama şansı verilsin. Kurallar basit. Kapalı olarak 100 kart var. Bu kartlardan 55 tanesinde "kazandınız" 45 tanesinde "kaybettiniz" yazıyor. 10.000 dolar parayla başlıyorsunuz. Her kart çevrilişinde paranızın yarısını koymak zorundasınız; kartın söylediğini göre ya kaybedeceksiniz ya da kazanacaksınız. Oyunun sonunda tüm kartlar açılmış olacak. Oyunun sonunda ne kadar paranız olacaktır?

Yukarıda uyguladığımız basit prensip burada da uygulanabilir. Açıktır ki, kaybedeceğinizden on kere daha fazla kazanacaksınız; bu, 10.000 dolardan daha fazla parayla ayrılacağınız görüntüsü verebilir. Aşikâr olan genelde yanlıştır ve bu güzel bir örnektir. Diyelim ki ilk kartta kazandınız; şimdi 15.000 dolarınız var. İkinci kartta kaybettiniz; şimdi 7.500 dolarınız var. Yani bir kere kazanıp bir kere kaybetseydiniz de 7.500 dolarınız olacaktı. Yani, her kazanıp kaybetmede paranızın dörtte birini kaybediyorsunuz. Böylece oyunun sonunda $10.000 \bullet (3 \div 4)^{45} \bullet (3 \div 2)^{10}$ kadar paranız olacak.

Bu 1.38 dolara eşittir. Şaşırdınız mı?

7.4 Aynı Doğum Günleri

Bu başlık matematikteki en şaşırtıcı sonuçlardan birisini size sunmaktadır. İzleyeceğimiz yöntem, uzman olmayan kişileri olasılığın gücü konusunda ikna etmenin en iyi yollardan biri-

dir. Bu konunun sonuçları, eğlenceli olması bir yana sizi, sezgileriniz konusunda şüpheye düşürecektir.

Varsayalım ki 35 öğrencisi olan bir sınıf içindesiniz. İki sınıf arkadaşının doğum günlerinin (yalnızca ay ve gün) aynı olma şansının (ya da olasılığının) ne kadar olduğunu düşünüyorsunuz? Sezgisel olarak, (artık yılları göz ardı ederek) 365 günlük bir küme içinden, aynı doğum gününe sahip 2 insanın olasılığı üzerine düşünmeye başlarız. Belki de bu 365'de 2'dir? Bu, $2 \div 365 = 0.005479 \approx \%\ 2 \div 1$ olasılığa eşit olacaktır. Çok küçük bir şans.

Şimdi "rastgele" seçilmiş 35 Amerika Birleşik Devletleri başkanını düşünelim. Çok şaşıracaksınız, ama iki tane aynı doğum gününe sahip başkan bulunmaktadır:

11. Başkan James K. Polk (2 Ekim 1795) ve
29. Başkan Warren G. Harding (2 Ekim 1865).

35 kişilik bir grup için, iki kişinin aynı doğum gününe sahip olma olasılığının 10'da 8 ya da $8 \div 10 = \%80$ olduğunu duymak muhtemelen sizi şaşırtacaktır.

Eğer imkânınız varsa, 10 tane 35 kişilik grup seçerek ve onların doğum tarihlerine bakarak kendi deneyinizi yapabilirsiniz. 30 kişilik bir grup için aynı olma olasılığı 10'da 7 ya da bu, kurduğunuz böyle 10 grubun 7'sinde bir doğum günü çakışması olacak demektir. Bu muhteşem ve beklenmedik sonuca hangi sebeple ulaşılmaktadır ve doğru mudur? Bu, sezgilerimize aykırı bir durum gibi görünmektedir.

Merakınızı gidermek için durumu ayrıntılarıyla inceleceğiz.

35 kişilik bir sınıf düşünün. Seçilen bir kişinin kendi doğum günü ile çakışması olasılığı hakkında ne düşünürsünüz? Bu bir kesinliktir; yani 1.

Bu şu şekilde yazılabilir; $365 \div 365$.

Seçilen diğer bir öğrencinin bu öğrenciyle doğum gününün çakışmaması olasılığı $365\text{-}1 \div 365 = 364 \div 365$'dir.

Seçilen üçüncü bir öğrencinin bu öğrenciyle doğum günü-

nün çakışmaması olasılığı 365-2 ÷ 365 = 363 ÷ 365'dir.

Aynı doğum gününe sahip olmayan 35 öğrencinin olasılığı bu olasılıkların çarpımıdır:

$p = 365 \div 365 \bullet 365\text{-}1 \div 365 \bullet 365\text{-}2 \div 365 \bullet \ldots \bullet 365\text{-}33 \div 365 \bullet 365\text{-}34 \div 365.$

Gruptaki iki öğrencinin aynı doğum gününe sahip olması (q) olasılığı ve gruptaki iki öğrencinin aynı doğum gününe sahip olmaması olasılığı toplamı kesinlik olduğundan bunların toplamı 1 olmalıdır; yani $p + q = 1$.

Bu durumda, $q = 1 - 365 \div 365 \bullet 365\text{-}1 \div 365 \bullet 365\text{-}2 \div 365 \bullet \ldots \bullet 365\text{-}33 \div 365 \bullet 365\text{-}34 \div 365 \sim .8143832388747152$. Diğer bir değişle, rastgele seçilmiş 35 kişilik bir gruptaki iki öğrencinin aynı doğum gününe sahip olma olasılığı 8 ÷ 10'dan yüksektir. 365 tane olasılık düşünüldüğünde bu beklenmedik kadar yüksek bir değer olarak karşımıza çıkar. Meraklı okuyucular olasılık fonksiyonun doğasını incelemek isteyebilir. İşte size rehberlik etmesi için birkaç değer.

Gruptaki insan sayısı	Doğum günü çakışmasının olasılığı.
10	.1169481777110776
15	.2529013197636863
20	.411438835805799
25	.5686997039694639
30	.7063162427192686
35	.8143832388747152
40	.8912318098179490
45	.9409758994657749
50	.9703735795779884
55	.9862622888164461
60	.9941226608653480
65	.9976831073124921
70	.99915957595651571

"Hemen hemen kesin" durumuna ne kadar çabuk ulaşıldığına dikkat ediniz. Yaklaşık 60 kişilik bir sınıf mevcuduna geldiğimizde, tablo bize iki öğrencinin aynı doğum gününe sahip olma olasılığının neredeyse kesin (%99'dan yüksek) olduğunu söylüyor.

Eğer bunu ilk 35 başkanın ölüm tarihleri için yapsaydık görecektik ki, ikisi 8 Mart'ta (Millard Fillmore, 1874 ve William H. Taft, 1930) ve üçü 4 Temmuz'da (John Adams ve Thomas Jefferson, 1826 ve James Monroe, 1831) ölmüştür.

Gördüğünüz gibi, yukarıdaki şaşırtıcı sonuçlar, sezgilerimize güvenmenin o kadar da iyi bir şey olmadığı konusunda gözlerimizi açmaktadır.

7.5 Takvim Gariplikleri

Takvimler, öğrencileri matematikten zevk alacak hale getirebilmek için kullanılabilecek çeşitli eğlenceli durumları barındırırlar – en azından bunlar, onları sayı ilişkilerini araştırmaya teşvik edebilir.

Örneğin şu takvim sayfasını düşünün; Ekim 2002.

Pazar	Pzt	Salı	Çar	Per	Cuma	Cts
		1	2	3	4	5
6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31		

Takvimde, herhangi dokuz tarihten oluşan bir kare (3 x 3) seçiniz. Biz yukarıda seçtiklerimizi gölgelendirdik. Gölgeli bölgedeki en küçük sayıya 8 ekleyin ve bunu 9 ile çarpın. Yani, (9+8) • 9 = 153. Daha sonra gölgelenmiş matristeki orta

sıranın toplamını (51) 3 ile çarpın. Sürpriz! Daha önceki cevapla aynı, 153. Ama nasıl oldu? İşte birkaç ipucu: Ortadaki sayı 9 gölgeli sayının ortalamasıdır (ya da ortasıdır). Orta kolondaki sayıların toplamı, tüm sayıların toplamının 1 ÷ 3'dür. Bu araştırmanın olumlu sonuçları olacaktır.

Şimdi takvim hakkında daha derin bir kavrayışa sahip olduğunuza göre, 4 / 4, 6 / 6, 8 / 8, 10 / 10 ve 12 / 12'nin hepsinin haftanın aynı gününe düşme olasılığının ne olduğunu düşünün. Kesinlikle düşünmeden verilen reaksiyon yaklaşık 1 ÷ 5 olacaktır. Yanlış! Olasılık 1'dir; bir kesinlik. Fakat şaşırtıcı sonuç nasıl olabilir? Daha ayrıntılı bir inceleme tüm bu tarihlerin arasında dokuz hafta ara olduğunu size gösterecektir. Böyle küçük, bilinen olgular, derinlerde gizli olan matematik ilgisinin ortaya çıkmasına yardımcı olacaktır. Takvime yapılan yolculuk ilginç sürprizlere gebedir.

7.6 Monty Hall Problemi ("Let's Make a Deal")

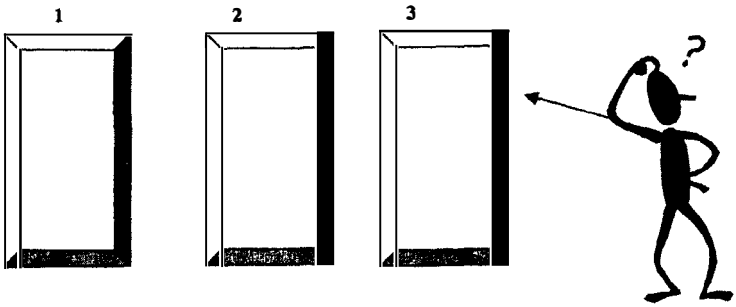
Let's Make a Deal uzun zaman yayınlanmış ve ortaya sorunlu bir durum koyan bir televizyon programıydı. Rastgele seçilmiş bir seyirci sahneye geliyor ve karşısına üç tane kapı çıkarılıyordu. Ve bir tanesini seçmesi isteniyordu; kapılardan birinin arkasında araba, diğer ikisinin arkasında ise bir eşek bulunuyordu. Yalnız burada bir ilginçlik vardı: Yarışmacı birinci tercihini yaptıktan sonra sunucu, Monty Hall, seçilmemiş kapıların birinin arkasındaki eşeği kapıyı açarak gösteriyordu (tabii ki hâlâ iki kapı açılmamış durumda) ve yarışmacıya (açılmamış) orijinal seçiminde devam mı edeceği, yoksa seçimini değiştirerek diğer kapıyı seçmek mi istediği soruluyordu. Tam bu noktada, gerilimi yükseltmek için seyircilerin yarısı "değiştir", yarısı da "kal" diye bağırıyordu. Burada soru, ne yapılması gerektiğidir. Herhangi bir fark ortaya çıkacak

mıdır? Eğer öyleyse burada hangi stratejiyi kullanmak en doğrusudur (yani, en yüksek olasılığı verir)?

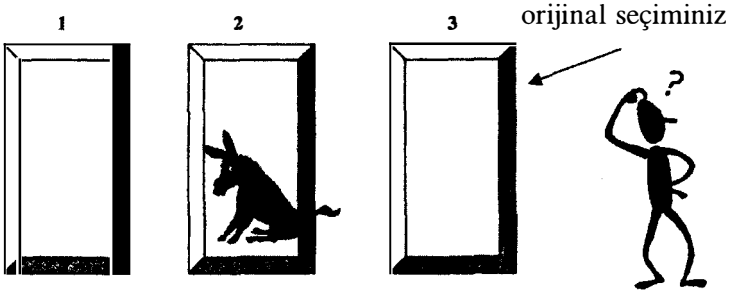
Şimdi durumu adım adım inceleyelim. Cevap yavaş yavaş ortaya çıkacak.

Kapıların ardında iki eşek ve bir araba var.

Arabayı almayı denemeniz gerekiyor. 3 numaralı kapıyı seçtiniz diyelim.



Monty Hall sizin seçmediğiniz kapılardan birini açıyor ve eşeği ortaya çıkarıyor.

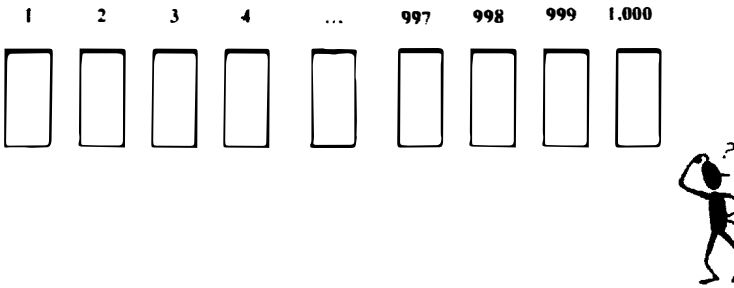


Şöyle soruyor: "Hâlâ ilk seçtiğiniz kapıda mı kalmak istiyorsunuz; yoksa diğer kapıyı mı seçeceksiniz?"

Seçim yapmanıza yardım etmek için bir uç durumu düşünelim:

Üç kapı yerine 1.000 kapı olduğunu varsayalım.

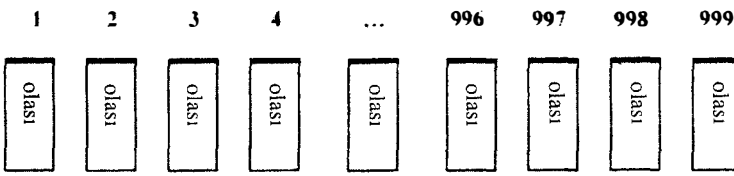
1000 numaralı kapıyı seçtiniz. Doğru kapıyı seçme olasılığınız nedir?



Çok az bir olasılık; çünkü doğru kapıyı bulma olasılığınız 1 / 1000'dir.

Arabanın diğer kapılar arkasında olma ihtimali nedir?

Çok yüksek bir olasılık: 999 /1.000.



Bunların hepsi çok yüksek olasılıklı kapılar.

Soldaki kapı, yani 1 numaralı kapı bir "çok yüksek olasılıklı" bir kapıdır.

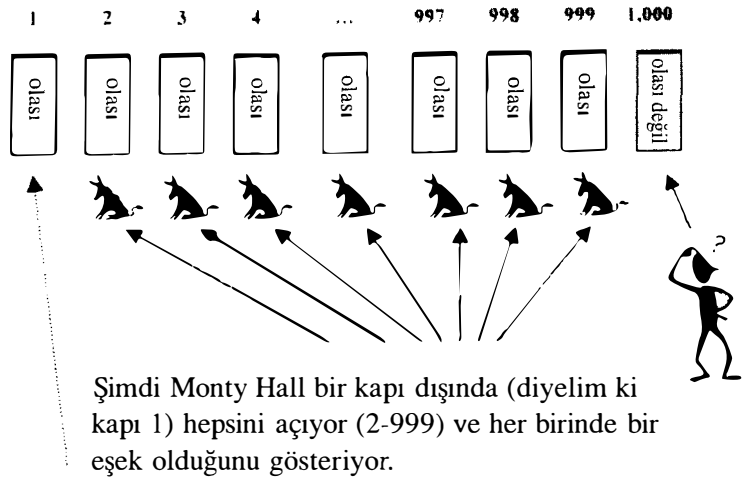
Şimdi soruyu cevaplamaya hazırız. Hangisi en iyi seçimdir:

◊ 1.000 numaralı kapı ("çok az olasılıklı kapı") ya da

◊ 1 numaralı kapı ("çok yüksek olasılıklı kapı")

Cevap şimdi açıktır. Biz, "çok yüksek olasılıklı" kapıyı seçmeliyiz; yani diğer kapıya "geçmek" yarışmacı açısından daha doğru bir stratejidir.

Üç kapılı bir durumu analiz etmek yerine bir uç durum kullanmak, doğru stratejiyi geliştirmemizde bize daha fazla yararlı olmuştur. Prensip her iki durumda da aynıdır.



Şimdi Monty Hall bir kapı dışında (diyelim ki kapı 1) hepsini açıyor (2-999) ve her birinde bir eşek olduğunu gösteriyor.

Bu problem birçok akademik çevrede ve *New York Times* ve diğer yayın organlarında bir tartışma konusu olmuştur. John Tierney *New York Times*'ta şöyle yazmıştır (21 Temmuz Pazar 1991): "Belki de yalnızca bir illüzyondu; fakat bir an için bu, matematikçiler, *Parade* dergisinin okuyucuları ve *Let's Make a Deal* programının hayranları arasında ciddi tartışmalara yol açabilecek bir olay gibi görünmüştü. Onlar tartışmaya, geçen eylül, *Marilyn vos Savant Parade* dergisinde bir bulmaca yayınladıktan sonra başladılar. Her hafta "Marilyn'e Sorun" köşesinde okuyuculara hatırlatıldığı gibi Bayan vos Savant, *Guinness Rekorlar Kitabı*'na bilinen "En Yüksek I■" derecesine sahip insan olarak girmiştir; fakat bu durum bile, o, bir okuyucudan gelen bu soruyu cevapladığında halkı etkilememişti." Doğru cevabı vermişti; ama bu, hâlâ matematikçiler arasında tartışılmaktadır.

7.7 Yazı ve Tura Beklentisi

Bu nefis konu size, akılcı bir uslamlamanın en temel biçimiyle cebirsel bilgiyle birlikte "inanılmaz şekilde zor" bir

problemi nasıl kolay bir şekilde çözmenize yardım edebileceğini gösterecek.

Şu probleme bir bakın:

> Karanlık bir odada bir masada oturuyorsunuz. Masada 12 bozukluk var; 5'inin tura yüzü yukarıda ve 7'sinin yazı yüzü yukarda. (Parların nerede olduğunu biliyorsunuz; bu nedenle paraları ters çevirebilir ya da hareket ettirebilirsiniz; ama karanlık olduğu için paraların ilk başta hangi yüzlerinin yukarda olduğunu bilmiyorsunuz.) Bozuklukları iki gruba ayıracaksınız (muhtemelen bazılarını çevireceksiniz); ışıklar açıldığında her iki grupta da eşit sayıda tura olacak.

İlk reaksiyonunuz "Şaka yapıyor olmalısın!", "Bozuklukların yüzlerini görmeden birisi bunu nasıl yapabilir ki?" olacaktır. İşte burası, akılcı (aynı zamanda oldukça basit) bir cebrin çözüm için devreye girdiği yer.

Hadi hemen şu işi bitirelim. İşte yapacağınız şey. (Belki bunu 12 bozuklukla denemek istersiniz.) Bozuklukları sırasıyla 5 ve 7'lik iki gruba ayırın. Küçük gruptaki bütün paraları ters çevirin. Şimdi her iki grupta da aynı sayıda tura var! Hepsi bu! Bunun büyü olduğunu düşünüyorsunuzdur. Bu nasıl oldu ki? Peki, burada cebir bize neler olduğunu anlatacak.

Diyelim ki, karanlık odada paraları ayırdığınızda 7'lik grupta h sayıda tura oldu. O zaman 5'lik grupta 5-h tura ya da $5 - (5-h) = h$ tane yazı olacak. Küçük gruptaki tüm paraları ters çevirdiğinizde, (toplam 5 tane tura olduğundan) 5-h tura yazı olur ve h yazı h tura olur. Şimdi her iki grup da h tane tura içeriyor!

8

Matematik Potpuri

Diğer yedi bölümde kendine yeterince yer bulamayan bütün konular, bu başlık altında olmaları gereken yere kavuşmuşlardır. Matematiğe karşı sizi heyecanlandıracak birçok hoş konunun bir karışımını bu bölümde topladık. Fazla önemli olmayan konular sona atılır diyerek kendinizi kandırmayın lütfen. Bu bölüm tam aksini ispatlayacaktır.

Burada ilk olarak Albrecht Dürer'in Melencolia I'in de görülen en ilginç sihirli karelerden biri ile karşılaşacaksınız. Bunlar normal sihirli karelerin daha da ötesinde ve üstünde bir sürü özelliğe sahiptirler. Doğada matematiğin kendini göstermesi ile karşılaşacak ve ünlü çözülmemiş problemlerle (hayır, yüzyıllardır çözülememiş bu problemleri çözmenizi beklemiyoruz.) tanışacaksınız. Büyük bir olasılıkla bu bölüm diğerleri arasında en eğlencelisi olacaktır; çünkü diğer yedi konu içinde kendine yer bulamamıştır birçok konuya bu bölümde yer verilmiştir. Belki de bu bölüme bölüm bir demeliydik.

8.1 Matematikte Mükemmellik

Zaten her şeyin mükemmel olduğu bir konu olan matematikte, ne mükemmeldir? Yıllar boyunca mükemmel dikdörtgen, mükemmel sayı, mükemmel kareler ve mükemmel üçgeni tanımlamış birçok değişik yazar çıkmıştır. "Sizde, mükemmellik" listesine eklemede bulunmak isteyebilirsiniz. Başka hangi matematiksel objeler "mükemmel" sıfatını hak edebilir?

İsterseniz mükemmel karelerle başlayalım. Bunların oldukça bilinenleri: 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, ... Bunlar kökleri doğal sayılar olan sayılardır: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, ...

Mükemmel sayı ise çarpanlarının (sayının kendisi hariç) toplamına eşit olan sayıdır. İlk dört mükemmel sayı karşınızda:

6 [1 + 2 + 3]
28 [1 + 2 + 4 + 7 + 14]
496 [1 + 2 + 4 + 8 + 16 + 31 + 62 + 124 + 248] ve
8128 [Bu, açılımı yazılması için okuyucuya bırakılmıştır.]

Mükemmel sayılar, antik Yunan (*Introductio Arithmeticae*, yazan Nichomachus, İÖ 100) zamanından beri biliniyordu. Şaşırtıcı bir biçimde Yunanlılar her bir basamak grubuna tam bir mükemmel sayı düştüğünü hissetmişlerdi.

Bu ilk dört sayı bu varsayımı destekler nitelikte; mesela tek basamaklı sayılar arasında tek mükemmel sayı 6, iki basamaklı sayılar arasında tek mükemmel sayı 28, üç basamaklı sayılar arasında tek mükemmel sayı 496 ve dört basamaklı sayılar arasında tek mükemmel sayı 8.128'dir. Peki bir sonraki mükemmel sayının kaç basamaklı olduğuna dair tahmininiz nedir?

Büyük bir olasılıkla beş basamaklıdır diyeceksiniz. Bunun da ötesinde, mükemmel sayılarla ilgili başka varsayımlar yapacak olursanız, mükemmel sayıların birler basamağının değişmeli olarak 6 veya 8 olması gerektiği sonucuna varabilirsiniz.

Aslına bakarsanız beş basamaklı bir mükemmel sayı yoktur. Bu size az sayıda ilişki yardımıyla çıkarım yaparken dikkatli olmanız gerektiğini öğretmelidir. Bir sonraki mükemmel sayı 8 basamaklıdır: 33.550.336. Sonra bir sonraki mükemmel sayıya ulaşmak için büyük bir sıçrama yapmalıyız:

8.589.869.056. Burada da sayının birinci basamağının değişmeli olarak 6 ve 8 olacağı varsayımını (mantıklı görünmesine rağmen) çürütmüş olduk.(*) Bu erkenden tümevarımsal çıkarım yapmakla ilgili iyi bir derstir.

Mükemmel dikdörtgen ise alanı sayısal olarak çevresine eşit olan dikdörtgendir. Sadece iki tane mükemmel dikdörtgen vardır; bir tanesi kısa kenarı 3, uzun kenarı 6 olan dikdörtgen ve diğeri de tüm kenarları 4 olan karedir.

Ayrıca *mükemmel üçgenler*(**) de vardır. Bunlar da çevreleri sayısal olarak alanlarına eşit olan üçgenlerdir. Dik üçgenler için alan ve çevre formüllerini birbirlerine eşitleyerek mükemmel dik üçgenleri bulabilirsiniz. Dik üçgenler arasında iki tane mükemmel üçgen vardır; bir tanesi 6, 8, 10 kenar ölçülerine sahip olanı bir diğeri ise 5, 12, 13 kenar uzunluklarına sahip olanıdır.

Dik olamayan üçgenler arsında ise üç tane mükemmel üçgen vardır. Bunların kenar ölçüsü uzunlukları 6, 25, 29; 7, 15, 20 ve 9, 10, 17 olanlardır.

Yukarıdaki bu üç durum Heron formülü(***) ile hesaplanabilir.

Bunun bize ne faydası var? Matematikteki "mükemmelliği" takdir etmemize olanak sağlamak dışında pek az diyebiliriz. Belki siz de matematikte "mükemmel" etiketine sahip olmayı hak eden başka adaylar bulabilirsiniz.

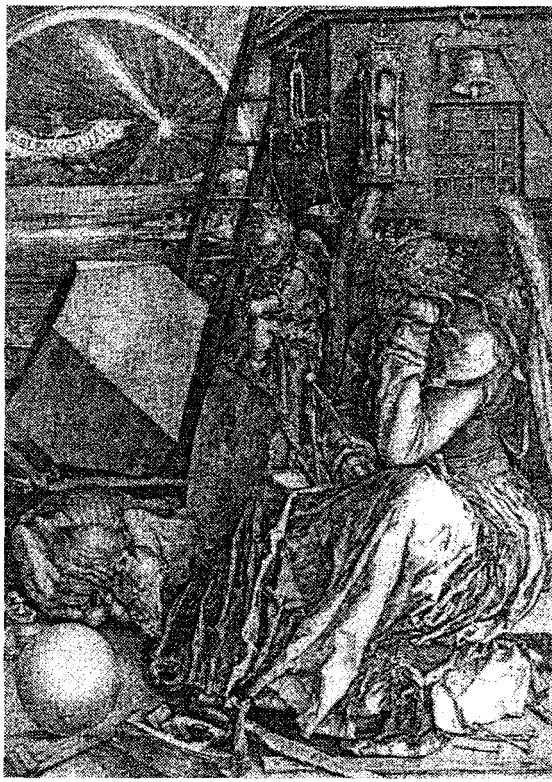
(*) Mükemmel sayıların formülü şu şekildedir:
Eğer 2^k-1 (k>1 için)asal bir sayı ise, o halde $2^{k-1}(2k-1)$ çift bir mükemmel sayıdır.

(**)Bakınız M.V. Bonsangue "In search of a Perfect Numbers" Mathematics Teacher 92, no 1 (ocak 1999) ; 56-61

(***) Sadece kenarları verilmiş bir üçgenin alanı formülü İskenderiyeli Heron'a (M.Ö.150)aittir. Alan= $\sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ şeklindedir, burada a, b, c kenarlar s de çevrenin yarısıdır(semiperimeter).

8.2 Güzel Sihirli Kare

Sihirli karelerin hakkında yazılmış pek çok kitap vardır. Fakat diğerlerinden güzelliği ile ayrılan bir tane sihirli kare vardır. Bu tek özel kare, bir kare matristeki sayıların "sihirli" olarak değerlendirilebilmesi için yeterli birçok özelliğe sahiptir. Bu sihirli kare bizlere normal matematik kanallarından değil; sanat yoluyla ulaşmıştır. Bu, Nünberg, Almanya'da yaşayan ünlü sanatçı Albrecht Dürer (1471-1528) tarafından 1514'te yapılmış bir gravürün arka tarafında resmedilmiştir.



Sihirli kare, satırları, sütunları ve köşegen üzerindeki sayıların toplamı birbirlerine eşit olan bir kare matristir. Albrecht

Dürer'in birçok çalışması, yapıldığı yıl ile birlikte adının baş harflerinin birbiri ardına kendisi tarafından imzalanırdı. Bunu, şu an resmin aşağı kısımlarında bulabiliriz. Bu resmin 1514 yılında yapıldığından bahsetmiştik. Dikkatli bir okuyucu matrisin en alt satırında ortadaki iki hücrenin yılı resmettiğini fark edecektir. Gelin hep birlikte sihirli kareye daha yakından bakalım.

16	3	2	13
5	10	11	8
9	6	7	12
4	15	14	1

İlk önce bunun bir sihirli kare(*) olup olmadığından emin olalım. Hemen tüm satırlarındaki, sütunlarındaki ve köşegen üzerindeki sayıların toplamı birbirine eşit mi diye bakalım. Toplamlarının 34 olduğu kolaylıkla görülüyor. O halde bu sayılardan oluşmuş kare matrisin "sihirli kare" olarak adlandırılabilmesi için gerekli tüm koşulları sağlıyor. Hatta bu Dürer sihirli karesi diğer sihirli karelerin üzerlerinde taşıdıkları özelliklerden daha fazlasını üzerinde barındırıyor. Bazılarını burada sıralayacağız:

(*) 4'e 4 lük bir sihirli kare, her bir hücreye 1 den 16 ya kadar olan sayıları düzenli bir biçimde yazıp sonrada köşegenler üzerindekilerin üzerleri çizilmek suretiyle oluşturulur. Her bir üzeri çizilmiş sayı sonra toplandığında 17 (hücre sayısında bir fazla)eden tümleyeni ile yer değiştirilir. Ne var ki ,Dürer karesinde, resmin yapım tarihi alttaki ortadaki sütunlarda görülsün diye,ortadaki iki sütunda yer değiştirir.

– Köşelerdeki dört sayının toplamı 34' tür.

$16 + 13 + 1 + 4 = 34$

– 2'ye 2'lik her bir karenin köşesi 34 toplamına sahiptir.

$16 + 3 + 5 + 10 = 34$
$2 + 13 + 11 + 8 = 34$
$9 + 6 + 4 + 15 = 34$
$7 + 12 + 14 + 1 = 34$

– 2'ye 2'lik karelerin merkezi 34 toplamına sahiptir.

$10 + 11 + 6 + 7 = 34$

– Köşegenler üzerindeki sayışlarla köşegenler üzerinde olmayan sayıların toplamı birbirine eşittir.

$16 + 10 + 7 + 1 + 4 + 6 + 11 + 13 = 3 + 2 + 8 + 12 + 14 + 15 + 9 + 5 = 68$

– Köşegenler üzerinde bulunan sayıların kareleri toplamı ile köşegenler üzerinde bulunmayan sayıların kareleri toplamı birbirine eşittir.

$16^2 + 10^2 + 7^2 + 1^2 + 4^2 + 6^2 + 11^2 + 13^2 = 3^2 + 2^2 + 8^2 + 12^2 + 14^2 + 15^2 + 9^2 + 5^2 = 748$

– Köşegenler üzerinde bulunan sayıların küpleri toplamı ile köşegenler üzerinde bulunmaya sayıların küpleri toplamı birbirine eşittir.

$16^3 + 10^3 + 7^3 + 1^3 + 4^3 + 6^3 + 11^3 + 13^3 = 3^3 + 2^3 + 8^3 + 12^3 + 14^3 + 15^3 + 9^3 + 5^3 = 9.248$

– Köşegenler üzerinde bulunan sayıların kareleri toplamı ile birinci ve üçüncü satırlarda bulunan sayıların kareleri toplamı birbirlerine eşittir.

$16^2 + 10^2 + 7^2 + 1^2 + 4^2 + 6^2 + 11^2 + 13^2 = 16^2 + 3^2 + 2^2 + 13^2 + 9^2 + 6^2 + 7^2 + 12^2 = 748$

– Köşegenler üzerinde bulunan sayıların kareleri toplamı ile ikinci ve dördüncü satırlarda bulunan sayıların kareleri toplamı birbirlerine eşittir.

$16^2 + 10^2 + 7^2 + 1^2 + 4^2 + 6^2 + 11^2 + 13^2 = 5^2 + 10^2 + 11^2 + 8^2 + 4^2 + 15^2 + 14^2 + 1^2 = 748$

– Köşegenler üzerinde bulunan sayıların kareleri toplamı ile birinci ve üçüncü sütunlarda bulunan sayıların kareleri toplamı birbirlerine eşittir.

$16^2 + 10^2 + 7^2 + 1^2 + 4^2 + 6^2 + 11^2 + 13^2 = 16^2 + 5^2 + 9^2 + 4^2 + 2^2 + 11^2 + 7^2 + 14^2 = 748$

– Köşegenler üzerinde bulunan sayıların kareleri toplamı ile ikinci ve dördüncü sütunlarda bulunan sayıların kareleri toplamı birbirlerine eşittir.

$16^2 + 10^2 + 7^2 + 1^2 + 4^2 + 6^2 + 11^2 + 13^2 = 3^2 + 10^2 + 6^2 + 15^2 + 13^2 + 8^2 + 12^2 + 1^2 = 748$

• Şu güzel simetrilere dikkatinizi çekmek istiyorum:

$2 + 8 + 9 + 15 = 3 + 5 + 12 + 14 = 34$

$2^2 + 8^2 + 9^2 + 15^2 = 3^2 + 5^2 + 12^2 + 14^2 = 374$

$2^3 + 8^3 + 9^3 + 15^3 = 3^3 + 5^3 + 12^3 + 14^3 = 4.624$

– Her bir komşu sağ ve sol sayı çiftleri şu hoş simetriyi oluşturuyor:

$16 + 5 = \mathbf{21}$ $3 + 10 = \mathbf{13}$ $2 + 11 = \mathbf{13}$ $13 + 8 = \mathbf{21}$

$9 + 4 = \mathbf{13}$ $6 + 15 = \mathbf{21}$ $7 + 14 = \mathbf{21}$ $12 + 1 = \mathit{13}$

– Her bir komşu sağ ve sol sayı çiftleri şu hoş simetriyi oluşturuyor:

$16 + 3 = \mathbf{19}$ $2 + 13 = \mathbf{15}$

$5 + 10 = \mathbf{15}$ $11 + 8 = \mathbf{19}$

$9 + 6 = \mathbf{15}$ $7 + 12 = \mathbf{19}$

$4 + 15 = \mathbf{19}$ $14 + 1 = \mathbf{15}$

Sihirli kare içinde daha başka güzel şekiller bulabilir mi-

siniz? Unutmayın bu tipik bir sihirli kare değildir. Bir karenin sihirli kare olabilmesi için tek gereken satırlarındaki, sütunlarındaki ve köşegenlerindeki sayıların toplamının birbirlerine eşit olmasıdır. Dikkatinizi çekmiştir, Dürer'in sihirli karesinde gerekenden çok daha fazla özellik var.

8.3 Çözülememiş Problemler

Kim demiş tüm matematik problemleri çözüldü diye? Matematikte çözülmemiş problemlerin çok önemli bir rolü vardır. Bu problemleri çözmek için kolları sıvayanlar, çabalar sonucu değişik dallarda bir önemli buluşa vesile olmuştur. Çözülememiş –dünyanın en parlak zekâları tarafından– bir problem, özellikle de anlaşılması oldukça kolay olduğunda bunu çözebilir misin sorusunu sessizce sorarak ilgimizi çekme eğilimindedir. Matematiğin tarihini daha iyi anlayabilmek için bu tür çözülememiş problemlere bir göz atacağız. Son yıllarda iki defa gazetelerde matematik, uzun süredir çözülememiş iki problemin çözümü sayesinde manşet oldu.

Dört Renk Harita Problemi, Francis Guthrie'nin İngiltere'de bulunan eyaletleri konu alan bir haritayı boyamaya giriştiğinde bu iş için sadece dört rengin yeterli olduğunu fark ettiği 1852'ye kadar dayanıyor. Kardeşi Fredrick'e komşu bölgeleri (yani tek bir noktayı değil, ortak sınırı paylaşanları) farklı boyama yolu ile herhangi bir haritanın boyanması için dört rengin yeterli olacağı düşüncesinin doğru olup olamayacağını sordu. Fredrick Guthrie sonradan bu varsayımı ünlü matematikçi Augustus DeMorgan'a bildirdi. 1977'de "dört renk harita" problemi, bilgisayar kullanılarak tüm olası haritaları göz önünde bulunduran ve asla dört renkten daha fazlasına ihtiyaç olamayacağını, böylece ortak sınırı taşıyan hiç bir eyaletin aynı renkle temsil edilmemiş olacağını yayınlayan iki matematikçi K.Appel ve W.Haken tarafından çözüldü.

Daha yakın bir geçmişte ise, 23 Haziran 1993, Princeton

üniversitesi matematik profesörlerinden Andrew Wiles, 350 yaşındaki "Fermat'nın son teoremini" ispatlamayı başardığını ilan etti. İspattaki bazı hataları düzeltilmesi fazladan bir yılını da aldı; fakat yüzyıllar boyunca birçok matematikçiyi meşgul eden bu rahatsız edici problemi huzura kavuşturdu. Pierre de Fermat'nın bir matematik kitabının (Diophantus '*Arithnetica*') kenarına not ettiği (1650) problem, Fermat'nın ölümünden sonra oğlu tarafından keşfedildi. Teoremin ifadesine ek olarak Fermat, bu ifadenin ispatının satıra sığmayacak kadar uzun olduğunu belirtmiştir; böylece gerçekte bu ifadeyi ispatlamayı diğerlerine bırakmıştır. Günümüzde Fermat'nın gerçekten bu ifadenin ispatına sahip veya bunun gelecek nesil için bir şaka mahiyetinde olup olmadığı tartışma konusudur. Bazıları ispat etmiş olabileceğini, fakat bu ispatın doğru olmadığını öne sürmektedirler. Her ne olursa olsun, şu ünlü teorem ne ifade ediyor bir bakalım.

Fermat'nın teoremi: $x^n + y^n = z^n$ *ifadesinin* $n>2$ *koşulu için sıfırdan farklı tamsayı çözümü yoktur.*(*)

Bu süre zarfında, hâlâ çok fazla olan diğer çözülmemiş problemlerle ilgili dedikodular yapılmaya başlandı. Bunların içinden iki tanesi oldukça kolay anlaşılan, fakat açıkça ispatı oldukça zor problemler. Hiçbiri de henüz çözülemedi.

Prusyalı matematikçi Christian Goldbach (1690-1764), 1742'de ünlü İsveçli matematikçi Leonhard Euler'e yazdığı bir mektupta bugün hâlâ ispatlanamamış alttaki ifadeyi gönderdi.

Goldbach varsayımı: *2'den büyük her çift sayı iki asal sayının toplamı olarak ifade edilebilir.*

Burada bazı çift sayıları ve bunlara tekabül eden iki asal sayı

(*) Diğer bir değişle, x ve y değişkenleri için bu denklemi sağlayan, $n \leq 2$ durumu hariç, hiçbir doğal sayı değeri yoktur.

toplamını veriyoruz.

2'den büyük çift sayılar	iki asal sayının toplamı
4	2+2
6	3+3
8	3+5
10	3+7
12	5+7
14	7+7
16	5+11
18	7+11
20	7+13
48	19+29
100	3+97

Buna daha fazla örnek ekleyebilir misiniz?

Goldbach'ın ikinci varsayımı: *5'ten büyük her tek sayı, üç asal sayının toplamı olarak ifade edilebilir.*

Gelin birlikte ilk birkaç tek sayıya bir göz atalım:

5'ten büyük tek sayılar	Üç tane asal sayının toplamı
7	2+2+3
9	3+3+3
11	3+3+5
13	3+5+5
15	5+5+5
17	5+5+7
19	5+7+7
21	7+7+7

51	3+17+31
77	5+5+67
101	15+7+89

Belki de burada kendini tekrar eden bir düzen bulmak ve diğer örnekleri üretip üretemeyeceğinizi görmeyi dilersiniz.

Bu çözülememiş problemler yüzyıllarca matematikçileri umutlandırmış, fakat sonuca ulaştırılamamıştır ve hiçbir çözüm bulunamamış olsa da, hiçbir karşıt örnek bulunamadığı için gerçek olduklarına dair daha çok delil (bilgisayarların yardımıyla) bulunmuştur. Şaşırtıcı bir biçimde bunları çözebilmek için harcanan efor, sonunda eğer bu itme gücü olmasaydı saklı kalacak birçok önemli keşfin önünü açmıştır. Bizler için bunlar eğlence kaynaklarıdır.

8.4 Beklenmedik sonuç

İşte size eğlenebilmemizi sağlayacak bir örnek. **1, 2, 4, 8, 16** ... dizisini göz önünde bulundurun. Açıkça birçok insan 16'dan sonra gelecek dizi elemanının 32 olduğunu tahmin edecek. Evet bu oldukça iyi bir tahmin. Ne var ki bir sonraki elemanın (32 yerine) 31 olduğu duyulduğunda "yanlış" çığlıkları büyük bir olasılıkla etrafta yankılanacaktır.

Şaşırtıcı olmasına rağmen bu doğru cevaptır ve **1, 2, 4, 8, 16, 31** ... kurallara uygun bir dizi oluştururlar.

Şu anki görevimiz sizi bunun kurallara uygun bir dizi olduğuna dair ikna etmek. Eğer bu geometrik bir şekilde yapılabilseydi, fiziksel doğa oldukça ikna edici bir delil sunardı. Bu işi daha sonra yapacağız, fakat bu arada bu "şaşırtıcı" dizinin diğer elemanlarını bulmaya çalışalım.

Farklardan oluşan bir tablo oluşturacağız ve işe 31'e kadar verilmiş dizi ile başlayacağız, sonra şekil oluştukça geriye

doğru çalışacağız.

Orijinal Dizi	**1**	**2**	**4**	**8**	**16**	**31**
İlk Fark	1	2	4	8	15	
İkinci Fark	1	2	4	7		
Üçüncü Fark	1	2	3			
Dördüncü Fark	**1**	**1**				

Dördüncü fark bize, sabit bir dizi veriyor, o halde işlemi terse döndürüp (tabloyu ters çevirip), üçüncü farkı 4 ve 5 ile birkaç adım daha genişletebiliriz

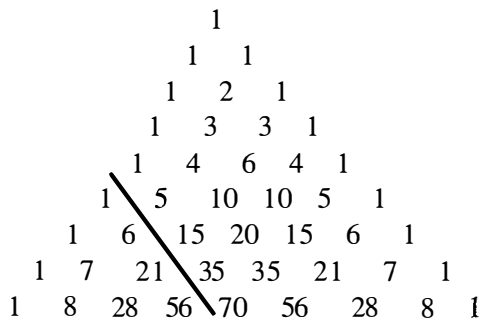
Dördüncü Fark	1	1	1	1			
Üçüncü Fark	1	2	3	**4**	**5**		
İkinci Fark	1	2	4	7	**11**	**16**	
İlk Fark	1	2	4	8	**15**	**26**	**42**
Orijinal Dizi	1	2	4	8	16	**31**	**57**	**99**

Koyu yazılmış sayılar üçüncü farkı genişletip geriye doğru yaptığımız çakışma sonucunda ortaya çıktılar. Böylelikle verilen dizide bir sonraki sayılar: 57 ve 99 dur. Genel terimin dördüncü dereceden bir ifade olması gerekir; çünkü sabiti elde edebilmek için üçüncü farkı geçmemiz gerekti. O halde genel terim $\frac{(n)\ n^4-6n^3+23n^2-18n+24}{24}$'tür.

Bu dizinin matematiğin diğer dallarından bağımsız olduğu düşünülmemelidir.

Pascal üçgenini göz önünde bulundurun.(*)

(*) Bu üçgen, başlangıçta ilk satıra 1 , sonra ikinci satıra 1,1 koyarak şekillendirilir. Üçünü satır ise 1leri başa ve sona koyup, ikinci satırdaki sayıların toplamının(1+1=2) ortaya yazılması ile oluşturulur. Dördüncü satır da aynı şekilde elde edilir. 1 ler başa ve sona yerleştirilir ve 3ler yukarıdaki sayıların toplamlarından(1+2=3, 2+1=3) türetilir.



Koyu yazılmış sayıların sağ tarafında kalan sayıların yatay toplamlarını düşünelim: 1, 2, 4, 8, 16, 31, 57, 99, 163. Bu bizim yeni kurduğumu dizinin kendisidir.

Geometrik bir yorum sizi matematiğin doğasından getirdiği tutarlılığı ve güzelliğine ikna etmeye yardımcı olacaktır. Bunu yapabilmek için bir çember üzerine konumlandıracağımız noktalarla bir çemberin en fazla kaç bölgeye ayrılabileceğini gösterecek bir tablo hazırlayalım. Bunu çemberi bölmelere ayırarak kendiniz denemelisiniz. Üç doğrunun bir yerde kesişmemesine dikkat edin; yoksa bir bölge kaybedersiniz.

Çember üzerindeki nokta sayısı	Çemberin ayrıldığı bölge sayısı
1	1
2	2
3	4
4	8
5	16
6	31
7	57
8	99

Şimdi olağanüstü bir dizinin beklenmedik birçok alanda kendini gösterdiğini gördünüz; belki de biraz tatmin olmuşsunuzdur.

8.5 Doğadaki Matematik

Şimdi matematikteki en güzel görüngülerden bir tanesini ele alacağız. Bu konu gerçekten tam bu bölüme uygun bir konu; çünkü matematikte diğer birçok konuya göre daha fazla alana nüfuz etmiş bir konu bu. *Liber abaci* (1202) adlı kitabında yer alan, tavşanların üremelerini temel alarak Pisalı Leonardo (bilinen adıyla Fibonacci)(*) tarafından ortaya atılan bir problemin direkt sonucu olan ünlü Fibonacci sayılarının doğada daha birçok uygulaması vardır. İlk bakışta bu size rastlantısal gelebilir; fakat öğrendikçe bu ünlü dizinin kendini gösterdiği yerlerin çokluğu sizi de şaşırtacak.

Fibonacci tarafından ortaya atılan orijinal problem her yığılan tavşan çifti sayısını sorar ve şu dizinin oluşmasını sağlar:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, 144,...

Fibonacci sayılarının uygulamalarıyla sizi etkili bir şekilde büyüleyebilmek için birçok değişik çeşitte çam kozalağı, bir ananas, bir bitki (aşağı bakın) ve eğer mümkünse doğadaki diğer spiral örneklere (örneğin ayçiçeği) sahip olmalısınız. Her birindeki spiral sayısı bir Fibonacci sayısı olacaktır.

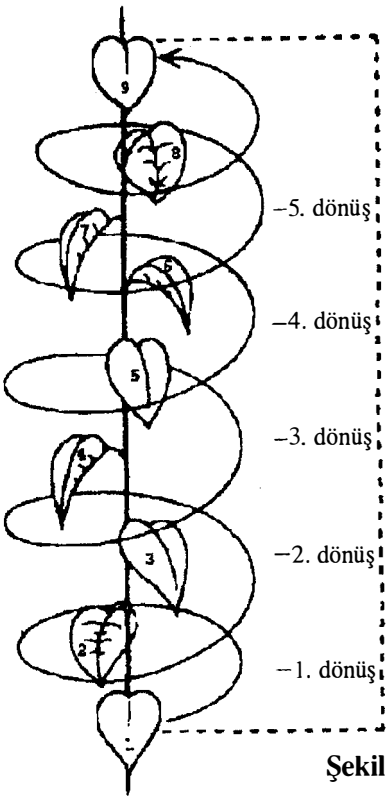
Fibonacci sayışları ile bir bitki (elinize bir bitki alın) üzerindeki yapraklar arasındaki ilişkiyi belirleyebilir misiniz? Fibonacci sayılarının bakış açısından bakarsak, iki nesne gözlemlenir: 1) bitkinin sapında bulunan herhangi bir yapraktan "benzer şekilde konumlanış" bir sonraki yaprağa (yani üzerinde ve aynı yönde) gidene kadar (bitkinini sapının etrafında) geçtiğimiz yaprak sayısı; ve 2) bir yapraktan bir diğer "aynı şekilde konumlanmış" yaprağa gidene kadar yapılan dönüş sayısı. Her iki durumda da bu sayılar, Fibonacci sayılarıdır.

Yaprak düzenlemesi durumunda şu gösterim kullanılır: 3

(*) Bölüm 1.18'e bakınız.

/8 ki anlamı bir sonraki "benzer konumlanmış" yaprağa üç dönüş ve sekiz yaprak sonunda varılmış. Genelde, eğer *r* ile dönüş sayısını, *s* ile de "benzer konumlanmış" yaprağa varana kadar geçilen yaprak sayısını gösterirsek, *r* /*s* phyllotaxis (bitkinin yapraklarının düzeni) olacaktır.

Bu şekilde, bitkinin oranı 5/8'dir.



Şekil 1

Çam kozalakları da bir Fibonacci uygulaması teşkil eder. Kozalaktaki yaprağımsı parçalar, daha az alana sıkıştırılmış, değişik bir yaprak olarak göz önünde bulundurulur. Koza incelenirken, iki spiral göze çarpar; biri sola doğru (saat yönünde) diğeri sağa doğru (saatin tersi yönünde). Spirallerden biri daha sert açılarla yükselirken diğeri daha kademeli hareket eder.

İki spirali de göz önüne alıp sayın. Her iki sonuçta bir Fibonacci sayısıdır. Örneğin beyaz çam kozalağı beş adet saat yönünde sekiz adet de saat yönünün tersinde spirale sahiptir. Başka kozalaklar başka Fibonacci oranlarına sahip olabilir. Eğer şansınız olursa, bir papatyayı veya ayçiçeğini Fibonacci oranları nerede uygulanmış görmek için inceleyin.

Ardıl Fibonacci sayılarının oranlarının Altın Oran'a yaklaştığını fark ettik. (bölüm 5.12'ye bakın)

Eğer ardışık Fibonacci sayılarının oranlarına yakından bakarsak, onların ondalık değerlerini tahmin edebiliriz. Başlardaki Fibonacci oranları;

$2 \div 3 = .666667$
$3 \div 5 = .600000$

Sonra Fibonacci sayılarının dizisi boyunca daha ilerledikçe oranlar *f*'e yakınsamaya başlar:

$89 \div 144 = .618056$
$144 \div 233 = .618026$

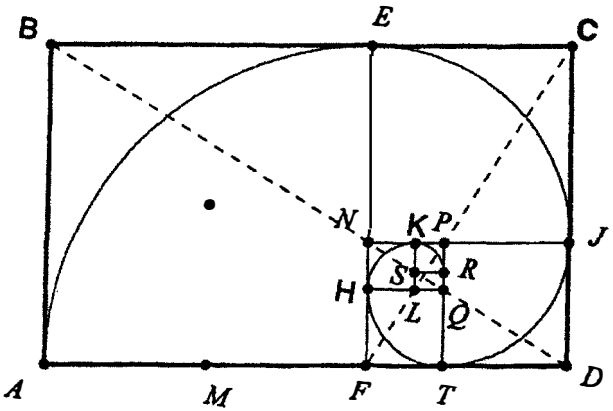
Altın Oran, $f = .\ 6\ 1\ 8\ 0\ 3\ 3\ 9\ 8\ 8\ 7\ 4\ 9\ 8\ 9\ 4\ 8\ 4\ 82\ 0\ 4\ 5\ 8\ 6\ 8\ 3\ 4\ 3\ 6\ 5\ 6\ 4....$

Geometrik olarak, şekil 2'deki B noktası $\overline{AC}$ doğru parçasını Altın Oran $AB\ /\ BC = BC\ /AC \approx 618034$ şeklinde ikiye böler.



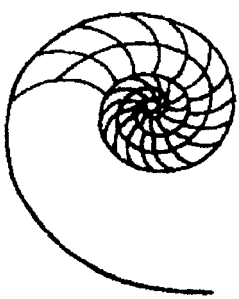
Şekil 2

Şimdi, *en /boy* oranı Altın Orana $e/b = b\ /\ e + b$ eşit olan boyutlarda Altın Dikdörtgen'lerden oluşmuş serileri göz önünde bulunduralım.



Şekil 3

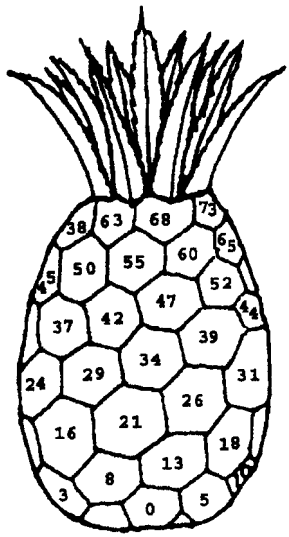
Eğer dikdörtgen $\overline{EF}$ doğru parçası ile bir kare (*ABEF*) ve bir Altın Dikdörtgen (*EFDC*) oluşturacak şekilde ikiye bölünürse ve eğer aynı yöntemle ortaya çıkan Altın Dikdörtgeni bölersek, yukarda gösterildiği gibi çeyrek çemberler çizerek "logaritmik spirali" meydana getirebiliriz. Böyle bir eğriye sıklıkla, çiçeklerdeki tohum düzeninde veya sümüklü böceklerin ve midyelerin kabuklarında rastlanır. Eğer mümkünse, bu spiralleri gösterebilmek için resimlerini bulmalısınız.



Şekil 4

Doğadaki matematiğe bir başka örnek için, ananası düşünebilirsiniz. Burada üç değişik şekilde beşgenlerden oluşmuş spiraller vardır: tek yönde kademeli olarak kıvrılan *5* spiralden oluşmuş bir grup, aynı yönde daha sert açılarla kıvrılan *13*

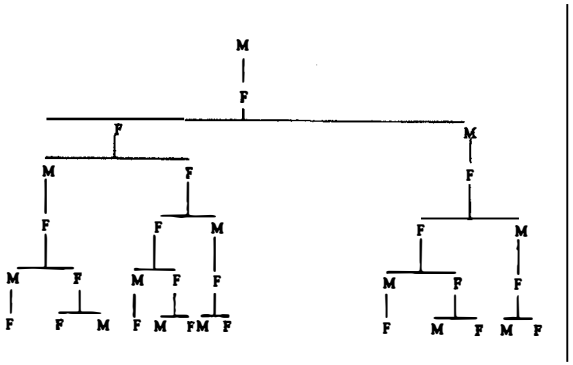
spiralli ikinci grup ve ters yönde kıvrılan *8* spirallik üçüncü grup. Her bir gruptaki spiral sayısı bir Fibonacci sayısıdır. Şekil 5 sıralı biçimde numaralandırılmış pullarla ananasın bir temsilini gösteriyor. Bu sıra her bir beşgenin en alt beşgene göre olan uzaklığına bağlı olarak belirlendi. En alttaki 0 olarak numaralandırıldı; bundan bir üstteki 1 sayısı ile numaralandırıldı. Beşgen 42'nin beşgen 37'ye oranla biraz daha yukarda olduğuna dikkat ediniz.



Şekil 5

Şekil 5'teki üç farklı spirallin en alttan başlayarak birbirleri ile kesiştikleri dikkatinizi çekmiştir. Bir spiral nazik açılar yapan 0, 5, 10 vb. dizisidir. İkinci spiral ise daha dik açılarla ilerleyen 0, 13, 26, vb.'den dizisidir. Üçüncü spiral ise diğer iki spirale göre ters yönde yer alan 0, 8, 16, vb. den oluşan dizidir. Her bir dizideki sayıların ortak farklarını bulmaya çalışabilirsiniz. Bu durumda farklar, 5, 8 ve 13'tür ki bu sayılar, Fibonacci sayılarıdır. Değişik ananaslar değişik dizilere sahip olabilir.

Daha şirin olmaktan ziyade bu uygulamaları daha değişik bir sahaya taşımak için erkek arıların doğumlarını inceleye-



lim. Erkek arıların döllenmemiş dişi arıların da döllenmiş yumurtalardan çıktıkları olgusunu kabul edeceğiz. Aşağıdaki tablo erkek arıların oluşumunun takibinde yardımcı olacak.

Artık bunun bir Fibonacci dizisi olduğu açık değil mi?

Daha önceden de belirttiğimiz gibi Fibonnaci sayılarının sonsuz sayıda uygulaması mevcuttur. Bu sadece bu uygulamaların ortaya çıkardığı heyecana bir örnektir.

8.6 Saatin Kolları

Saat, matematiksel uygulamalar için ilginç bir kaynak oluşturabilir. Diğer disiplinlerdeki genel matematik uygulamalarına nazaran bu uygulamalar daha matematik odaklıdırlar. Matematikle eğlenmek için saatler iyi birer kaynaktır.

Saat 4:00'den sonra akrep ile yelkovanın üst üste geldiği tam zamanı bulmakla işe başlayalım. Bu problemin çözümüne yönelik ilk tepkiniz muhtemelen 4:20 cevabını vermek olacaktır.

Bu doğru değildir; çünkü yelkovan daha hızlı bir şekilde akreple beraber hareket eder. Uyanık bir okuyucu bu bilgiyi

kullanarak cevabın 4:21 ila 4:22 civarında olacağı tahminini yapacaktır. Akrep bir aralık boyunca hareket ederken yelkovan 12 aralık geçeceğini aklımızda bulundurmamız gerekir. Böylelikle akrep 4:21– 4:22 aralığını tam 4:24'te terk eder. Ne var ki bu bizim tam üst üste gelme ile ilgili asıl sorumuzun cevabı değildir.

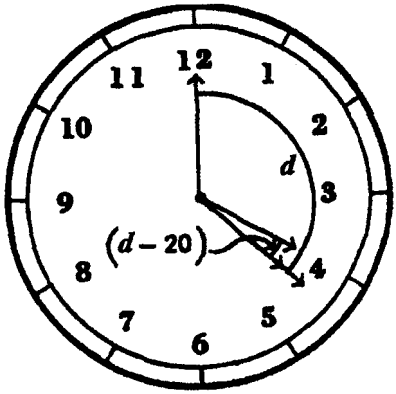
Bu durumu ayrıntılı olarak ele alabilmek için, daha iyi bir teknik geliştirelim. Öncelikle 4:20'nin yanlış cevap olduğunu anlamamız gerekir; çünkü akrep yelkovan hareket ettikçe hareketsiz kalmaz ve yelkovanın hareketine bağlı olarak harekat eder; buradaki hile 20'yi (yani yanlış cevabı) 12/11 ile çarpıp doğru cevap olan 4:21 9/11 elde etmektir.

Kolların hareketini anlamanın bir yolu kolların saatin çevresinde birbirinden bağımsız eş hızlarda hareket ettiklerini düşünmektir. Saat üzerinde dakika aralıkları (bundan böyle aralık diyeceğiz) zamanı gösterdikleri gibi uzaklığı gösterme işine de hizmet ederler. Burada eş hızlarda giden arabalarla benzerlik kurulabilir (ilkokul cebir derslerinde sık görülen sözel sorular için ünlü bir başlık). Bizim için bir otomobilin nispeten daha yavaş giden bir otomobil ile karşı karşıya gelmesi problemine benzer olacak.

Tecrübelerimiz bize saatte 60 mille giden bir araç ile ondan 20 mil ilerde olan ve saatte 5 mille giden başka bir araç ile karşı karşıya gelmesi için gerekli mesafeyi bulma problemi ile benzerlikler kurmanın faydalı olabileceğini göstermiştir.

Şimdi, saat 4:00'ü başlangıç zamanı olarak alalım. Bizim problemimiz tam olarak saat 4:00'ten sonra yelkovanın ne zaman akrebi yakalayacağıdır. Akrebin hızına r diyelim o zaman yelkovanın hızı 12 r olur. Yelkovanın akrebin üzerine gelebilmesi için, aralıklar tarafından belirlenen, mesafeyi arıyoruz.

Bu mesafeye d aralık diyelim. O halde akrebin gideceği mesafe d-20 aralık olacak çünkü akrep yelkovandan 20 aralık önde başlayacaktır.



Bunun için gerekli zaman akrep için $d \div 12r$ ve yelkovan için $d\text{-}20 \div r$ birbirlerine eşittir.(*) O halde $d \div 12r = d\text{-}20 \div r$ ve buradan $d = 12 \div 11 \bullet 20 = 21\ 9/11$ bulunur. Böylelikle, yelkovan akrebi, tam olarak 4:21 9÷11 yakalar.

$d = 12 \div 11 \bullet 20$ ifadesini göz önünde bulundurun. Bu ifadedeki 20 sayısı eğer akrebi sabit kabul etseydik yelkovanın geçmek zorunda kalacağı aralık sayısı idi. Ne var ki açık bir şekilde yelkovan hareketsiz değildir. Böylece bu sayıyı 12/11 sayısı ile çarpmamız gerekiyor, çünkü yelkovan 12/11 kat daha uzağa hareket zorunda. Gelin bu kesre, 12/11, birlikte düzeltme çarpanı diyelim.

Düzeltme çarpanına biraz daha alışabilmek için birkaç kısa ve basit problem seçin. Örneğin saat 7:00 ile 8:00 arasında akrep ile yelkovanın üst üste geldikleri tam vakti arayabilirsiniz. Burada öncelikle, akrebin sabit kaldığını düşünerek, yelkovanın "12" pozisyondan akrebin bulunduğu pozisyona ne kadar yol alacağını belirlemeliyiz. Sonra bu aralıklardan meydana gelen mesafeyi, 35, düzeltme çarpanı, 12÷11, ile çarpmalıyız, sonuç olarak kolların üst üste geldiği tam vaktin 7:38 2÷11 olduğunu buluruz.

Bu yeni uygulama ile ilgili anlayışınızı daha da genişletmek için, kol saati ile elektronik saati karşılaştıran ve her 65

(*) $r \bullet t = d$, yani hız çarpı zamanın bize yolu verdiğini hatırlayınız.

dakikada (elektronik saatle ölçüldüğünde) bir kol saatinin kollarının üst üste geldiğini fark eden birini göz önünde bulundurun. Kol saati daha hızlı mı, yavaş mı yoksa tam mı?

Belki de bu problemi şu şekilde düşünmek istersiniz. Saat 12'de saatin kolları tam olarak üst üste gelir. Bundan önce gösterdiğimiz yönteme göre kollar bundan sonra tam olarak saat 1:05 5÷11 de üst üste gelirler ve yeniden tam olarak 2:10 10÷11 de, bundan sonra tam olarak 3:16 4÷11 de ve böyle devam eder. Her seferinde üst üste gelme pozisyonları arasında 65 5÷11 dakikalık bir aralık vardır. O halde saat 5÷11 dakikalık hata ile saati göstermektedir. Saatin ileri mi, yoksa geri mi kaldığını bulabilir misiniz?

Bundan başka "düzeltme çarpanı" yardımı ile kolaylaşan bazen zor ve bazen de ilginç bir sürü problem vardır. Kolaylıkla kendi probleminizi oluşturabilirsiniz. Örneğin, saat 8:00 ile 9:00 arasında saatin kollarının birbirine dik (aralarında dik açı oluşturacak şekilde) konumlandıkları tam vakittin ne olduğunu bulmaya çalışabilirsiniz.

Aynı şekilde, yelkovanın "12" pozisyonundan sabit akrebe istenen açıyla konumlanabilmesi için geçmesi gereken aralıkları belirleyebilirsiniz. Sonra bu sayıyı düzeltme çarpanı olan 12 ÷ 11 ile çarpıp tam gerçek zamanı elde edebilirsiniz. İlk olarak yelkovanın saat 8:00 ile 9:00 arasında kolların dik açı yaptığı konumu akrep sabit iken bulunuz (burada 25 aralık). Sonra bu 25 sayısını 12÷11 ile çarparsanız, 8:27 3÷11sayısını elde edersiniz ki bu da akrep ile yelkovanın saat 8:00'den sonra dik açı yaptığı ilk konumdur.

Bu konuya cebirsel olmayan bir bakış açısından bakmak isteyenler için, üst üste gelmeler arasındaki 12÷11 düzeltme çarpanını şu şekilde ispatlayabiliriz;

> Öğlen vakti saatin kollarını düşünün. İlerleyen 12 saat boyunca (yani kollar gece yarısı aynı pozisyona gelene kadar) yelkovan 12 dönüş yaparken akrep ile (gece yarısını kapsayan, fakat öğleni içermeyen, öğlen kollar ayrılır ayrılmaz

(gece yarısını kapsayan, fakat öğleni içermeyen, öğlen kollar ayrılır ayrılmaz) başlayan 11 defa üst üste gelecekler.

Her kol sabit bir oranla hareket ettiklerinden, her bir saatin 12/11'de veya 65 5/22 dakikada üst üste gelirler.

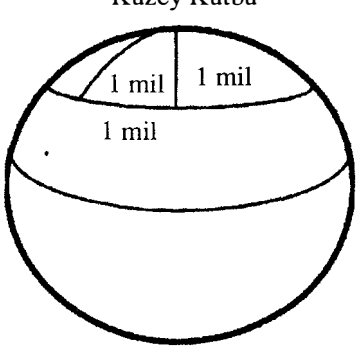
Bu diğer durumlara genişletilebilir.

Normalde çok zor görünen saat problemleri için bu basit prosedürü uygulayarak sonuca ulaşmış olmaktan büyük bir sevinç ve başarı hissi duymuş olmalısınız.

8.7 Dünyada neredesiniz?

Matematikte zihne doyurucu ve hoş bir şekilde jimnastik yaptıran (tabii ki nazikçe) eğlenceler vardır. Bu bölüm bu tür bir konum sunuyor. Nadiren göz önünde bulundurulan birçok matematiksel uzantıları (bunlarla daha sonra ilgileneceğiz) olan oldukça popüler bir bulmacayla başlayacağız. Bu biraz uzun vadede kalıcı etkileri olan "kuşbakışı" bir düşünce tarzını gerektirir. Gelin hep birlikte soruya bir göz atalım:

Dünya üzerinde nerede iseniz, *bir mil* ***güneye***, sonra bir mil ***doğuya*** ve sonra bir de ***kuzeye*** yürüdüğünüzde başladığınız yere dönersiniz?

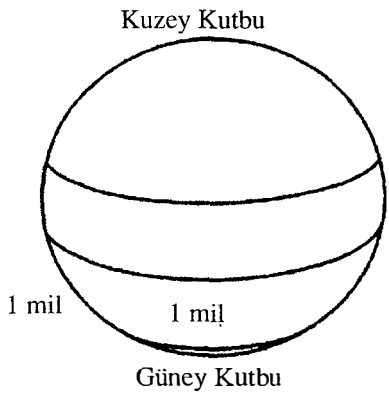


(Açık olarak görüldüğü gibi, ölçüye uygun çizilmemiştir.)

Genellikle, akıllı öğrenciler deneme yanılma yöntemi ile doğru cevabı rahatlıkla bulabilirler: Kuzey Kutbu. Bu cevabı test etmek için, Kuzey Kutbu'ndan harekete başlayın güneye bir mil ve sonra doğuya bir mil hareket edin. Bu sizi Kuzey Kutbu ile arasında bir millik mesafe bulunan enlem çizgisi boyunca harekat ettirir. Sonra bir millik kuzeye hareket sizi, başladığınız yere yani Kuzey Kutbu'na götürür.

Bu problemle önceden karşılaşmış olanlarımız bir tür tamamlanmışlık duygusu hissedebilir. Yine de biz, dünya üzerinde aynı "hareketleri" yaparak başladığımız noktaya dönebileceğimiz başka yerler var mı? diye sorabiliriz. Cevap, birçok insan için şaşırtıcı derecede yetecek kadar çok, evettir.

Güney Kutbu'na en yakın çevresi bir mil olan enlem paralelinde bir çember çizme yardımı ile başlama noktalarından oluşmuş bir küme bulabiliriz. Bu çemberden bir mil kuzeye (doğal olarak büyük çember boyunca) hareket edip bir başka enlem paralelinde çember oluşturun. Bu ikinci enlem paralelinde çember bizim aradığımız özelliklere sahiptir. Gelin hemen deneyelim.



(Açık olarak görüldüğü gibi, ölçüye uygun çizilmemiştir.)

Bu ikinci enlem paralelinde çember üzerinden harekete başlayın (bir mil kuzeyde olanından). Bir mil güneye hareket edin (bu sizi birinci enlem paralelinde çizilmiş çembere geti-

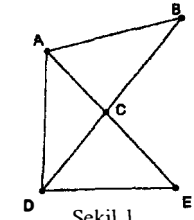
rir) sonra bir mil doğuya hareket edin (bu sizi çember etrafında döndürür) ve sonra da bir mil kuzeye gidin (bu harekette sizi başlangıç noktanıza götürür).

Diyelim ki birinci, bizim çevresi boyunca yürüdüğümüz, enlem paralelinde çizilmiş birinci çemberin çevresi $1\div2$ mil olsun. Yine de verilen direktifleri, bu çemberin çevresini iki defa dönerek, yerine getirebilirdik ve başlangıç noktamıza varabilirdik. Eğer enlem paralelinde çizilmiş birinci çemberin çevresi $1\div4$ mil olsaydı sadece çemberi 4 defa dönecektik ve başlangıç noktasına bir mil kuzeye giderek varabilecektik.

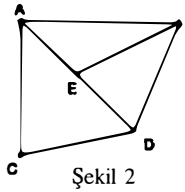
Bu noktada oldukça büyük bir adım atarak bu durumu ilk soruda verilen koşulları sağlayan gerçekte sonsuz sayıda nokta vardır genellemesine götürebiliriz! Bu noktalar kümesi, doğuya 1 millik bir yürüyüşün sizi yine başladığınız noktaya getireceği, Güney Kutbu'na en yakın $1\div n$ uzunluğunda (ki, 1 millik yürüyüş bu durumda n dönüş gerektirir) bir çevreye sahip enlem paralelinde çizilmiş çember tarafından belirlenebilirler. Geri kalan kısım bundan öncekinin aynısı, güneye 1 millik sonrada güneye 1 millik yürüyüş. Kuzey Kutbunun yakınında hareket eden enlem paralelinde çemberler yardımı ile bu durum tekrarlanabilir mi? Elbette.

8.8 Köprüleri Geçmek

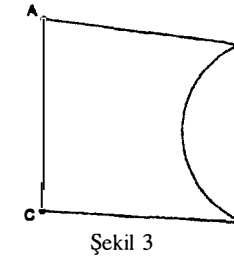
Ünlü Königsberg Köprüleri problemi ağlarla ilgili topolojik problemin çok hoş bir uygulamasıdır. Doğru uygulandığında, matematiğin bir problemi pratik olarak nasıl çözdüğünü gözlemlemek oldukça hoştur. Problemle ile uğraşmaya girişmeden, konu ile ilgili temel kavramları hatırlatmamamız gerekiyor. Baştan sona kadar, aşağıdaki şekillerin üzerinden kurşun kalemle, hiçbir parçalarını atlamadan, aynı yerden iki kere geçmeden ve kaleminizi kaldırmadan geçmeye çalışın. Her bir şekil için, A, B, C, D, E noktaları bitiş noktaları olan yay veya doğru parçalarının sayısını belirleyin.



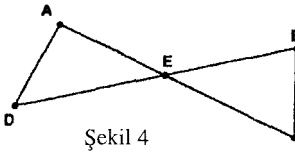
Şekil 1



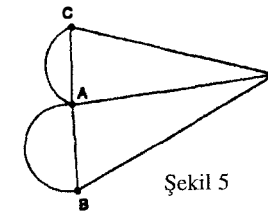
Şekil 2



Şekil 3



Şekil 4



Şekil 5

Yukarıdaki beş şekil gibi doğru parçalarından ve / veya sürekli yaylardan oluşan yapılara ağ denir. Belirli bir tepe üzerinde bitiş noktası bulunan yay veya doğru parçalarının sayısına o tepeninin derecesi denir. O halde bir noktada üç doğru parçası veya yay birleşirse, bu noktanın (tepenin) derecesi 3'tür.

Bu ağlar üzerinde kurşun kaleminizi alıp, kaleminizi kaldırmadan ve aynı çizgi üzerinden birden fazla geçmeden şekil üzerinde hareket ettiğinizde, iki direkt çıktı ile karşılaşırsınız. Ağlar eğer 1) tepelerinin derecesi çift sayı ise veya 2) tek sayılı tam iki tepeye sahipse, üzerlerinden bu koşullarda hareket edilebilir. Bu iki ifade bunu anlatmaktadır:(*)

1. *Bağlantılı bir ağda çift sayıda, tek sayıda tepe derecesine sahip tepe vardır.*

2. *Bağlantılı bir ağ, eğer en çok iki adet tek dereceli tepeye sahipse, üzerinden geçilebilir.*

(*) Bu teoremlerin ispatı A.S. Posamentier ve J Stepelman *Teaching Secndry School Mathematics : Technics and Enrichment Units*, 6th ed. (Columbus,Ohio: Prentice Hall ÷ Merill,2002) kitabında bulabilirsiniz.

Bu iki teoremi kullanarak üzerinden geçilebilen veya geçilemeyen ağlar çizmeğe çalışabilirsiniz.

Şekil 1'deki ağ, beş adet tepeye sahip. *B*, *C* ve *E* tepelerinin derecesi, bu noktalara çift sayıda çizgi gittiğinden, çift sayı ve *A* ve *B* tepelerinin derecesi, bu noktalara üç çizgi gittiğinden, tek sayılıdır. Şekil 1, tam iki adet tek sayıda tepe derecesine sahip olduğundan ve diğer tepelerinin dereceleri çift olduğundan, bu üzerinden geçilebilirdir. Eğer *A* tepesinden başlar, sonra aşağı *D* tepesine gider, sonra karşısındaki *E* tepesine geçer, tekrar *A* tepesine döner ve onun karşısındaki *B* tepesine geçer ve son olarak da hareketimizi *D* tepesinde bitirirsek, istenen rotayı seçmiş oluruz.

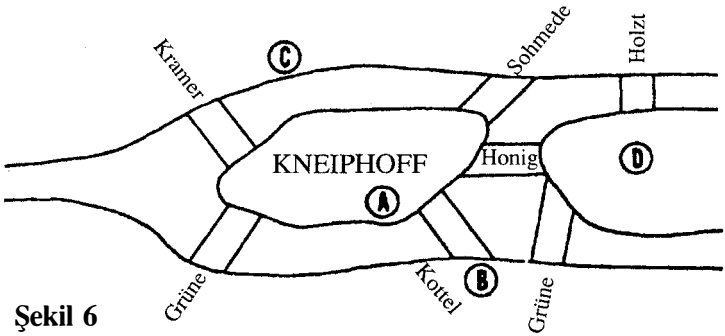
Şekil 2'deki ağ, beş tepeye sahip. *C* tepesi çift sayı dereceli tek tepe. *A*, *B*, *E* ve *D* tepelerinin dereceleri tek sayı. Sonuç olarak, ikiden fazla tek sayı dereceli tepeye sahip olduğundan bu ağ üzerinden geçilemez.

Şekil 3'deki ağ üzerinden geçilebilir, çünkü iki adet çift sayı dereceli tepeye ve tam iki adet de tek sayı dereceli tepeye sahip.

Şekil 4'deki ağ, beş adet çift sayı dereceli tepeye sahip, dolayısıyla üzerinden geçilebilir.

Şekil 5'teki ağ, dört adet tek sayı dereceli tepeye sahip ve bu yüzden üzerinden geçilemez.

Konuyu daha da ilginçleştirmek için, ünlü Königsberg Köprüleri problemini göz önünde bulundurun. On sekizinci yüzyılda Pregel Nehri'nin iki kola ayrıldığı yerde konumlanmış küçük Alman kenti Königsberg, ilginç bir ikilem ile karşı karşıya kaldı: Bir kişi yedi köprü üzerinden tam bir kez geçerek şehir boyunca bir gezi gerçekleştirebilir mi?



Şekil 6

1735'de ünlü matematikçi Leonhard Euler (1707-1783) böyle bir gezinin gerçekleştirilemeyeceğini ispatladı. Bundan sonraki açıklamalarımız, önceki ağ çalışmamız ile Königsberg Köprüleri probleminin çözümünü birbirine bağlayacaktır.

Öncelikle adayı A harfi ile göstereceğiz, nehrin sol yakasını B ve sağ yakasını da *C* harfi ile nehrin kolları arasında kalan diğer bölgeyi de *D* harfi ile belirteceğiz. Eğer Holtz'tan başlayıp Sohmede'ye ve sonra Honig, Kottel ve Grüne üzerinden geçersek, asla Kramer üzerinden geçemeyiz. Diğer yandan Kramer'den başlayıp Honig'e doğru yürüsek sonra Hohe, Kottel ve Sohmede ve Holt üzerinden geçersek, asla Grüne üzerinden geçemeyiz.

Königsberg Köprüleri sorusu, sayfa 278'de şekil 5'teki problemle aynıdır. Gelin birlikte şekil 5 ve şekil 6'ya benzerlikleri belirlemek için bir göz atalım. Şekil 6 da yedi köprü var ve şekil 5'te yedi adet doğru parçası ve yay mevcut. Şekil 5'te her tepenin derecesi tek sayı. Şekil 6'da eğer *D* konumundan başlarsak üç adet seçme şansımız vardır: Hohe, König veya Holtz. Şekil 5'te eğer *D* tepesinden başlarsak gitmek için seçmemiz gereken üç ayrıntımız vardır. Benzer durum şekil 5'te ki *A* ve *B* tepesi ile şekil 6'da ki *A* ve *B* konumları arasında da vardır. Bu ağ üzerinden geçilemez.

Köprüleri ve adaları bir ağ problemine dönüştürmek aracılığı ile bu soruyu rahatça çözebiliriz. Bu matematikte prob-

lem çözmekte kullanılan zekice bir yöntemdir. Problemi daha rahat kontrol edebileceğiniz bir duruma getirebiliriz.

8.9 En Çok Yanlış Anlaşılan Ortalama

Şüpheci olmayan birçok okura, ortalama gidiş hızı saate 30 mil ve dönüş hızı saate 60 mil olan bir turun ortalama hızı sorulunca, tüm yolculuk boyunca ortalama hızın saate (30+60 ÷ 2=45 şeklinde hesaplanan) 45 mil olduğunu düşüneceklerdir. İlk görevimiz okuyucuyu bunun yanlış cevap olduğuna ikna etmektir. Yeni başlayanlar için, iki hızı eşit "ağırlıkta" değerlendirmenin adil olduğuna mı inanıyorsunuz? İki hıza farklı uzunluktaki zaman sonucunda ulaşıldığını fark edebilirsiniz ve gördüğünüz gibi bu hızlar, eşit ağırlıkta değildir. Bu sizi daha yavaş, saatte 30 mille, hareket eden diğerine göre iki kat daha uzun zamanda bu yolu kat edecek, o halde turunu ortalama hızında iki kat ağırlığa sahip olacak. Bu bizi şu hesaplamaya götürür: 30+30+60 ÷ 3 = 40 ki bu da doğru cevaptır.

Bu açıklama ile ikna olanlar, "eve" biraz daha yakın bir şeyler deneyin. On testin dokuzundan dönem boyunca %100 yapmış ve sadece birinden %50 yapmış bir öğrencinin ne hak ettiğini değerlendirme sorusu sorulabilir. Öğrencinin performansını %75(yani 100+50 ÷ 2) olarak değerlendirmek adil midir? Bu öneriye karşı gösterilen tepkiler, iki nota uygun ağırlıkları eklemek şeklinde olacaktır. %100, %50'ye nazaran dokuz kez daha fazla alınmıştır, o yüzden uygun ağılığı almalıdır. O halde öğrencinin notu için uygun hesaplama 9(100)+50 ÷ 10 =95 şeklinde olmalıdır. Bu oldukça adil görünmektedir.

Şimdi dikkatli okuyucu, "Eğer oranlar birbirlerinin bir katı değilse ne olur?" diye sorabilir. Yukarıdaki hız probleminde, "*gidiş*" ve "*dönüş*" zamanı toplam zamanı elde edebilmek amacıyla bulunabilir ve sonra toplam yol ile birlikte "toplam hız", ki bu aslında ortalama hızdır, bulunabilir.

Aslında bundan daha etkin bir yöntem vardır ve bu bölümün an konusu budur. Harmonik dizinin(*) ortalaması olan harmonik ortalama adında yeni bir kavram tanıtacağız. Harmonik ismi belki de, harmonik dizinin 1/2, 1/3, 1/4, 1/5, 1/6, 1/7, 1/8,... şeklinde olduğundan ve eğer biri eline gitar tellerini alıp bu bağlantılı uzunluktaki bu telleri birlikte çalarsa armonik bir ses çıkacağından ötürü konulmuştur.

Bu sıklıkla yanlış anlaşılan ortalama (yani harmonik ortalama) biraz kafa karışıklığına neden olabilir. Bu durumdan kurtulmak için, bunun bize oran sorulduğunda kullanıldığını unutmamamızdır. Aynı taban üzerinde harmonik ortalama hesaplamak için kullanışlı bir formüle sahibiz. Yukarıdaki durumda, ortalamasını bulmak amacıyla sorulan hız oranları eş uzaklık (bir turun iki ayağı) ki bu eş taban, için geçerliydi.

a ve *b* gibi iki oran için harmonik ortalama:

$$\frac{2ab}{a+b}$$

ve *a*, *b*, *c* gibi üç oran için harmonik ortalama $3abc \div ab+bc+ac$'dır.

İlerledikçe sistemin nasıl bir değişim gösterdiğini anlayabilirsiniz, böylelikle *a*, *b*, *c*, *d* şeklindeki dört değer için harmonik ortalama;

$4abcd \div abc+abd+acd+bcd$ dır.

Bunu yukarıdaki hız problemine uygularsak bize şu sonucu verir:

$2 \cdot 30 \cdot 60 \div 30+60 = 3600 \div 90 = 40$

Gelin, şimdi hep birlikte şu problemi düşünelim:

(*) Harmonik dizi paydasındaki terimleri aritmetik (artarda gelen terimler arsındaki, farkın sabit olduğu dizi) bir dizi oluşturan dizidir. Aritmetik dizinin ortalamasının tersi ilgili harmonik dizinin ortalamadır ve buna harmonik ortalama adı verilir. Harmonik ortalamayı tanımlamanın bir diğer yolu da verilen sayıların terslerinin ortalamalarının (yani aritmetik ortalama) tersleridir.

Pazartesi günü bir uçak New York'dan kalkıp ve Washington'a saatte 300 millik bir hızla (hiç rüzgâr yok) gidiş dönüş sefer yapar. Diğer gün, yani salı günü, sabit hızla (saatte 50 millik hızla) rüzgâr (New York yönünden Washington istikametinde) esmektedir. Pazartesi yaptığı eş hızla salı günü gidiş-dönüş seferini tekrarlıyor. Salı günkü yolculuk daha az mı, daha çok mu yoksa eş zaman mı alır?

Bu problem yavaşça ve dikkatlice çözülmelidir; hemen değişen tek şeyin 'rüzgârın desteği ve kösteği olduğunu görürüz'. Diğer bütün kontrol edilebilen faktörler aynı: uzaklık, hız ayarları, uçağın durumu vb... Beklenen cevap, aynı rüzgâr turun iki ayağından birinde hızı arttırıp, diğerinde de aynı hızda yavaşlattığından iki gidiş dönüş uçuşunun da aynı olması gerektiğidir.

"Rüzgârlı uçuş" sırasında uçuşun iki ayağının değişik hızlarda yapılıyor olması, bu uçuş hızlarının eşit ağırlıklara sahip olmadığı fikrini ortaya çıkarır, çünkü değişik zaman uzunluklarında gerçekleşmişlerdir. O halde, her bir ayak için zaman hesaplanmalı ve uygun bir şekilde ilgili hızla oranlanmalıdır.

"Rüzgârlı uçuş" için harmonik ortalama kullanarak ortalama hızı bulabiliriz.

Harmonik ortalama $(2)(300+50)(300-50) \div (300+50)+(300-50) = (2)(350)(300) \div 250+350 = 291.667$

ki bu görüldüğü gibi rüzgârsız uçuşa nazaran daha az bir hız. Oldukça şaşırtıcı!!!

Ortaya koyulan bu durum sadece kullanışlı bir konu olmakla kalmıyor, ayrıca sizi oldukça önemli bir kavram olan ağırlıklı ortalama fikrine karşı duyarlı kılmaya yardımcı oluyor.

8.10 Pascal Üçgeni

Muhtemelen sayıların en ünlü üçgensel düzenlemesi Pascal –Blaise Pascal (1623-1662) anısına bu isim verilmiştir– üçgenidir. Her ne kadar bundan önce olasılıkla beraber anlatılmış olsa da, bu alan dışında da birçok ilginç özelliği vardır. Pascal üçgenini daha yakından tanıyabilmek için kendinizin de bir tane oluşturmanızı öneriyorum.

1 ile başlayın sonra altına 1, 1 ve bundan sonraki her satıra 1 ile başlayıp 1 ile bitirin; üstte sağdaki ve soldaki sayıları birbiriyle toplayıp diğer sayıları elde edin. Bu şekilde yaptığımızda, aşağıdaki gibi bir şekle sahip olacağız:

1
1 1
1 1+1 1
1 1+2 1+2 1
1 1+3 3+3 1+3 1

ki bu sonra şöyle olur:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1

Pascal üçgeninin daha geniş bir hali aşağıdaki gibidir:

1
1 1
1 2 1
1 3 3 1
1 4 6 4 1
1 5 10 10 5 1
1 6 15 20 15 6 1

```
          1     7    21    35    35    21     7     1
       1     8    28    56    70    56    28     8     1
    1     9    36    84   126   126    84    36     9     1
 1  10   45   120   210   252   210   120    45    10     1
```

Olasılık da, Pascal üçgeni takibi örnek sonucunda ortaya çıkmıştı. Para atışı yapacağız ve her bir olayın meydana gelme sıklığını hesaplayacağız.

ATILAN PARA SAYISI	TURA SAYISI	GRUPLAMA SAYISI
1 PARA	1 TURA	1
	0 TURA	1
2 PARA	2 TURA	1
	1 TURA	2
	0 TURA	1
3 PARA	3 TURA	1
	2 TURA	3
	1 TURA	3
	0 TURA	1
4 PARA	4 TURA	1
	3 TURA	4
	2 TURA	6
	1 TURA	4
	0 TURA	1

Her bir para atışı sonucunda, grupların sayısı Pascal üçgeninin bir satırına tekabül eder. Bu, para atışında, bizi tam olarak olasılıkları belirlemeye götürür. Örneğin, dört para atışı sonucunda tam olarak iki tura gelmesi olasılığı $6 \div 1 + 4 + 6 + 4 + 1 = 6 \div 16 = 3 \div 8$ dir. Siz de bu sonucu, para atışlarını ve bu atışlar sonucu oluşan tablolar yardımı ile araştırmalısınız.

Pascal üçgenini gerçekten olağanüstü kılan şey, onun matematiğin hemen her dalında karşımıza çıkmasıdır. Pascal üçgeninde, oldukça fazla sayıda sayı ilişkisi sergilenmektedir. Sırf eğlence için, burada bunlardan bazılarından bahsedece-

ğiz. Burada birkaç tanesini gözlemledikten sonra, belki siz de Pascal üçgeninin bazı özelliklerini bulmaya çalışabilirsiniz.

Pascal üçgeninin satırlarındaki sayıların toplamı 2'nin kuvvetlerini verir.

1.....2^0
1 1.....2^1
1 2 1.....2^2
1 3 3 1.....2^3
1 4 6 4 1.....2^4
1 5 10 10 5 1.....2^5
1 6 15 20 15 6 1.....2^6
1 7 21 35 35 21 7 1.....2^7
1 8 28 56 70 56 28 8 1.....2^8
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1.....2^9
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1 2^{10}

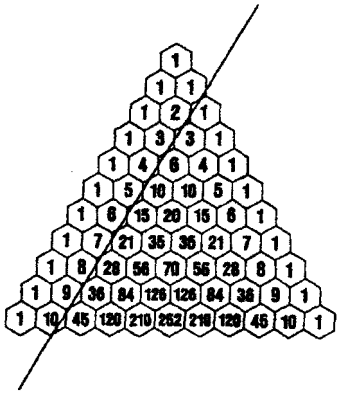
Eğer her bir satırdaki sayıyı bir basamak olarak kabul edersek, yani 1; 11; 121; 1331...vb (ta ki altıncı satırdan sonrasını yeniden gruplayana kadar) 11'in kuvvetlerini bulursunuz.

1.....11^0
1 1.....11^1
1 2 1.....11^2
1 3 3 1.....11^3
1 4 6 4 1.....11^4
1 5 10 10 5 1.....11^5
1 6 15 20 15 6 1.....11^6
1 7 21 35 35 21 7 1.....11^7
1 8 28 56 70 56 28 8 1.....11^8
1 9 36 84 126 126 84 36 9 1.....11^9
1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1 .....11^{10}

Bir sonraki diyagramda çizilen eğik çizgi, doğal sayıları gösterir. Çizginin sağ tarafında ise (ona paralel) üçgensel sayıla-

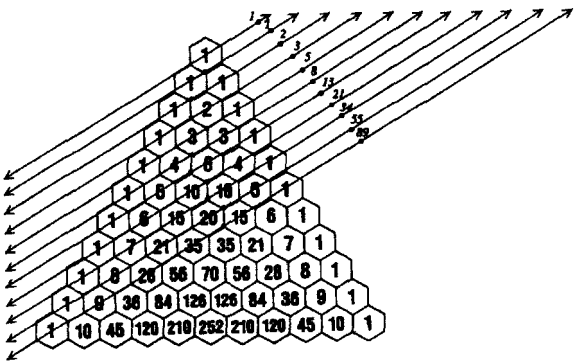
rı fark ederiz:1, 3, 6, 10, 15, 21, 28, 36, 45,...

Üçgenden, üçgensel sayıların, doğal sayıların toplamından nasıl ilerlediğini anlayabiliriz. Belirli bir noktaya kadar olan doğal sayıların toplamı basitçe, o sayının altına ve sağına bakmakla bulunabilir (yani 1'den 7'ye kadar olan doğal sayıların toplamını bulmak için 7'nin altına ve sağına bakmamız yeterlidir ki burada da 28 sayısı bulunur).



Şimdi tam kare sayıları bulmaya çalışalım. Bunlar art arda gelen üçgensel sayıların toplamı şeklinde Pascal üçgeni içine gizlenmişlerdir: 1 + 3 = 4, 3 + 6 = 9, 6 + 10 = 16, 10 + 15 = 25, 15 + 21 = 36, vb.

Ayrıca bu tam kare sayılarla dörtlü grupların (içine gizlenmiş) toplamında da karşılaşabilirsiniz:1 + 2 + 3 + 3 = 9, 3 + 3 + 6 + 4 = 16, 6 + 4 + 10 + 5 = 25, 10 + 15 + 6 = 36... vb



Yukardaki Pascal üçgeninde çizilmiş doğrular üzerindeki sayıları topladığınızda, bu sayıların, Fibonacci sayıları olduğunu fark ettiğinizde gerçekten çok şaşıracaksınız:

1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 55, 89, 144,...(bölüm 1.18'e bakınız)

Pascal üçgeninde gizli birçok sayı vardır. Beşgensel sayıları bulmaya çalışın: 1, 5, 12, 22, 35, 51, 70, 92, 117, 145,... (bakınız 1.17) Arazi oldukça verimi. Bu sayıların üçgensel dizilimi dahilinde daha fazla hazineler bulma olasılığı sınırsız.

8.11 Her Şey Göreli

Bilim adamı olmayanlar için görelilik pek de anlaşılabilen bir kavram değildir. Her ne kadar Albert Einstein ile özdeşleşmiş olsa da, birçok farklı uygulamaları vardır. Bazıları için anlaşılması güç bir kavram olabilir, bu yüzden yavaşça ilerledikçe sabır ve destek idmanı yapacağız. Aşağıdaki problemle başlayalım:

> David akıntıya karşı kürek çekerken, teknenin kenarından tıkacını düşürür ve 10 dakika daha kürek çekmeye devam eder. Sonra tıkacı geri alabilmek amacıyla döner, tıkaç akıntı yönünde 1 mil ilerlemişken onu bulur. Akıntının hızı nedir?

Bu soruya cebir derslerindeki gibi geleneksel yöntemle yaklaşmaktansa, olayı şu şekilde düşünün: problem görelilik fikri yardımı ile oldukça basitleştirilebilir.

David'i akıntının bulması ve yönünde taşıması veya akıntı olmaması önemli değildir. Biz sadece David ile tıkacın ayrılması ve bir araya gelmesi ile ilgileniyoruz. Eğer akıntı olmasaydı, David'in tıkaca doğru kürek çekmesi, tıkaçtan uzaklaşırken kürek çekmesi ile aynı vakti alacaktı. O halde 10 + 10 = 20 dakikaya ihtiyaç duyacaktı. Tıkaç bu 20 dakika

içersinde 1 millik bir yol kat ettiğinden, akıntının saate ki hızı 3 mildir.

Yine de bu bazıları için anlaşılması kolay olmayan bir kavramdır ve en iyisi onları sakince düşünebilmeleri için yalnız bırakmaktır. Günlük yaşamdaki düşünme işleminde birçok uygulama kullanışlı uygulama alanına sahip olduğundan, anlamak için çaba harcamaya değen bir kavramdır. Bu, matematiği öğrenmenin amaçlarından biridir zaten.

8.12 Genellemeler İspat Gerektirir

Birbiriyle tutarlı bir sürü örneğin sizi genellemelere götürmesi oldukça teşvik edici olabilir. Birçok durumda genellemeler doğrudur, ama olmak zorunda da değildir. Carl Fredrich Gauss, zekâsını sayılar arasındaki ilişkileri akıldan bulmayı ve hesaplamayı bazı teorilerini oluştururken kullanmasıyla bilinirdi. Sonra bu varsayımlarını ispatladı ve matematik alanına yaptığı katkılar efsanevi bir boyuta ulaştı. Sırf birçok örnek yapıya uyuyor diye sonuçlar çıkarmadan önce oldukça tedbirli davranmalısınız. Örneğin, birden büyük her tek sayının bir asal sayı ve 2'nin bir kuvveti olarak yazılabileceğine dair bir inanç vardı. İlk birkaç durumu incelediğimizde, bu varsayımın geçerli olduğunu görürüz.

$$3 = 2^0 + 2$$
$$5 = 2^1 + 3$$
$$7 = 2^2 + 3$$
$$9 = 2^2 + 5$$
$$11 = 2^3 + 3$$
$$13 = 2^3 + 5$$
$$15 = 2^3 + 7$$
$$17 = 2^2 + 13$$
$$19 = 2^4 + 3$$

.
.
$51 = 2^5 + 19$
.
.
.
$125 = 2^6 + 61$
$127 = ?$
$129 = 2^5 + 97$
$125 = 2^7 + 3$

Bu durum 125'e kadar test ettiğimiz bütün sayılar için geçerliydi idi, fakat 127'ye vardığımızda hiçbir çözüm yoktu. Sonra ki sayılar için bu böyle devam etti. O halde, bu genellenemez. Sonuçlara varmadan önce dikkatli olmak gerekiyor özellikle de bir ispat yapamamışsak. Bu erken sonuçlara varmakla ilgili iyi bir örnek. Her şeyin ötesinde öğreticidir.

Sön Söz

Eğer hiçbir başlığı atlamadan buraya kadar okumayı başardıysanız, matematiğe geri kazandırılmışsınız demektir. Hatta bazı bölümleri atlayanlar bile matematiğin güzel olduğuna ikna olmuş olmalıdırlar. Her şeyin dışında bu kitabın amacı bunu ispatlamaktı. Kitabın girişinde de, bu kitabın matematikte zayıf olmanın moda olduğu fikrini silmek amaçlı yapılandırıldığını söylediğimi hatırlarsınız. Matematik dışında hiçbir ders için insanlar eksikliklerini kadar kolay dile getirmezler. Tüm ilköğretim müfredatını ve her alan için toplumda matematiksel anlamda zarar görmüş olanları bile teşvik edecek kolay anlaşılan örnekleri seçerek bu kitabın içine dahil ettik. Gauss matematiğe bilimlerin kraliçesi(*) derken, o, diğer disiplinlerdeki bilim adamlarının onu kendi alanlarındaki kullanışlılığına göre değerlendirebilecekleri bir bilim hizmetçisidir demek istememiştir. Bu kitabı okurken, matematiğin diğer disiplinler için kullanışlılığından çok, kendi içinde hayranlık uyandıran bir bilim olduğunu fark etmişsinizdir. Yine de toplumumuzda matematiğin çalışma alanlarının başında gelmesinin sebebi onun kullanışlılığıdır, fakat eğer onun doğal yapısındaki güzelliği matematiği çekici kılarsa, çok daha kolay ve etkin bir şekilde öğretilebilir.

(*) Carl Friedrich Gauss(1777-1855), tüm zamanların en büyük matematikçilerinden biri, geçekte "Matematik Bilimlerin Kraliçesidir ve Aritmetik de Matematiğin Kraliçesidir. Genelde astronomi ve diğer doğa bilimlerine yardım da bulunacak kadar alçak gönüllülük etse de birinci sıra daima ona aittir."

Matematiğin doğal güzelliğini gösterme çabası, birçok değişik şekilde ortaya konuldu. İlk olarak, iyi saklanan sırlar haline gelmiş ve düşünme işleminin diğer değişik şekillerini gösterme amacıyla sunduğumuz, oldukça hoş aritmetiksel anlamda zekice işlemler vardı. Sayı sistemimiz dahilindeki gariplikler bizlere gerçekten ilginç sayı yapıları veya neredeyse açıklanamaz görüngüler sundular. Bunlar matematikte gerçekten hoş şeyler olduğunu ispatlamak ve sizleri hoşnut kılmak amacıyla sunulmuştur. Buna ek olarak, matematiğin oldukça değişik, görünürde birbiriyle ilgisiz kolları arasında beklenmedik bağlantılarla karşılaşmak, her zaman için oldukça ilgi çekicidir. Örneğin, matematiğin birçok alanını birbiriyle bağlayan, Fibonacci sayıları, altın oran ve Pascal üçgeni bu zengin disiplinin içten bağlantılarını ortaya çıkarıyor. Beklenmedik fikri üzerinde dururken, daha geniş bir bakış açısına dayalı bir düşünme şekliyle sunulan bölüm 4'teki problemler, bazı problemlerin yerlerini nasıl zekice çözümlere –öyle çözümler ki okuyucuyu hayretler içinde bırakmakla kalmayıp ayrıca onu bu değişik teknikleri uygulayabileceği örnekler aramaya çalışmaya da teşvik etmiştir– bıraktığını göstermiştir.

Geometri ile ilgili bölüm, matematiğin görsel güzelliğini takdir edebileceğimiz bir bölümdür. Değişkenler şaşırtıcı şekillerde ortaya çıkarlar. Elbette ki, bunlar en iyi, hareketli gösterimlere imkân sağlayan Geometer's Sketchpad gibi bilgisayar programları ile görülebilir.

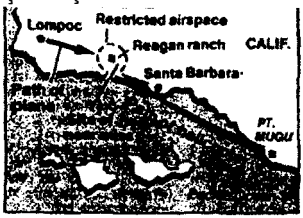
Mümkün olduğunca (ve uygun oldukça) tarihsel notlar verildi; böylelikle bu harika fikirlerin bir çoğu tarihsel bağlamda değerlendirilebilir. İnsan varlığı, matematik tartışmalarına dahil olduğunda, her zaman ilginç bir şeyler vardır.

Artık matematiği sevmeğe başladığınıza göre (son söze kadar ulaşmış olmanız bunun bir kanıtıdır), matematikle ilgili kitaplar toplamaya, onları okuyup referans kaynağı olarak saklamaya başlamalısınız. Matematiğe karşı artan sevginizin peşinden ayrılmadıkça sizi daha ileri götürecek, eğlenceli

matematikle ilgili birçok kitap vardır. Günlük gazetelerde matematiğin uygulamalarıyla ilgili ustaca bir liste yaparak kendinizi denemeyi alışkanlık haline getirebilirsiniz. Bunlar, bir gazetecinin çıkarımları, sunulan verilerin bir özeti, (yanlış) kullanılan veriler sonucu çarpıtılan bir hikâye veya bazen yazarın yazdığının tam tersi anlama gelebilecek verilerin yanlış değerlendirmeleri olabilirler. 1987 yılında, *New York Times*'ı kızımla beraber okurken, Pisagor teoremini dayanak alan gazetecinin yaptığı bir hata ile karşılaştık. Kızım editörlere bir düzeltme yazısı göndermemde ısrar etti, ki ben de onu dinledim. Burada hem makaleyi, hem de yazdığım mektubu bulabilirsiniz. Bu beni sonradan oldukça dikkatli bir gazete okuyucusu yaptı. Ne zaman bir hata ile karşılaşsam, cevap vermekte oldukça hızlı davranıyorum. Kitabın girişinde de belirttiğim gibi bu kitap *New York Times*'a 2 Ocak 2002 tarihinde yazdığım yorumlarıma karşılık gelen beş yüz mektup sonucunda yazıldı. Umarım bu, diğerlerine de, gazete okumaları ve matematiği doğru tutabilmek için uygun olduğu yerde önerilerde bulunmaları için model oluşturur. Artık bu yeni oluşturulmuş matematik gücünüzle, bu sizden beklenen en az şeydir.

Reagan Çiftliği üzerinde kıl payı

Çizim şematiktir



Başkanın Helikopteri, çiftliğe giderken, Santa Barbara hava alanındaki kontrol kulesi, küçük bir uçağın onlara doğru yaklaştığını haber verdi. Helikopter pilotu uçağı 1 1 ÷ 2 mil önde fark etti ve sağa doğru hafif bir dönüş yaptı.

300 feet

Piper Archer, Başkan'ın çiftliğinin 150 fit üzerinde yasak hava sahasında uçuşuna devam etti. Helikopterin 200-300 fit solundan ve 150 fit altından geçti.

150 feet

The New York Times/John Lehmann/Aug. 13, 1987

Federal Havacılık Kurumu Reagan'ın Helikopterini Kıl Payı Sıyıran Pilotun Lisansını İptal Etti

Muhabir
Steven V. Roberts

New York Times özel haberi

Federal havacılık kurumu(*) "ciddi güvenlik tehdidi" gerekçesiyle, bugün Başkan Reagan'ın helikopterinin 200 fit yakınında uçan küçük uçağın pilotunun lisansını iptal etti. Pilotun, er olarak tanımlandığı ve.... ■

New York Times'ın 15 Ağustos 1987'de ön sayfasında çıkan makalenin bir bölümü

Kokpitte Pisagor'un Önemi

Editöre:

Muhtemelen matematik öğretmenlerine en çok sorulan sorular, "Neden bunları öğrenmek zorundayız?" ve "Bunları nerede kullanacağız?"dır. Her ne kadar cevap, "*New York Times*' da hata düzeltmek" için olmasa da, öğrencileri eleştirel okumaya yöneltmek ve sadece basılmış bir sayfada yayınlandı diye, her yazılanın direkt kabul etmemeyi öğretmek açısından büyük rol oynar.

15 Ağustos tarihinde ön sayfanızda çıkan haberde, Santa Barbara üzerinde özel bir uçağın Başkan Reagan'ın uçağını "200 fit" dahilinde kıl payı kaçırdığını yazmıştınız. Yayınladığınız diyagramın başlığında uçağın helikopterin, minimum 200 fitlik yatay uzaklıkla "200-300 fit solundan geçtiğini" yazmıştınız. Hipotenüsü uçağı helikoptere ile arasındaki gerçek uzaklığı verecek olan, 150 fitlik dikey uzaklık ile bir dik üçgen oluşur. Lise matematiğinden birçok kişinin hatırlayacağı Pisagor teoremini ($a^2 + b^2 = c^2$) uygularsak, bu uzaklığın 250 fit, "200 fit civarından daha fazla" olduğunu buluruz.

Bu, matematiğin değerini sorgulayan öğrencilere matematik öğretmenlerinin (hatta ebeveynlerin) dikkat çekmesi gereken türde bir şeydir.

Alfred S. Posatmnetier
Matematik Profesörü ve
City College Eğitim Okulu Yardımcı Dekanı
New York 15 Ağustos 1987

New York Times'a cevap olarak yazdığım 30 Ağustos 1987 tarihli yazı.

Sözlük

ALFAMETİK: Kelime kümelerinin geleneksel aritmetik işlemleri biçiminde yazıldığı bir çeşit matematik bulmacası; burada alfabenin harflerinin, işlemin doğruluğunu sağlayacak şekilde rakamlarla yer değiştirmesi gerekmektedir.

ALGORİTMA: Belli bir sayıda adım ile mekanik olarak bir problemi çözme prosedürü.

ALTIN ORAN: Bir doğru parçasının iki bölümü arasındaki belli bir orantı. Küçük parçanın büyüğe oranı, büyük parçanın bütün doğru parçasına oranına eşitlenir ve bu oran $\approx .618033988$'e eşittir.

ARALARINDA ASAL: 1'den başka ortak çarpanı olmayan sayılar.

ARKADAŞ (DOST) SAYILAR: Biri diğerinin öz bölenlerinin toplamına eşit olan iki sayı.

ARİTMETİK DİZİ: İlk eleman dışındaki diğer elemanların arasındaki farkın sabit olduğu sayı dizisi.

ARİTMETİK SERİ: Bir aritmetik dizideki terimlerin toplamı. Bunun formüllerinden biri şudur: $S = n/2\,(a+l)$; S, toplam; n terim sayısı; a ilk terim ve l son terimdir.

ASAL SAYILAR: Kendisinden ve 1'den başka sayıya bölünemeyen sayı.

BENZER ÇOKKENARLILAR: Aynı şekle, fakat farklı büyüklüğe sahip olabilen çokkenarlılar.

BİLEŞİK SAYI: Bir ve kendisinden başka en az bir sayıya daha bölünebilen tam sayı. Bu aynı zamanda 1 dışındaki asal olmayan bir sayıdır da.

BİR ÇEVRE AÇININ KEŞİŞTİĞİ YAY: Köşesi çemberin üzerinde olan bir açının kolları tarafından oluşturulan bir çember yayı.

BİR SAYININ ÇARPMAYA GÖRE TERSİ: Bir sayının ya da sonucun 1'i bölmesiyle oluşan, sayının çarpımsal tersi. Örneğin $a \div b$'nin tersi $b \div a$'dır.

BİR SAYININ TABANI: Belli bir sayı sistemindeki rakamların sayısı.

BİR ÜÇGENİN KENARORTAYI: Bir üçgenin köşesinden karşı kenara indirilen ve bu kenarı ikiye bölen doğru parçası.

BÖLÜNEBİLİR: 0 kalanı bırakarak bölünebilme özelliği.

BÜTÜNLER: Eğer iki açının toplamı 180 derece ise bu açılar bütünlerdir.

CEBİRSEL EŞİTLİK: Değişkenlerinin tüm değerleri için doğru olan cebirsel bir denklem.

ÇARPILAN: Bir çarpmada diğer bir sayı, çarpan tarafından çarpılan sayı.

ÇEMBERSEL DÖRTKENARLI: Tüm köşeleri bir çember üzerinde olan dörtkenarlı. Bu dörtkenarlıda karşılıklı açıların toplamı bütünlerdir (yani, 180 derecedir).

ÇEŞİTKENAR: Her bir kenarı farklı uzunlukta olan üçgen.

ÇEVRE: Bir çemberin tam bir yayının uzunluğu. Şu formül ile bulunur: $C = 2\pi r$; r çemberin yarıçapıdır.

ÇEVREL ÇEMBER: Bir çokgenin tüm köşelerinin üzerinden geçen çember. Bazı çokgenlerin çevrel çemberleri yoktur. Tüm üçgenlerin çevrel çemberleri vardır.

ÇİFT TARAFLI KOŞUL: Karşılıklı bağımlı ilişki; "ancak ve ancak" bağlacı ile ifade edilir.

ÇOKKENARLI: Üçgen, beşgen ya da sekizgen gibi, üç ya da daha fazla doğru parçası ile oluşturulmuş kapalı, iki boyutlu şekil.

ÇOKYÜZLÜ: Çokkenarlılar ile oluşturulmuş kapalı, üç boyutlu şekil.

DEĞİŞMEZ: Çeşitli durumlarda değişmeden kalan bir değer (ya da ilişki).

DENK: Bir çeşit benzerliğe sahip; özellikle uslamlama zincirlerinde uygulanır. Örneğin, "ikinci durumun ispatı birinci durumunkine denktir."

DENKLİK: Çift koşullu, karşılıklı bağımlı ilişki.

DİZİ: Elemanları sütunlar ve satırlar şeklinde dizilmiş olan bilgi yapısı. Sıklıkla tablo da denir.

DOĞAL SAYI: Sıfırdan büyük olan bir tam sayı.

DOKUZLARI ELEME: Dokuzları silerek bir aritmetik işlemin doğruluğunu test etme metodu.

DÖRT RENK PROBLEMİ: (Bir nokta dışında) Ortak bir sınıra sahip olan bölgeler aynı renkte olmayacak şekilde, bir düzlemdeki herhangi bir harita en az dört renk ile boyanabilir.

DUALİTE: Geometride kimi ifade çiftlerinde bulunan ilişki. İki ifade, eğer onlardaki anahtar kelimeler dual olanları ile yer değiştirebiliyorsa dualdir. Örneğin, nokta ve doğru; aynı doğru üzerinde olma ve tek noktada kesişme; içine ve dışına çizilme ve kenarlar ve köşeler vb. dual kelimelerdir.

EŞ ÇOKGENLER: Aynı şekle ve büyüklüğe sahip olan çokgenler.

EŞKENAR ÇOKGEN: Tüm kenarları eşit uzunlukta olan çokgen. Eğer açıları de eşit uzunlukta ise (eş açılı), o zaman çokgen düzgün çokgen olur.

EŞ MERKEZLİ: Ortak bir merkeze sahip olan.

FAKTÖR: Cebirde, bir ifadeyi kalansız bölebilen bir ifade. Bir sayıyı tam olarak bölebilen bir sayı.

FAKTÖRİYEL: Birden belli bir sayıya kadar olan tam sayıların çarpımı. Örneğin "beş faktöriyel" (5! olarak yazılır) şu çarpıma eşittir: 5 • 4 • 3 • 2 • 1. Ayrıca 0! 1'e eşit olarak tanımlanmıştır.

FERMAT'NIN SON TEOREMİ: Sıfırdan farklı tüm tam sayılar ve $n > 2$ için, $x^n + y^n = z^n$ denkleminin çözümü yoktur.

FIBONACCI SAYILARI: 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, ... şeklinde devam eden ve üçüncü terimden sonra, her bir terimi, kendisinden önceki iki terimin toplamı olan sayı dizisi.

GENİŞ AÇI: Değeri 90 dereceden büyük, ama 180 dereceden küçük olan açı.

GOLDBACH VARSAYIMI: 2'den büyük her çift sayı iki asalın toplamı şeklinde yazılabilir.

GÜVERCİN YUVASI PRENSIBI: Eğer n+1 nesne (güvercin) n kategoriye (yuvaya) dağıtılırsa, en azından bir kategorinin iki nesneye (güvercine) sahip olacak olması özelliği.

HARMONİK ORTALAMA: Değerlerin terslerinin ortalamasının tersi. Aritmetik dizinin (yani, terimleri arasında sabit bir fark olan dizi) ortalamasının tersi. Örneğin 2, 5 ve 10'un harmonik ortalaması $3 \div (1 \div 2+1 \div 5+1 \div 10) = 3.75$'tir.

HERON'UN (HERO'NUN) FORMÜLÜ: Verili bir üçgenin sadece kenarlarının bilinmesiyle alanının bilinmesini sağlayan formül. $A = \sqrt{[s(s-a)(s-b)(s-c)]}$; burada A alan, s yarı çevre (çevrenin yarısı) ve a, b, c üçgenin kenarlarının uzunluğudur.

HİPOTENÜS: Dik üçgende dik üçgenin karşısında kenar. Ayrıca bir dük üçgenin en uzun kenarı.

İKİLİ SİSTEM SAYILARI Sayıları yalnızca 1 ve 0 kullanarak ifade etme yöntemi. Ardışık basamaklar 2'nin artan kuvvetleridir (ayrıca

"ikilik taban" olarak da adlandırılır).

İKİZKENAR ÜÇGEN: İki kenarı eşit olan üçgen.

İNSANTR: İç teğet çemberin merkezi. Açıortayların kesişme noktası.

İRRASYONEL SAYI: İki tamsayının bölümü olarak ifade edilemeyen reel sayı.

KARŞISINDA OLMA: Ötesinde, gerisinde ya da ona karşıt bulunma. Örneğin bir çemberin kirişi, onun yayının karşısındadır ve bir üçgenin açısı onun bir kenarının karşısındadır.

KOLİNEER NOKTALAR: Aynı doğru üzerinde olan noktalar.

KOMPLEKS EŞLENİK: Sadece imajiner kısmının işareti farklı olan kompleks sayı çiftleri; $a + bi$ ve $a - bi$ birbirlerinin eşleniğidir; burada $i = \sqrt{-1}$.

KONKAV: Konveksin tersi. Bkz. Konveks

KONİK KESİM: Bir düzlem kesiti ve sonsuz bir çift koni alınarak elde edilen eğri ailelerinden biri. Konik kesimler paraboller, elipsler, hiperboller ve çemberlerdir.

KONVEKS: Noktalar arasındaki her parçasını iç kısmında barındıran bir şekil. Konkav bir şeklin tersi.

KUADRATİK DENKLEM: $ax^2 + bx + c$ şeklinde olan denklem.

KUADRATİK FORMÜL: $ax2 + bx + c = 0$ denkleminin çözümü için kullanılan formül: $x = -b \pm \sqrt{(b^2-4ac)} \div 2a$.

LEMMA: Bir teoremin ispatının bir parçası olarak ifade edilip ispatlanmış küçük teorem.

LÜN: İki çember yayı tarafından sınırlanmış, bir düzlemin ya da kürenin hilal biçimli parçası.

MATRİS: Dikdörtgen şekilli bir değerler tablosu.

MÜKEMMEL SAYI: Kendi öz çarpanlarının toplamına eşit olan sayı.

ORTALAMA HIZ: Toplam yolun toplam zamana bölünmesi. Ayrıca bkz. Harmonik ortalama.

ORTAY: Bir geometrik şekli ikiye bölen bir doğru parçası, ışın ya da doğru. Bir köşeden çıkıp bir açıyı iki eş açıya bölen doğruya da açıortay denir.

ORTAK ÇARPAN: İki veya daha fazla sayıyı kalansız bölen sayı.

ORTASANTR: Üçgende yüksekliklerin kesişme noktası.

ÖZ ÇARPAN (ÖZ BÖLEN): Sayının kendisi dışındaki bir çarpanı (ya da böleni).

ÖZYINELEME: Bir elemanlar dizisini, sonlu sayıda basamak içeren bir formül ya da kurala göre daha önceki bir eleman ya da elemanlar üzerindeki işlemle (sayılar ya da fonksiyonlar olarak) belirlemek.

PALİNDROME: Düz ve ters olarak aynı şekilde okunan bir sayı.

PARADOKS: Kabul edilmiş öncüllerden hareket edilerek geçerli bir akıl yürütme ile ulaşılmış, kendisiyle çelişen önerme.

PİSAGOR TEOREMİ: Bir dük üçgende, bacakların karelerinin toplamı hipotenüsün karesinin toplamına eşittir. Bu genellikle $a^2 + b^2 = c^2$ şeklinde ifade edilir; burada a, b, c dik üçgenin kenarlarıdır.

PİSAGOR ÜÇLÜSÜ: Pisagor teroemini doğrulayan sayı üçlüsü. Eğer sayıların 1'den başka ortak böleni yoksa bunlara İlkel Pisagor Üçlüsü denir.

RAKAMLARIN DEVRİ: Sürekli tekrar eden rakamlar grubu.

RASYONEL SAYI: Sıfıra eşit bir paydaya sahip olmamak kaydıyla ile iki tam sayının bölümü şeklinde ifade edilen sayı.

SENTROİD: Bir geometrik şeklin ağırlık merkezi. Bu noktada bu şekil bir iğne ucunda dengede durabilir. Bu nokta üçgende kenarortayların kesişme noktasıdır.

SİHİRİ KARE: Kare şekilli bir sayı dizisi; sütunlardaki, satırlardaki ve köşegenlerdeki sayıların toplamı aynıdır.

SİMETRİ: Bir düzleme, çizgiye ya da noktaya göre belli parçaların aynı büyüklük, biçim ve düzenlenme içinde bulunmaları durumu.

ŞEKİLSEL SAYILAR: Bir noktalar dizisi ile düzgün bir çokgen biçiminde ifade edilebilen bir tamsayı.

TAM KARE: Herhangi bir sayının kendisi ile çarpılması ile elde edilen sayı.

TAMSAYILAR: Pozitif ve negatif sayılarla sıfırı içine alan sayı grubu.

TEOREM: Açık varsayımlara dayalı olarak ispatlanabilen önerme.

TOPOLOJİ: Geometrinin, geometrik biçimlerin çekme ya da bükme gibi çeşitli değişim durumlarında sabit (ya da değişmez) kalan özelliklerini inceleyen dalı.

TRİSEKTÖR: Bir açıyı üç eş açıya bölen çizgiler.

TÜMLER: Değerlerinin toplamı 90 derece olan iki açı.

ÜÇGENSEL SAYILAR: Eşkenar biçimli nokta dizileri ile temsil edilebilen bir tam sayı.

YAKINSAK SERİLER: Sonlu bir toplama sahip olan seri.

YÜKSEKLİK: Bir çokgenin köşesinden karşı kenara çizilen dikme.



Matematik Büyücüsü

SAYILARIN GÖSTERİSİNE HOŞ GELDİNİZ!

Elinizdeki kitap, yazarın, *New York Times*'ta matematiğin güzelliğini ve büyüleyiciliğini anlatmak adına yayınladığı bir makeleye gelen olağanüstü güzellikteki tepkilerden ilham alınarak ortaya çıktı. 'Matematiğin güzelliği ya da büyüleyiciliği mi olur?' diyenlerden ya da 'Matematiğin güzelliğini ve büyüleyiciliğini anlatmak mümkün mü?' diyenlerden olabilirsiniz. İkisini de demiyorsanız, bu kitabı okuduktan sonra safınızı daha kolay belirleyebilirsiniz!

Matematik söz konusu olduğunda hepimiz kolaylıkla, 'Haa matematik mi, çok başarısızdım!' demekten imtina etmeyiz. Peki, bu cümlemizin matematikte başarısızlığından yakındığımız çocuğumuzu ciddi anlamda etkilediğinin farkında mıyız? Yani bir önyargı olduğundan ve matematik dışında bir konuda bu kadar kolay "başarısızım" diyemediğimizden söz ediyoruz...

Matematik profesörü olan Posamentier, matematiği, hem öğrencilere hem de öğretmenlere canlı kılmak için ömürünü harcamış biri. Ve bu çalışması da, olağanüstü başarılarını kendi hayatımıza eklemek için bir şans!

Okul hayatı boyunca matematikten sıkılanlar ve onun büyüleyiciliğinin farkında olanlar için yazılmış; sadece bizi büyülemesi için kitaplığımıza koyacağımız bir çalışma...

GÜNCEL YAYINCILIK

ISBN 975-8621-80-7